FÍSICA TEÓRICA

TEORÍA CLÁSICA DE LOS CAMPOS

LANDAU Y LIFSHITZ

VOLÚMEN 2

SEGUNDA EDICIÓN

CURSO DE FÍSICA TEÓRICA

Volumen 2

TEORÍA CLÁSICA DE LOS CAMPOS

Segunda edición

L. D. LANDAU E. M. LIFSHITZ
Academia de Ciencias, U.R.S.S.

TEORÍA CLÁSICA DE LOS CAMPOS

Volumen 2

del

CURSO DE FÍSICA TEÓRICA

Segunda edición

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
BARCELONA – BOGOTÁ – BUENOS AIRES – CARACAS – MÉXICO

Título de la obra original:

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Edición original en lengua rusa publicada por:

Nauka, Moscú

Versión española directamente del ruso por el:

Prof. Dr. Ramón Ortiz Fornaguera

Jefe de la División de Física Teórica de la Junta de Energía Nuclear - Madrid

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15, Local B
08029 Barcelona

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida, sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.

Edición en español

© EDITORIAL REVERTÉ, S.A., 1992

Impreso en España - Printed in Spain

ISBN - 84 - 291 - 4080 - 8 Obra completa
ISBN - 84 - 291 - 4082 - 4 Tomo 2

Depósito Legal: B - 36544 - 1992

Impreso por GERSA, Industria Gráfica
Tambor del Bruc, 6
08970 Sant Joan Despí (Barcelona)

NOTA

La presente segunda edición española de la *Teoría clásica de campos* es traducción de la quinta edición rusa (*Teoríîa polîa*, izdamie pîatoe, ispravlennoe i dopolnennoe, Izdatel'stvo «Nauka», Moskva, 1967), si bien difiere de ella —aparte algunas correcciones— en que incluye los párrafos 112 al 114 que no figuran en la misma. El texto de estos párrafos se debe al Prof. Lifshitz, quien lo envió al traductor el 13 de abril de 1970 para su incorporación a esta segunda edición.

R. ORTIZ FORNAGUERA

PRÓLOGO

Para la presente edición el libro ha sido mejorado y completado en numerosos puntos. Estos cambios, por supuesto, no afectan ni al plan general ni al carácter de la exposición.

Un cambio substancial (propuesto a los autores hace ya algunos años) ha sido el paso en toda la obra a otra métrica cuadridimensional, por lo que hubo que introducir ya desde el principio la notación contravariante y covariante de los 4-vectores. Con esto se consigue tanto la uniformidad del sistema de notaciones en las diferentes partes de este libro, como el acuerdo con el sistema que ha adquirido actualmente una difusión universal en la literatura física. La conveniencia de esta métrica resulta particularmente considerable en las aplicaciones a la teoría cuántica.

En el estudio de esta obra dentro del marco del "mínimo teórico" para los físicos teóricos, cabe recomendar prescindir de los §§ 50, 54-57, 59-61, 68, 70, 74, 77, 99, 103, 106 y 111.

Quisiera expresar aquí mi sincera gratitud a todos los compañeros que hicieron numerosas observaciones valiosas acerca del libro: V. L. Ginzburg, Ia. B. Zel'dovich, B. Ia. Zel'dovich, I. Iu. Kobzarev, I. D. Novikov, V. I. Pustavoĭt, S. I. Syrovatskiĭ y, en particular, a L. P. Pitaevskiĭ, con quien discutí muchas cuestiones relativas a la mejora de la obra.

E. M. LIFSHITZ

NOTACIONES

Magnitudes tridimensionales

Los índices tensoriales tridimensionales se designan por letras griegas.
Elementos de volumen, de área y de longitud dv, df y dl
Impulso y energía de una partícula $\mathbf{p}$ y $\mathscr{E}$
Función de Hamilton $\mathscr{H}$
Potenciales escalar y vector del campo electromagnético ϕ y $\mathbf{A}$
Densidad de carga y de corriente ρ y $\mathbf{j}$
Momento dipolar eléctrico d
Momento dipolar magnético $\mathfrak{m}$

Magnitudes cuadrimensionales

Los índices tensoriales cuadrimensionales se designan por letras latinas i, k, l,... y toman los valores 0, 1, 2, 3,
Se ha adoptado una métrica con la signatura $(+ - - -)$
La reglar para subir y bajar índices se da en la pág. 21
Las componentes de los 4 vectores se ordenan en la forma $A^i = (A^o, \mathbf{A})$
El tensor unidad antisimétrico de cuarto orden se representa por e^{iklm}, con $e^{0123} = 1$ (definición en la pág. 24)
4 — vector posición $x^i = (ct, \mathbf{r})$
4 — velocidad $u^i = dx^i/ds$
4 — impulso $p^i = (\frac{\mathscr{E}}{c}, \mathbf{p})$
4 — vector corriente $j^i = (c\rho, \rho\mathbf{v})$
4 — potencial del campo electromagnético $A^i = (\phi, \mathbf{A})$
4 — tensor del campo electromagnético $F_{ik} = \frac{\partial \mathrm{Ak}}{\partial \mathrm{xi}} - \frac{\partial \mathrm{Ac}}{\partial \mathrm{xk}}$ (la relación entre las componentes F_{ik} y las componentes de $\mathbf{E}$ y de $\mathbf{H}$ se ve en la pág. 86)
4 — tensor energía-impulso T^{ik} (sus componentes se definen en la pág. 113).

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. EL PRINCIPIO DE LA RELATIVIDAD 1
1 Velocidad de propagación de las interacciones 1
2 Intervalo 5
3 Tiempo propio 10
4 La transformación de Lorentz 13
5 Transformación de la velocidad 17
6 Cuadrivectores 20
7 Velocidad y aceleración cuadridimensionales 31

CAPÍTULO 2. MECÁNICA RELATIVISTA. 33
8 El principio de mínima acción 33
9 Energía e impulso 35
10 Transformación de las funciones de distribución 40
11 Desintegración de partículas 42
12 Secciones eficaces invariantes 47
13 Colisiones elásticas de partículas 49
14 Momento cinético 56

CAPÍTULO 3. CARGAS EN CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS 61
15 Las partículas elementales en teoría de la relatividad 61
16 Cuadripotencial de un campo. 63
17 Las ecuaciones del movimiento de una carga en un campo 66
18 Invariancia de contraste. 69
19 Campo electromagnético .constante 71
20 Movimiento en un campo eléctrico uniforme constante 73
21 Movimiento en un campo magnético uniforme constante 75
22 Movimiento de una carga en un campo eléctrico y un campo magnético uniformes y constantes 79
23 El tensor campo electromagnético 84
24 Transformación de Lorentz del campo 87
25 Invariantes del campo 89

CAPÍTULO 4. ECUACIONES DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO. 93
26 El primer par de ecuaciones de Maxwell. 93
27 La función acción del campo electromagnético 95
28 El vector corriente cuadridimensional 98
29 La ecuación de continuidad 100
30 El segundo par de ecuaciones de Maxwell 103
31 Flujo y densidad de energía 107
32 Tensor energía-impulso 108
33 El tensor energía-impulso del campo electromagnético 114

34 Teorema del virial 118
35 El tensor energía-impulso de los cuerpos macroscópicos. 120

CAPÍTULO 5. CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS CONSTANTES 125
36 La ley del coulomb 125
37 Energía electrostática de las cargas 127
38 Campo de una carga en movimiento uniforme 129
39 Movimiento en un campo de Coulomb 132
40 Momento dipolar 136
41 Momentos multipolares 138
42 Sistema de cargas en un campo exterior 142
43 Campo magnético constante 144
44 Momentos magnéticos. 147
45 Teorema de Larmor 149

CAPÍTULO 6. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS 153
46 La ecuación de las ondas 153
47 Ondas planas 155
48 Ondas planas monocromáticas 162
49 Descomposición espectral. 168
50 Luz parcialmente polarizada 170
51 Descomposición del campo electrostático. 177
52 Frecuencias propias del campo 178

CAPÍTULO 7. PROPAGACIÓN DE LA LUZ 185
53 La óptica geométrica. 185
54 Intensidad 189
55 Iconal angular 192
56 Haces estrechos de rayos 195
57 Formación de imágenes mediante haces anchos de rayos 202
58 Los límites de la óptica geométrica 205
59 Difracción. 207
60 Difracción de Fresnel. 215
61 Difracción de Fraunhofer 219

CAPÍTULO 8. EL CAMPO DE CARGAS EN MOVIMIENTO. 225
62 Potenciales retardados 225
63 Los potenciales de Lienard-Wiechert 228
64 Descomposición espectral de los potenciales retardados 232
65 La función de Lagrange hasta términos de segundo orden 235

CAPÍTULO 9. RADIACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS 241
66 El campo a gran distancia de un sistema de cargas 241
67 Radiación dipolar 246
68 Radiación dipolar en las colisiones 250

69 Radiación de frenado de bajas frecuencias 253
70 Radiación en el caso de interacción coulombiana 255
71 Radiación cuadripolar y radiación dipolar magnética 264
72 Campo de radiación a pequeñas distancias 267
73 Radiación emitida por una carga que se mueve rápidamente 271
74 Radiación de frenado magnético 277
75 Frenado por radiación 284
76 Frenado por radiación en el caso relativista 292
77 Descomposición espectral de la radiación en el caso ultrarrelativista. . . . 296
78 Dispersión por cargas libres 301
79 Dispersión de ondas de baja frecuencia 308
80 Dispersión de ondas de alta frecuencia 310

CAPÍTULO 10. PARTÍCULA EN UN CAMPO GRAVITATORIO 315
81 Los campos gravitatorios en mecánica no relativista 315
82 El campo gravitatorio en la mecánica relativista 317
83 Coordenadas curvilíneas 321
84 Distancias e intervalos de tiempo 326
85 Diferenciación covariante 332
86 Relación entre los símbolos de Christoffel y el tensor métrico 337
87 Movimiento de una partícula en un campo gravitatorio 341
88 Campo gravitatorio constante 345
89 Rotación 354
90 Ecuaciones de la electrodinámica cuando existe un campo gravitatorio . . 356

CAPÍTULO 11. LAS ECUACIONES DEL CAMPO GRAVITATORIO 361
91 El tensor de curvatura 361
92 Propiedades del tensor de curvatura 364
93 La función acción del campo gravitatorio 372
94 El tensor energía-impulso. 375
95 Las ecuaciones del campo gravitatorio 381
96 La ley de Newton 389
97 Campo gravitatorio central 394
98 Movimiento en un campo gravitatorio central 402
99 El sistema de referencia síncrono 406
100 Colapso gravitatorio 414
101 El pseudotensor energía-impulso. 426
102 Ondas gravitatorias 435
103 Soluciones exactas de las ecuaciones del campo dependientes de una sola variable 439
104 Campos gravitatorios lejos de los cuerpos 446
105 Radiación de ondas gravitatorias 452
106 Ecuaciones del movimiento, de un sistema de cuerpos en segunda aproximación 455

CAPÍTULO 12. PROBLEMAS COSMOLÓGICOS 467
107 El espacio isótropo 467
108 Métrica del espacio-tiempo en el modelo isótropo cerrado 472
109 Métrica del espacio-tiempo en el modelo isótropo abierto 477
110 El corrimiento hacia el rojo 482
111 Estabilidad gravitatoria del universo isótropo 481
112 Espacios homogéneos. 499
113 Régimen oscilatorio al acercarse a un punto singular 505
114 Carácter de la singularidad en la solución general cosmológica de las ecuaciones de la gravitación 513

ÍNDICE ALFABÉTICO 519

Volumen 2

TEORÍA CLÁSICA DE LOS CAMPOS

CAPÍTULO 1

EL PRINCIPIO DE LA RELATIVIDAD

§ 1. Velocidad de propagación de las interacciones

Para describir los procesos que ocurren en la Naturaleza hay que contar con un *sistema de referencia:* Se entiende por sistema de referencia un sistema de coordenadas, que permite fijar la posición de las partículas en el espacio, y un sistema de relojes fijos en él, que sirven para indicar el tiempo.

Existen sistemas de referencia en los que un cuerpo que se mueve libremente, es decir, un cuerpo que se mueve sin que sobre él actúen fuerzas exteriores, tiene una velocidad constante. De los sistemas de referencia de esta clase se dice que son *inerciales.*

Si dos sistemas de referencia se mueven con movimiento rectilíneo y uniforme el uno respecto del otro y si uno de ellos es un sistema inercial, el otro es también inercial, evidentemente (es decir, también en este sistema todo movimiento libre será rectilíneo y uniforme). De esta manera se pueden obtener sistemas inerciales de referencia en número arbitrario que se mueven con movimiento uniforme uno respecto de otro.

La experiencia muestra que se cumple el llamado *principio de relatividad.* Según este principio, todas las leyes de la naturaleza son las mismas en todos los sistemas inerciales de referencia. Dicho de otra manera, las ecuaciones que expresan las leyes de la naturaleza son invariantes respecto de las transformaciones de coordenadas y de tiempo que hacen pasar de un sistema inercial a otro. Esto significa que la ecuación que describe una ley cualquiera de la naturaleza adopta una forma única cuando se expresa en función de las coordenadas y del tiempo en diferentes sistemas de referencia inerciales.

La interacción de partículas materiales se describe en la mecánica ordinaria mediante una energía potencial de interacción que aparece como función de las coordenadas de las partículas que interactúan. Es fácil ver que esta manera de describir las interacciones supone una propagación instantánea de las mismas. En efecto, las fuerzas que actúan sobre cada una de las partículas debidas a las restantes, en

cada instante dependen, en esta manera de presentar las cosas, únicamente de las posiciones de las partículas en este mismo instante. Un cambio en la posición de cualquiera de las partículas en interacción repercute inmediatamente sobre las otras partículas.

Sin embargo, muestra la experiencia que no existen interacciones instantáneas en la naturaleza. Por consiguiente, una mecánica que se basa en la hipótesis de la propagación instantánea de las interacciones no es del todo correcta. En realidad, si en uno de los cuerpos en interacción tiene lugar un cambio, éste influirá sobre los otros cuerpos solamente una vez haya transcurrido un cierto intervalo de tiempo. Tan sólo después de pasado este tiempo comenzarán a manifestarse en el segundo cuerpo los procesos determinados por el cambio inicial. Dividiendo la distancia entre los dos cuerpos por dicho intervalo de tiempo obtenemos la *velocidad de propagación de la interacción.*

Hay que advertir que esta velocidad debería llamarse, en rigor, velocidad de propagación máxima de las interacciones. Determina solamente el intervalo de tiempo, transcurrido el cual un cambio que ocurre en un cuerpo comienza a manifestarse en otro. Es claro que la existencia de una velocidad de propagación máxima de las interacciones implica, al mismo tiempo, que en la naturaleza son del todo imposibles los movimientos de los cuerpos con velocidad mayor que aquélla. En efecto, si pudiera tener lugar un movimiento de tales características, se podría realizar mediante él una interacción cuya velocidad sería mayor que la velocidad de propagación máxima de las interacciones.

Las interacciones que se propagan de una partícula a otra se suelen llamar « señales », que son emitidas por la primera partícula y que « informan » a la segunda partícula de cambios que ha experimentado la primera. La velocidad de propagación de la interacción se llama entonces « velocidad de la señal ».

Del principio de relatividad se sigue, en particular, que la velocidad de propagación de las interacciones es la misma en todos los sistemas inerciales de referencia. Por consiguiente, la velocidad de propagación de las interacciones es una constante universal.

Esta velocidad constante, como se demostrará más adelante, es a la vez la velocidad de propagación de la luz en el vacío; por esto se la llama *velocidad de la luz.* Se suele designar por la letra c, y su valor numérico, de acuerdo con las últimas mediciones, es igual a

$$c = 2{,}99793 \times 10^{10} \text{ cm/seg} \tag{1.1}$$

El que esta velocidad sea grande explica el hecho de que la mecánica clásica resulte ser, en la práctica, suficientemente aproximada en la mayor parte de los

casos. La mayoría de las velocidades que hemos de considerar de ordinario son tan pequeñas comparadas con la de la luz, que suponer que esta última es igual a infinito no afecta prácticamente la precisión de los resultados.

La combinación del principio de relatividad con el de la finitud de la velocidad de propagación de las interacciones ha recibido el nombre de *principio de relatividad de Einstein* (formulado por Einstein en 1905) en contraposición al principio de relatividad de Galileo, que se basa en una velocidad de propagación infinita de las interacciones.

La mecánica que parte del principio de relatividad de Einstein (al que, por lo general, llamaremos simplemente principio de relatividad) se llama *relativista.* En el caso límite en que las velocidades de los cuerpos en movimiento son pequeñas respecto de la velocidad de la luz, se puede prescindir del efecto que el carácter finito de la velocidad de propagación de las interacciones tiene sobre el movimiento. La mecánica relativista se reduce entonces a la mecánica ordinaria basada en la hipótesis de la propagación instantánea; esta mecánica es la llamada *newtoniana o clásica.* El paso de la mecánica relativista a la clásica se puede conseguir formalmente determinando el límite para $c \to \infty$ de las fórmulas de la mecánica relativista.

Ya en la mecánica clásica el concepto de distancia es un concepto relativo, es decir, las relaciones espaciales entre sucesos diferentes dependen del sistema de referencia en que se describen. La afirmación de que dos sucesos no simultáneos ocurren en un mismo punto del espacio o, en general, a una determinada distancia el uno del otro, tiene sentido sólo cuando se indica cuál es el sistema de referencia implícito en esta afirmación.

El tiempo, en cambio, es absoluto en la mecánica clásica; con otras palabras, se admite que las propiedades del tiempo no dependen del sistema de referencia, el tiempo es único para todos ellos. Esto significa que si dos fenómenos ocurren simultáneamente para un observador cualquiera, ocurren también simultáneamente para cualquier otro. Más general: el intervalo de tiempo entre dos sucesos dados debe ser el mismo en todos los sistemas de referencia.

Es fácil convencerse, sin embargo, de que la idea de un tiempo absoluto está en completa contradicción con el principio de relatividad de Einstein. Basta para ello recordar que en la mecánica clásica, basada en el concepto de un tiempo absoluto, vale la conocida ley de composición de las velocidades, según la cual la velocidad de un movimiento compuesto es igual, simplemente, a la suma (vectorial) de las velocidades que componen dicho movimiento. Dado que esta ley es universal, debería ser aplicable también a la propagación de interacciones. Se seguiría de aquí que la velocidad de esta propagación debería ser diferente en diferentes sistemas de referencia inerciales, en contradicción con el principio de relatividad.

En este punto, sin embargo, la experiencia confirma por completo dicho principio. Mediciones realizadas primero por Michelson (en 1881) pusieron de manifiesto que la velocidad de la luz es del todo independiente de la dirección en que se propaga, mientras que, según la mecánica clásica, la velocidad de la luz debiera ser menor en el sentido del movimiento de la tierra que en el sentido opuesto.

El principio de relatividad conduce así al resultado de que el tiempo no es absoluto. Los intervalos de tiempo son diferentes en diferentes sistemas de referencia. Por consiguiente, la afirmación de que ha transcurrido un determinado intervalo de tiempo entre dos sucesos dados tiene sólo sentido cuando se indica cuál es el sistema de referencia implícito en esta afirmación. En particular, sucesos que son simultáneos en un sistema de referencia, no serán simultáneos en otro sistema.

Para aclarar estas nociones es instructivo considerar el siguiente ejemplo sencillo. Sean K y K' dos sistemas inerciales de referencia, cuyos ejes de coordenadas son X, Y, Z y X', Y', Z', respectivamente, tales que el sistema K' se mueve relativamente al K a lo largo de los ejes X y X' (fig. 1).

Supongamos que de un punto A sobre el eje X parten señales en dos sentidos opuestos. Dado que la velocidad de propagación de una señal en el sistema K', como en todos los sistemas inerciales, es igual a c (en ambos sentidos), las señales alcanzarán los puntos B y C, equidistantes de A, en un mismo instante (en el sistema K'). Pero es fácil ver que estos mismos dos sucesos (llegada de la señal a B y a C) no serán, en modo alguno, simultáneos para un observador en el sistema K. En efecto, la velocidad de las señales respecto del sistema K tiene, de acuerdo con el principio de relatividad, el mismo valor c, y puesto que el punto B se mueve (con relación al sistema K) al encuentro de la señal que se le ha enviado, mientras el punto C se aleja de la señal (emitida de A a C), en el sistema K la señal alcanzará el punto B antes que el punto C.

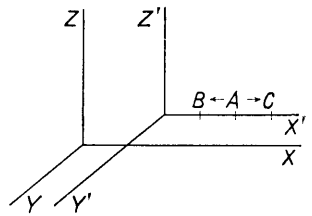

FIG. 1.

El principio de relatividad de Einstein introduce de esta manera cambios muy profundos y fundamentales en los conceptos físicos básicos. Las nociones de espacio y de tiempo que deducimos de nuestra experiencia cuotidiana son sólo aproxi-

maciones ligadas al hecho de que en la vida diaria nos encontramos sólo ante velocidades que son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz.

§ 2. Intervalo

En lo que sigue utilizaremos con frecuencia el concepto de *suceso*. Un suceso se define por el lugar en que ocurre y por el instante en que ocurre. De esta manera, un suceso que ocurre en una cierta partícula material se define mediante las tres coordenadas de esta partícula y por el instante en que ocurre.

Con frecuencia es útil, para favorecer la intuición, introducir un espacio ficticio cuadridimensional sobre cuyos ejes se marcan las tres coordenadas espaciales y el tiempo. En este espacio los sucesos se representan por puntos, llamados *puntos de universo*. En este espacio ficticio cuadridimensional, a cada partícula corresponde una cierta línea, llamada *línea de universo*. Los puntos de esta línea determinan las coordenadas de la partícula en todo instante. Es evidente que a una partícula en movimiento rectilíneo y uniforme le corresponde una línea de universo recta.

Expresemos ahora el principio de la invariancia de la velocidad de la luz en forma matemática. Consideremos para ello dos sistemas de referencia K y K' que se mueven con movimiento relativo uniforme. Elijamos los ejes de coordenadas de tal manera que X y X' coinciden, mientras que los ejes Y y Z son paralelos a los Y' y Z'; representemos el tiempo en los sistemas K y K' por t y t'.

Supongamos que el primer suceso consiste en la emisión de una señal, que se propaga con la velocidad de la luz, desde un punto de coordenadas x_1, y_1, z_1 en el sistema K y en el instante t_1 de este mismo sistema. La propagación de esta señal se observa desde el sistema K. Supongamos que el segundo suceso consiste en la llegada de la señal al punto x_2, y_2, z_2 en el instante t_2. La señal se propaga con velocidad c; la distancia recorrida por ella es así $c\,(t_2-t_1)$. Por otro lado, esta misma distancia es igual a $[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{\frac{1}{2}}$. Podemos escribir, por lo tanto, la siguiente relación entre las coordenadas de ambos sucesos en el sistema K:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2=0. \tag{2.1}$$

Los mismos dos sucesos, es decir, la propagación de la señal, se pueden observar desde el sistema K'.

Sean x_1', y_1', z_1', t_1' y x_2', y_2', z_2', t_2' las coordenadas en el sistema K' del primer y segundo suceso, respectivamente. Dado que la velocidad de la luz es la misma en en los sistemas K y K', tenemos, como en (2.1):

$$(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2-c^2(t_2'-t_1')^2=0. \tag{2.2}$$

Si x_1, y_1, z_1, t_1 y x_2, y_2, z_2, t_2 son las coordenadas de dos sucesos cualesquiera, la cantidad

$$s_{12} = [c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

se llama *intervalo* entre estos dos sucesos.

Del principio de invariancia de la velocidad de la luz se sigue, por consiguiente, que si el intervalo entre dos sucesos es cero en un sistema de referencia, es también igual a cero en cualquier otro sistema.

Si dos sucesos son infinitamente próximos entre sí, para el intervalo ds entre ellos se tiene

$$ds^2 = c^2\,dt^2-dx^2-dy^2-dz^2. \tag{2.4}$$

La forma de las expresiones (2.3) o (2.4) permite considerar el intervalo, desde el punto de vista matemático formal, como distancia entre dos puntos en un espacio de cuatro dimensiones (sobre cuyos ejes se representan las coordenadas x, y, z y el producto ct). Existe, sin embargo, una diferencia esencial en la regla de componer esta cantidad en comparación con la regla de la geometría ordinaria: para formar el cuadrado del intervalo, los cuadrados de las diferencias de las coordenadas relativas a los diferentes ejes se suman, no con el mismo signo, sino con signos diferentes †).

Se ha demostrado ya que si $ds = 0$ en un sistema inercial, también $ds' = 0$ en cualquier otro sistema. Por otra parte, ds y ds' son infinitésimos del mismo orden. De estas dos condiciones se sigue que ds^2 y ds'^2 deben ser proporcionales entre sí:

$$ds^2 = a\,ds'^2$$

donde el coeficiente a puede depender tan sólo del módulo de la velocidad relativa de los dos sistemas inerciales. No puede depender de las coordenadas ni del tiempo,

---

† La geometría cuadridimensional definida por la forma cuadrática (2.4) se llama *pseudoeuclídea* para distinguirla de la geometría euclídea ordinaria. Dicha geometría fue introducida en la teoría de la relatividad por G. Minkovskii.

puesto que, de ser así, puntos diferentes en el espacio e instantes diferentes en el tiempo no serían equivalentes, lo que contradeciría la homogeneidad de espacio y tiempo. Análogamente, no puede depender de la dirección de la velocidad relativa, puesto que ello contradeciría la isotropía del espacio.

Sean K, K_1, K_2, tres sistemas de referencia y V_1 y V_2 las velocidades de los sistemas K_1 y K_2 respecto de K. Se tendrá:

$$ds^2 = a(V_1)\, ds_1^2, \qquad ds^2 = a(V_2)\, ds_2^2.$$

Por igual razón podemos escribir:

$$ds_1^2 = a(V_{12})\, ds_2^2,$$

donde V_{12} es el módulo de la velocidad de K_2 respecto de K_1. De la comparación de estas relaciones entre sí resulta que deberá tenerse,

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}). \tag{2.5}$$

Pero V_{12} depende no sólo de los módulos de los vectores $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$, sino también del ángulo que forman. Sin embargo, este ángulo no aparece en el primer miembro de la relación (2.5) Es claro, por consiguiente, que esta fórmula puede ser correcta sólo si la función $a(V)$ se reduce a una constante, constante que es igual a la unidad en virtud de la misma fórmula.

Tenemos, por lo tanto,

$$ds^2 = ds'^2,$$

y de la igualdad de los intervalos infinitesimales se sigue la igualdad de los intervalos finitos: $s = s'$.

Llegamos así a un resultado muy importante: el intervalo entre dos sucesos es el mismo en todos los sistemas de referencia, es decir, es invariante respecto de la transformación que lleva de un sistema inercial a cualquier otro. Esta invariancia es también la expresión matemática de la constancia de la velocidad de la luz.

Sean de nuevo x_1, y_1, z_1, t_1 y x_2, y_2, z_2, t_2 las coordenadas de dos sucesos en un determinado sistema de referencia K. ¿Existe un sistema de coordenadas K' en que estos dos sucesos ocurran en el mismo punto del espacio?

Introduzcamos la notación

$$t_2 - t_1 = t_{12}, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y^2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2.$$

El intervalo entre dos sucesos referidos al sistema K es entonces:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$$

y en el sistema K':

$$s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2,$$

con lo que, en virtud de la invariancia de los intervalos,

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2.$$

Si los dos sucesos tienen que ocurrir en el mismo punto respecto del sistema K', es decir, si $l_{12}' = 0$, deberá ser:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0.$$

Por lo tanto, un sistema de referencia que posea dicha propiedad existe si $s_{12}^2 > 0$, esto es, si el intervalo entre los dos sucesos es un número real. Los intervalos reales se califican de *temporales.*

Resulta, pues, que si el intervalo entre los dos sucesos es temporal, existe un sistema de referencia en el que los dos sucesos ocurren en el mismo lugar. El tiempo que transcurre entre ellos referido al mismo sistema es igual a

$$t_{12}' = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \frac{s_{12}}{c}. \tag{2.6}$$

Si dos sucesos ocurren en un mismo cuerpo, el intervalo entre ellos es siempre temporal. En efecto, la distancia que recorre el cuerpo entre los dos sucesos no puede ser mayor que ct_{12}, como consecuencia de no poder ser mayor que c la velocidad del cuerpo. Siempre será, por esto,

$$l_{12} < ct_{12}.$$

Veamos ahora si es posible encontrar un sistema de referencia en el que dos sucesos ocurran en el mismo instante. Como antes, en los sistemas K y K' tenemos $c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2$. Dado que, por hipótesis, debe ser $t_{12}'^2 = 0$, será:

$$s_{12}^2 = -l_{12}'^2 < 0.$$

Por lo tanto, aquel sistema existirá sólo cuando el intervalo s_{12} entre los dos sucesos sea imaginario. Los intervalos imaginarios se califican de *espaciales.*

De esta manera, si el intervalo entre los dos sucesos es espacial, existe un sistema de referencia en el que los dos sucesos ocurren simultáneamente. La distancia entre

los puntos en que ocurren estos sucesos referida a dicho sistema es igual a

$$l'_{12} = \sqrt{l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2} = is_{12}. \tag{2.7}$$

La clasificación de los intervalos en intervalos espaciales y temporales es, debido a su invariancia, un concepto absoluto. Esto significa que el carácter temporal o espacial de un intervalo es independiente del sistema de referencia.

Tomemos como origen del sistema de coordenadas espacio-temporales un suceso cualquiera *O*. Con otras palabras, en el sistema de coordenadas cuadridimensional, cuyos ejes se indican por x, y, z, t, el punto de universo del suceso *O* es el origen de coordenadas. Veamos ahora qué relación liga los demás sucesos con el suceso dado *O*. Para facilitar la intuición, consideraremos sólo una dimensión espacial y el tiempo, representándolos sobre dos ejes (fig. 2). El movimiento rectilíneo y uniforme de una partícula que pasa por $x = 0$ en el instante $t = 0$ se representa por una recta que pasa por *O* y cuya pendiente respecto del eje t es igual a la velocidad de la partícula. Dado que la velocidad máxima posible es c, el ángulo entre esta recta y el eje t no puede superar un cierto valor máximo. En la figura 2 se representan las dos rectas que corresponden a la propagación de dos señales (con la velocidad de la luz) en sentidos opuestos y que pasan por el suceso *O* (es decir, que pasan

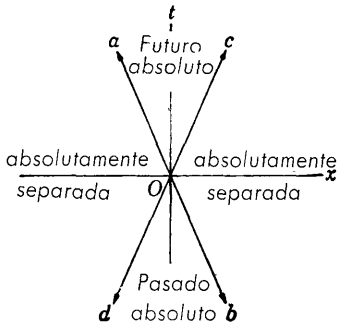

FIG. 2.

por $x = 0$ en el instante $t = 0$). Todas las rectas que representan movimientos de partículas pueden estar sólo en las regiones *aOc* y *dOb*. Sobre las rectas *ab* y *cd*, evidentemente es $x = \pm ct$. Consideremos primero sucesos cuyos puntos de universo se encuentran en la región *aOc*. Es fácil ver que para todos los puntos de esta región es $c^2t^2 - x^2 > 0$. Dicho de otro modo, el intervalo entre un suceso cualquiera de esta región y el suceso *O* es temporal. En esta región es $t > 0$, es decir, todos los sucesos en ella ocurren « después » que el suceso *O*. Pero dos sucesos que están separados por un intervalo temporal, en ningún sistema de referencia pueden ser

simultáneos. Por consiguiente, es imposible encontrar un sistema de referencia en el que un suceso cualquiera de la región *aOc* ocurra « antes » que el suceso *O*, es decir, en un instante $t<0$. Todos los sucesos en la región *aOc* son, pues, sucesos futuros respecto de *O* en todos los sistemas de referencia. Esta región se puede llamar así el « futuro absoluto » respecto del suceso *O*.

Exactamente de la misma manera, todos los sucesos en la región *bOd* pertenecen al « pasado absoluto » respecto de *O*, es decir, los sucesos que pertenecen a esta región ocurren antes que el suceso *O* en todos los sistemas de referencia.

Consideremos finalmente las regiones *dOa* y *cOb*. El intervalo entre un suceso cualquiera de esta región y el suceso *O* es espacial. Estos sucesos ocurren en puntos diferentes del espacio respecto de cualquier sistema de referencia. Estas regiones se pueden por ello calificar de « absolutamente separadas » respecto de *O*. Sin embargo, los conceptos « simultáneos », « antes » y « después » son relativos para estos sucesos. Para un suceso cualquiera de esta región existen sistemas de referencia en los que el suceso ocurre después que el suceso *O*, sistemas en los que ocurre antes y, finalmente, sistemas de referencia en los que dicho suceso y *O* son simultáneos.

Obsérvese que si se consideran las tres coordenadas espaciales en vez de sólo una, en vez de las dos rectas de la fig. 2 tendremos un « cono » $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$ en el sistema de coordenadas cuadridimensional *x*, *y*, *z*, *t*, cono cuyo eje coincide con el eje *t* (este cono se llama *cono de luz*). Las regiones del « futuro absoluto » y del « pasado absoluto » son entonces las correspondientes a las dos regiones interiores de este cono.

Dos sucesos se pueden vincular causalmente entre sí tan sólo si el intervalo entre ellos es temporal, como se deduce inmediatamente del hecho de que ninguna interacción se puede propagar con velocidad mayor que la velocidad de la luz. Como acabamos de ver, es precisamente para estos sucesos para los que los conceptos « antes » y « después » tienen un significado absoluto, condición que es necesaria para que los conceptos de causa y efecto tengan sentido.

§ 3. Tiempo propio

Supongamos que desde un cierto sistema de referencia inercial se observa un reloj que se mueve de manera cualquiera respecto del mismo. En cada instante este movimiento se puede considerar uniforme. En cada instante podemos, por esto, introducir un sistema inercial de referencia respecto del cual el reloj está en reposo.

Durante un intervalo de tiempo infinitesimal *dt* (indicado por un reloj en reposo, es decir, ligado a nuestro sistema) el reloj en movimiento recorre una distancia

$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Veamos qué intervalo de tiempo dt' indica en estas condiciones el reloj en movimiento. En un sistema de coordenadas en el que éste se encuentra en reposo será $dx' = dy' = dz' = 0$. Dado el carácter invariante de los intervalos se tendrá:

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2\,dt'^2,$$

de donde,

$$dt' = \frac{ds}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

o también,

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2\,dt^2}}.$$

Pero,

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = v^2,$$

donde v es la velocidad del reloj; por consiguiente,

$$dt' = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{3.1}$$

Integrando esta expresión podemos obtener el intervalo de tiempo indicado por el reloj en movimiento cuando el tiempo transcurrido según el reloj en reposo es $t_2 - t_1$:

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{3.2}$$

El tiempo indicado por un reloj que se mueve junto con un objeto dado se llama *tiempo propio* de este objeto. Las fórmulas (3.1) y (3.2) expresan el tiempo propio en función del tiempo correspondiente al sistema de referencia respecto del cual se considera el movimiento.

Como se deduce de (3.1) o (3.2), el tiempo propio de un objeto en movimiento es siempre menor que el correspondiente intervalo en el sistema en reposo. Con otras palabras, un reloj en movimiento atrasa respecto de un reloj en reposo.

Supongamos que un reloj se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme respecto de un sistema inercial K. Un sistema de referencia K' vinculado a aquél es

también un sistema inercial. En estas condiciones, un reloj del sistema K' atrasa desde el punto de vista de un observador en el sistema K. Recíprocamente, un reloj del sistema K atrasa desde el punto de vista del sistema K'. Para convencerse de que no existe en ello ninguna contradicción, basta tener en cuenta lo que sigue. Para establecer que un reloj del sistema K' atrasa respecto de los relojes del sistema K, hay que proceder de la siguiente manera. Supongamos que en un cierto instante un reloj en K' pasa por delante de un reloj en K y que en aquel instante las indicaciones de los dos relojes coinciden. Para comparar las marchas de los dos relojes en K y en K', hemos de comparar de nuevo las indicaciones del mismo reloj en movimiento con las de un reloj en K. Pero ahora comparamos dicho reloj con otro reloj en K — aquel por delante del cual pasa K' en el otro instante. Se encuentra entonces que el reloj de K' atrasa respecto del reloj de K con el que se le compara. Vemos, pues, que para comparar las marchas de relojes en dos sistemas de referencia son necesarios varios relojes en uno de ellos y uno en el otro. Por lo tanto, este proceso no es simétrico respecto de los dos sistemas. El reloj que atrasa es siempre el reloj que se compara con diferentes relojes del otro sistema.

Si tenemos dos relojes, uno de los cuales describe una trayectoria cerrada que vuelve al punto de partida (la posición del reloj que ha permanecido en reposo), atrasa precisamente el reloj que se mueve (respecto del reloj en reposo). El razonamiento recíproco, en el que se consideraría en reposo al reloj en movimiento (y viceversa) es ahora imposible, puesto que el reloj que describe la trayectoria cerrada no lo hace con movimiento rectilíneo y uniforme, de modo que un sistema de coordenadas ligado a él no será inercial.

Dado que las leyes de la naturaleza son las mismas tan sólo para los sistemas de referencia inerciales, los sistemas de coordenadas vinculados al reloj en reposo (sistema inercial) y al reloj en movimiento (no inercial) tienen propiedades diferentes, y carece de validez el razonamiento que conduce al resultado de que el reloj en reposo deba atrasar.

El intervalo de tiempo que indica un reloj es igual a la integral $\frac{1}{c}\int_a^b ds$ calculada a lo largo de la línea de universo del mismo. Si el reloj está en reposo, su línea de universo es, evidentemente, una recta paralela al eje t; si el reloj está animado de un movimiento no uniforme a lo largo de una trayectoria cerrada y vuelve a su punto de partida, su línea de universo será una curva que pasa por los dos puntos situados sobre la línea de universo recta de un reloj en reposo que corresponden al principio y final del movimiento. Por otra parte, vimos que un reloj en reposo indica siempre un intervalo de tiempo mayor que un reloj en movimiento. Llegamos así a la consecuencia de que la integral $\int_a^b ds$ entre dos puntos de universo al-

canza su valor máximo cuando se calcula a lo largo de la recta que une esto dos puntos †.

§ 4. La transformación de Lorentz

Se trata ahora de obtener las fórmulas de transformación que permitan pasar de un sistema de referencia inercial a otro, es decir, fórmulas mediante las cuales dadas las coordenadas x, y, z, t, de un cierto suceso en el sistema K, se puedan encontrar las coordenadas x', y', z', t' del mismo suceso en otro sistema inercial K'.

En mecánica clásica esta cuestión se resuelve de una manera muy simple. Dada la naturaleza absoluta del tiempo, tenemos en este caso $t = t'$; si, además, se eligen los ejes de coordenadas como de ordinario (ejes X, X', coincidentes; Y, Z paralelos a Y', Z'; movimiento a lo largo de X, X'), las coordenadas y, z son iguales, evidentemente, a y', z', mientras que las coordenadas x y x' difieren en la distancia recorrida por uno de los sistemas con relación al otro; si se elige como origen de tiempo el instante en que coinciden los dos sistemas de coordenadas, y si la velocidad de K' respecto de K es V, dicha distancia es igual a Vt. Por consiguiente,

$$x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \tag{4.1}$$

Estas fórmulas se llaman *transformación de Galileo*. Es fácil comprobar que esta transformación, como era de esperar, no cumple las condiciones de la teoría de la relatividad, no deja invariantes los intervalos entre sucesos.

Las fórmulas de transformación relativistas las obtendremos, en cambio, precisamente partiendo de la condición de que dejen invariantes dichos intervalos.

Como vimos en el § 2, el intervalo entre dos sucesos se puede considerar como distancia entre los dos puntos de universo correspondientes en el sistema de coordenadas cuadrimensional.

En consecuencia, podemos decir que la transformación buscada debe conservar todas las distancias en el espacio de cuatro dimensiones x, y, z, ct. Pero estas transformaciones pueden ser sólo traslaciones o rotaciones del sistema de coordenadas. De éstas, las traslaciones del sistema de coordenadas carecen de interés, puesto que equivalen tan sólo a un corrimiento del origen de coordenadas espaciales y a un cambio en el origen del tiempo. Por consiguiente, la transformación que buscamos debe poderse expresar matemáticamente como una rotación del sistema de coordenadas cuadridimensional x, y, z, t.

Toda rotación en el espacio de cuatro dimensiones se puede descomponer en seis rotaciones en los planos xy, zy, xz, tx, ty, tz (de la misma manera que toda

† Se supone, claro está, que los puntos a y b y las líneas que los unen son tales que todos los elementos ds a lo largo de las mismas son temporales.

Esta propiedad de la integral está ligada con el carácter pseudoeuclídeo de la geometría cuadridimensional. En el espacio euclídeo la integral, claro está, sería mínima a lo largo de la recta.

rotación en el espacio ordinario se puede descomponer en tres rotaciones en los planos xy, zy, y xz). De estas rotaciones, las tres primeras transforman únicamente coordenadas de espacio y corresponden a las rotaciones espaciales ordinarias.

Consideremos una rotación en el plano tx; por efecto de la misma, las coordenadas y y z no cambian. Si ψ es el ángulo de rotación, la relación entre las coordenadas antiguas y nuevas se determina por la fórmula

$$x = x' \cosh \psi + ct' \operatorname{senh} \psi, \quad ct = x' \operatorname{senh} \psi + ct' \cosh \psi, \tag{4.2}$$

donde ψ es el « ángulo de giro »; es fácil comprobar que, en efecto, se tendrá $c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$. Las fórmulas (4.2) difieren de las fórmulas ordinarias de transformación correspondientes a las rotaciones de los ejes de coordenadas en la substitución de las funciones trigonométricas por funciones hiperbólicas. En esto se manifiesta la diferencia entre la geometría pseudoeuclídea y la euclídea.

Veamos cuál es la fórmula de transformación que permite pasar de un sistema de referencia inercial K a un sistema K' que se mueve respecto de K con velocidad V a lo largo del eje X. En este caso, claro está, sólo varían la coordenada x y el tiempo t. Esta transformación, por lo tanto, debe ser de la forma (4.2). Falta determinar el ángulo ψ, que puede depender únicamente de la velocidad relativa V†.

Consideremos el movimiento, en el sistema K, del origen de coordenadas del sistema K'. En estas condiciones $x' = 0$ y las fórmulas (4.2) toman la forma:

$$x = ct' \operatorname{senh} \psi, \quad ct = ct' \cosh \psi,$$

o, dividiendo la una por la otra,

$$\frac{x}{ct} = \operatorname{tgh} \psi \ .$$

Pero x/t es, evidentemente, la velocidad V de K' respecto de K. Por consiguiente,

$$\operatorname{tgh} \psi = \frac{V}{c}.$$

De aquí se deduce,

$$\operatorname{senh} \psi = \frac{\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad \cosh \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}.$$

† Para evitar confusiones advertimos que se utilizará siempre V para designar la velocidad relativa constante de dos sistemas inerciales y v para representar la velocidad de una partícula en movimiento, velocidad no necesariamente constante.

Substituyendo en (4.2) resulta:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$y = y', \quad z = z', \tag{4.3}$$

$$t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Éstas son las fórmulas de transformación buscadas. Se llaman fórmulas de *transformación de Lorentz* y son de fundamental importancia para lo que sigue.

La manera más fácil de obtener las fórmulas que expresan x', y', z', t' en función de x, y, z, t consiste en cambiar V en $-V$ (dado que el sistema K se mueve con velocidad $-V$ respecto del sistema K'). Las mismas fórmulas se pueden obtener directamente despejando x', y', z', t' en las ecuaciones (4.3).

Es fácil ver partiendo de (4.3) que al pasar al límite $c \to \infty$ de la mecánica clásica, las fórmulas de transformación de Lorentz se reducen, en efecto, a la transformación de Galileo.

Para $V > c$ en (4.3), las coordenadas x, t se hacen imaginarias, lo que corresponde al hecho de que es imposible un movimiento con velocidad mayor que la velocidad de la luz. No es posible ni aun utilizar un sistema de referencia que se mueva con velocidad igual a la de la luz, puesto que, en este caso, se anularían los denominadores que aparecen en (4.3).

Para velocidades V pequeñas respecto de la velocidad de la luz se pueden utilizar, en vez de (4.3), las fórmulas aproximadas

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' + \frac{V}{c^2}x'. \tag{4.4}$$

Supongamos que una regla se encuentra en reposo en el sistema K, paralela a su eje X. Sea $\Delta x = x_2 - x_1$ su longitud medida en este sistema (x_2 y x_1 son las coordenadas de los dos extremos de la regla en el sistema K). Determinemos ahora la longitud de esta regla medida desde el sistema K'. Para ello debemos determinar

las coordenadas de los dos extremos de la regla (x'_2 y x'_1) en este sistema en un mismo instante t'. De (4.3) se deduce,

$$x_1 = \frac{x'_1 + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = \frac{x'_2 + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

La longitud de la regla en el sistema K' es $\Delta x' = x'_2 - x'_1$; restando x_1 de x_2, se obtiene:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

La « longitud propia » de una regla es, por definición, su longitud en un sistema de referencia en el que se encuentra en reposo. Sea $l_0 = \Delta x$ esta longitud y sea l la longitud de la regla en otro sistema de referencia cualquiera K'. En estas condiciones,

$$l = l_0 \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}. \tag{4.5}$$

Por consiguiente, la longitud de una regla alcanza su valor máximo en el sistema de referencia en que se encuentra en reposo. Su longitud en un sistema respecto del que se mueve con velocidad V resulta reducida por el factor $\sqrt{1-V^2/c^2}$. Este resultado de la teoría de la relatividad es la llamada *contracción de Lorentz.*

Dado que las dimensiones transversales de un cuerpo no se ven alteradas como consecuencia del movimiento, el volumen $\mathcal{V}$ de un cuerpo se contrae de acuerdo con una fórmula análoga,

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}, \tag{4.6}$$

en la que $\mathcal{V}_0$ es el « volumen propio » del cuerpo.

La transformación de Lorentz nos permite obtener de nuevo los resultados ya conocidos acerca del tiempo propio (§ 3). Supongamos que un reloj se encuentra en reposo en el sistema K'. Consideremos dos sucesos que ocurren en un mismo punto x', y', z' del espacio con relación a K'. Sea $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ el tiempo trans-

currido entre estos dos sucesos en el sistema K'. Determinemos el tiempo Δt que transcurre entre ellos en el sistema de referencia K. De (4.3) se deduce:

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad t_2 = \frac{t_2' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

es decir, restando,

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

de completo acuerdo con (3.1).

Finalmente, he aquí otra propiedad general de las transformaciones de Lorentz que las distingue de las transformaciones de Galileo. Estas últimas gozan de la propiedad general de ser conmutables, esto es, el resultado de dos transformaciones de Galileo sucesivas (con diferentes velocidades $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$) no depende del orden en que se apliquen las transformaciones. Por el contrario, el resultado de dos transformaciones sucesivas de Lorentz depende, en general, de su orden. Este resultado es ya evidente desde un punto de vista matemático puro en virtud de la descripción formal de estas transformaciones como rotaciones del sistema de coordenadas de cuatro dimensiones: como es sabido, el resultado de dos rotaciones (en torno de ejes distintos) depende del orden en que se aplican. La única excepción es el caso de transformaciones con vectores $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ paralelos (que equivalen a rotaciones del sistema de coordenadas cuatridimensional en torno de un mismo eje).

§ 5. Transformación de la velocidad

En la sección que precede hemos obtenido fórmulas que permiten determinar las coordenadas de un suceso en un sistema de referencia a partir de las coordenadas del mismo suceso en un primer sistema de referencia. Determinemos ahora las fórmulas que ligan la velocidad de una partícula material en un sistema de referencia con la velocidad de la misma partícula en un segundo sistema.

Supongamos de nuevo que el sistema K' se mueve con relación al sistema K con velocidad V a lo largo del eje X. Sea $v_x = dx/dt$ la componente x de la velocidad de la partícula en el sistema K y $v_x' = dx'/dt'$ la correspondiente componente de la velocidad de la misma partícula en el sistema K'. De (4.3) se deduce:

$$dx = \frac{dx' + V\,dt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad dy = dy', \qquad dz = dz', \qquad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Dividiendo las tres primeras ecuaciones por la cuarta e introduciendo las velocidades, se encuentra:

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad \mathbf{V}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}$$

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \tag{5.1}$$

Estas fórmulas determinan la transformación de velocidades y representan su ley de composición en la teoría de la relatividad. En el caso límite $c \to \infty$, se transforman en las fórmulas $v_x = v'_x + V$, $v_y = v'_y$, $v_z = v_z'$ de la mecánica clásica.

En particular, si una partícula se mueve paralelamente al eje X, será $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$. Se tendrá entonces $v'_y = v'_z = 0$, $v'_x = v'$, de forma que

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}. \tag{5.2}$$

Es fácil cerciorarse de que, según esta fórmula, la suma de dos velocidades, menores o iguales que la velocidad de la luz, es a su vez no mayor que la velocidad de la luz.

Para una velocidad V considerablemente menor que la velocidad de la luz (la velocidad v puede ser cualquiera) se tiene, aproximadamente, hasta el primer orden en V/c:

$$v_x = v'_x + V\left(1 - \frac{v'^2_x}{c^2}\right), \quad v_y = v'_y - v'_x v'_y \frac{V}{c^2}, \quad v_z = v'_z - v'_x v'_z \frac{V}{c^2}.$$

Estas tres fórmulas se pueden resumir en una sola fórmula vectorial.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}')\mathbf{v}' \tag{5.3}$$

Conviene señalar que en la ley relativista de adición de velocidades (5.1) las dos velocidades $\mathbf{v}'$ y $\mathbf{V}$ que se componen intervienen de manera no simétrica (con tal

que no estén ambas dirigidas a lo largo del eje X). Este hecho está ligado al carácter no conmutativo de las transformaciones de Lorentz de que se habló en el último párrafo.

Elijamos los ejes de coordenadas de forma que la velocidad de la partícula en un instante dado se encuentre en el plano XY. La velocidad de la partícula en el sistema K tiene entonces por componentes $v_x = v\cos\theta$, $v_y = v\,\mathrm{sen}\,\theta$ y en el sistema K' $v'_x = v'\cos\theta'$, $v'_y = v'\,\mathrm{sen}\,\theta'$ (v, v', θ, θ' son los módulos de la velocidad y los ángulos formados con los ejes X, X', respectivamente, en los sistemas K y K'). Mediante la fórmula (5.1) se encuentra que

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{v'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,\mathrm{sen}\,\theta'}{v'\cos\theta' + V}. \tag{5.4}$$

Esta fórmula determina el cambio en la dirección de la velocidad al pasar de un sistema de referencia al otro.

Consideremos ahora más detenidamente un caso particular, muy importante, de esta fórmula, a saber, la desviación de la luz al pasar a un nuevo sistema de referencia — fenómeno conocido por *aberración* de la luz. En este caso $v = v' = c$, de modo que la fórmula anterior se transforma en

$$\mathrm{tg}\;\theta = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\frac{V}{c} + \cos\theta'}\,\mathrm{sen}\,\theta'. \tag{5.5}$$

Es fácil obtener de las mismas fórmulas de transformación (5.1) los valores de $\mathrm{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$:

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'}\,\mathrm{sen}\,\theta', \qquad \cos\theta = \frac{\cos\theta' + \frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'}. \tag{5.6}$$

Cuando $V \ll c$, de esta fórmula se deduce:

$$\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}\,\theta' = -\frac{V}{c}\,\mathrm{sen}\,\theta'\cos\theta'.$$

salvo términos de orden superior en V/c.

Si se introduce el ángulo $\Delta\theta = \theta' - \theta$ (ángulo de aberración), se encuentra, dentro del mismo orden de aproximación,

$$\Delta\theta = \frac{V}{c}\operatorname{sen}\theta', \tag{5.7}$$

que es la conocida fórmula elemental de la aberración de la luz.

§ 6. Cuadrivectores

El conjunto de las cuatro coordenadas de un suceso (ct, x, y, z) se puede considerar como componentes de un vector posición en cuatro dimensiones (o, como diremos para abreviar, un cuadrivector posición) en el espacio cuadrimensional. Designaremos sus componentes por x^i, donde el superíndice i toma los valores 0, 1, 2, 3, siendo

$$x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z.$$

El cuadrado de la « longitud » del cuadrivector posición viene dado por la expresión

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Su valor no cambia al aplicar una rotación cualquiera al sistema de coordenadas en cuatro dimensiones, como son, en particular, las transformaciones de Lorentz.

En general, se llamará vector *cuadridimensional* (o cuadrivector) a un conjunto de cuatro cantidades A^i que en las transformaciones del sistema cuadridimensional de coordenadas se transforman como las componentes del cuadrivector posición x^i. En una transformación de Lorentz

$$A^0 = \frac{A'^0 - \frac{V}{c}A'^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^1 = \frac{A'^1 - \frac{V}{c}A'^0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^2 = A'^2,\ A^3 = A'^3. \tag{6.1}$$

El cuadrado del módulo de un cuadrivector se define de manera análoga al cuadrado del cuadrivector posición:

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2.$$

Por comodidad en la escritura de expresiones semejantes se introducen dos « especies » de componentes de los cuadrivectores, designándolas por las letras A^i y A_i, con superíndices y subíndices. La correspondencia entre ellas es

$$A_0 = A^0,\ A_1 = -A^1,\ A_2 = -A^2,\ A_3 = -A^3 \tag{6.2}$$

Las cantidades A^i se llaman componentes *contravariantes*, y las A_i componentes *covariantes* del cuadrivector. El cuadrado de un cuadrivector se representa entonces en la forma

$$\sum_{i=0}^{3} A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3.$$

Tales sumas se suelen escribir simplemente en la notación $A^i A_i$, prescindiendo del signo de suma. De manera general, se adopta la regla según la cual para todo índice que en una expresión dada se repite dos veces se sobreentiende la suma respecto del mismo, prescindiendo de escribir el signo de suma. En cada par de índices iguales uno debe ser un superíndice, y el otro, un subíndice. Esta manera de representar las sumas mediante los que se suelen llamar índices *mudos* es muy cómoda y simplifica considerablemente la escritura de las fórmulas.

En este libro designaremos los índices cuadridimensionales, que toman los valores 0, 1, 2, 3, mediante caracteres latinos i, k, l, ...

De manera análoga a como se representa el cuadrado de un cuadrivector se representa el producto escalar de dos cuadrivectores diferentes:

$$A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3$$

Es evidente que este producto se puede escribir tanto en la forma $A^i B_i$ como en la forma $A_i B^i$, sin que varíe el resultado. De manera general, en cada par de índices mudos es siempre posible permutar entre sí los superíndices y los subíndices †).

El producto $A^i B_i$ es un cuadriescalar, es decir, es invariante respecto de las rotaciones del sistema de coordenadas cuadridimensional. Que así es se comprueba fácilmente de manera inmediata ††), pero es ya evidente a priori (por analogía

† En la literatura contemporánea, frecuentemente se prescinde por completo de los índices en los vectores cuadridimensionales, y sus cuadrados y productos escalares se escriben simplemente en la forma A^2, AB. En este libro, sin embargo, no adoptaremos este sistema de notaciones.

†† En relación con esto hay que recordar que la regla de transformación de un cuadrivector, expresada en función de las componentes covariantes, difiere (en los signos) de la misma ley expresada en componentes contravariantes. Así, en vez de (6.1) tendremos, evidentemente:

$$A_0 = \frac{A'_0 - \frac{V}{c} A'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},\quad A_1 = \frac{A'_1 - \frac{V}{c} A'_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},\quad A_2 = A'_2,\quad A_3 = A'_3.$$

con el cuadrado A^iA_i) por el hecho de que todos los cuadrivectores se transforman de acuerdo con la misma ley.

La componente A^0 de un cuadrivector se califica de temporal, y las componentes A^1, A^2, A^3, de espaciales (por analogía con el cuadrivector posición). El cuadrado de un cuadrivector puede ser positivo, negativo o igual a cero; en estos tres casos se habla, respectivamente, de cuadrivectores *temporales*, *espaciales* y *nulos* (de nuevo por analogía con los términos utilizados en el caso de los intervalos).

Con relación a los giros puramente espaciales (es decir, a las transformaciones que no alteran el eje del tiempo) las tres componentes espaciales de un cuadrivector A^i constituyen un vector tridimensional **A**. En cambio, la componente temporal de un cuadrivector constituye (en relación con las mismas transformaciones) un escalar de tres dimensiones. Al enumerar las componentes de un cuadrivector, las escribiremos frecuentemente en la forma

$$A^i \sim (A^0, \mathbf{A}).$$

En estas condiciones, las componentes covariantes del mismo cuadrivector son $A_i = (A^0, -\mathbf{A})$, y el cuadrado del cuadrivector se escribe $A^iA_i = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2$. Así, para el cuadrivector posición se tiene

$$x^i = (ct, \mathbf{r}), \quad x_i = (ct, -\mathbf{r}), \quad x^ix_i = c^2t^2 - \mathbf{r}^2.$$

En el caso de los vectores tridimensionales (en las coordenadas x, y, z) no es necesario, naturalmente, distinguir entre componentes contravariantes y covariantes. Siempre que ello no pueda conducir a confusiones escribiremos sus componentes en la forma $A_\alpha (\alpha = x, y, z)$ con subíndices, designándolos por caracteres griegos. En particular, cuando un índice griego se repita dos veces se sobreentenderá la suma respecto de los tres valores x, y, z (por ejemplo, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_\alpha B_\alpha$).

Se llama tensor cuadridimensional (cuadritensor) de segundo orden el conjunto de 16 cantidades A^{ik} que en las transformaciones de coordenadas se transforman como productos de las componentes de dos cuadrivectores. De manera análoga se definen también los cuadritensores de órdenes superiores.

Las componentes de un cuadritensor de segundo orden pueden representarse de tres maneras: como contravariantes A^{ik}, covariantes A_{ik} y mixtas $A^i{}_k$ (en el último caso hay que distinguir, hablando en general, entre $A^i{}_k$ y $A_i{}^k$, es decir, poner de manifiesto cuál es precisamente el índice — sea el primero, sea el segundo — que permanece arriba y cuál el que permanece abajo). La relación entre los diferentes tipos de componentes se determina mediante la siguiente regla general: el subir o bajar el índice temporal (0) no cambia el signo de la componente, pero el subir o bajar un índice espacial (1, 2, 3) cambia dicho signo. Así

$$A_{00} = A^{00}, \quad A_{01} = -A^{01}, \quad A_{11} = A^{11}, \quad \ldots,$$
$$A_0{}^0 = A^{00}, \quad A_0{}^1 = A^{01}, \quad A^0{}_1 = -A^{01}, \quad A_1{}^1 = -A^{11}, \quad \ldots$$

Respecto de las transformaciones puramente espaciales, las diez componentes A^{11}, A^{12}, ... constituyen un tensor tridimensional. Las tres componentes A^{01}, A^{02}, A^{03} y las tres componentes A^{10}, A^{20}, A^{30} forman vectores de tres dimensiones y la componente A^{00} es un escalar tridimensional.

El tensor A^{ik} se califica de simétrico si $A^{ik} = A^{ki}$ y de antisimétrico si $A^{ik} = -A^{ki}$. En el caso de un tensor antisimétrico todas las componentes diagonales (esto es, las componentes A^{00}, A^{11}, ...) son nulas puesto que, por ejemplo, debe ser $A^{00} = -A^{00}$. Las componentes mixtas $A^i{}_k$ y $A_k{}^i$ de un tensor simétrico A^{ik} coinciden, evidentemente; en tales casos escribiremos simplemente A^i_k, colocando los índices uno sobre el otro.

En toda igualdad tensorial las expresiones en uno y otro miembro deben contener los mismos índices libres, es decir, no mudos, y colocados en las mismas posiciones (o arriba o abajo). Los índices libres en las igualdades tensoriales pueden desplazarse (hacia arriba o hacia abajo), pero necesariamente a la vez en ambos miembros de la ecuación. La igualación de componentes contravariantes y covariantes de tensores diferentes, en cambio, es « ilícita »: dicha igualdad, incluso si por azar se cumpliera en determinado sistema de coordenadas, dejaría de valer al pasar a otro sistema.

A partir de las componentes del tensor A^{ik} se puede formar un escalar construyendo la suma

$$A^i{}_i = A^0{}_0 + A^1{}_1 + A^2{}_2 + A^3{}_3$$

(en la cual, naturalmente, $A^i{}_i = A_i{}^i$). Esta suma se llama *traza* del tensor y la operación que permite formarla es la llamada *contracción* del tensor.

Una operación de contracción lo es precisamente la formación del producto escalar de dos cuadrivectores que hemos considerado más arriba: consiste en formar el escalar A^iB_i a partir del tensor A^iB_k. De manera general, la contracción respecto de un par de índices disminuye el orden del tensor en dos unidades. Por ejemplo, $A^i{}_{kli}$ es un tensor de segundo orden, $A^i{}_kB^k$, un cuadrivector, $A^{ik}{}_{ik}$, un escalar, etc.

Se llama cuadritensor unidad el tensor δ^i_k para el que vale la igualdad

$$\delta^k_i \, A^i = A^k \tag{6.3}$$

cualquiera que sea el cuadrivector A^i. Es evidente que las componentes de este tensor son iguales a

$$\delta^k_i = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad i = k, \\ 0, & \text{si} \quad i \neq k. \end{cases} \tag{6.4}$$

Su traza es: $\delta^i_i = 4$.

Subiendo uno de los índices del tensor δ_i^k o bajando el otro, obtenemos un tensor contravariante o covariante que designaremos por g^{ik} o g_{ik} y al que llamaremos *tensor métrico*. Los tensores g^{ik} y g_{ik} tienen las mismas componentes, que se pueden representar en forma de tabla:

$$(g^{ik}) = (g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

(el índice i numera las filas, y el índice k, las columnas en el orden de valores 0, 1, 2, 3). Es evidente que

$$g_{ik} A^k = A_i, \quad g^{ik} A_k = A^i \tag{6.6}$$

El producto escalar de dos cuadrivectores puede, por ello, escribirse en la forma

$$A^i A_i = g_{ik} A^i A^k = g^{ik} A_i A_k. \tag{6.7}$$

Los tensores δ_k^i, g_{ik}, g^{ik} son excepcionales en el sentido de que sus componentes son las mismas en todos los sistemas de coordenadas. Igual propiedad posee también el cuadritensor unidad totalmente antisimétrico de cuarto orden e^{iklm}. Se llama así el tensor cuyas componentes cambian de signo al permutar dos índices cualesquiera, siendo iguales a ± 1 las componentes diferentes de cero. De su carácter antisimétrico se sigue que todas las componentes de este tensor en las que dos índices por lo menos coinciden son nulas, de modo que únicamente son diferentes de cero aquellas componentes en las que los cuatro índices son diferentes. Hagamos

$$e^{0123} = +1 \tag{6.8}$$

(con lo cual $e_{0123} = -1$). Entonces todas las componentes e^{iklm} no nulas son iguales a $+1$ o a -1 según sea par o impar el número de transposiciones que lleven la sucesión de números i, k, l, m a coincidir con la sucesión 0, 1, 2, 3. El número de tales componentes es igual a $4! = 24$. Por consiguiente,

$$e^{iklm} e_{iklm} = -24 \tag{6.9}$$

Respecto de las rotaciones del sistema de coordenadas las cantidades e^{iklm} se comportan como componentes de un tensor; sin embargo, si se cambia el signo de una o de tres coordenadas, las componentes e^{iklm}, que se definen de la misma manera en todos los sistemas de coordenadas, no cambian, mientras que las componentes de un tensor deben cambiar de signo. Por consiguiente, e^{iklm} no es, hablando propiamente, un tensor, sino un pseudotensor. Los *pseudotensores* de cualquier orden, en particular los *pseudoescalares*, se comportan como tensores en todas las transformaciones de coordenadas, salvo respecto de aquellas que no se

pueden reducir a rotaciones, es decir, excluidas las reflexiones — esto es, los cambios de signo de las coordenadas que no se pueden reducir a giros.

Los productos $e^{iklm}e^{prst}$ forman un cuadritensor de octavo orden, pero esta vez un tensor en sentido estricto; la contracción respecto de uno o más de un par de índices del mismo permite obtener tensores de 6.°, 4.° y 2.° órdenes. Todos estos tensores tienen la misma forma en cualquier sistema de coordenadas. En consecuencia, sus componentes deben expresarse como combinaciones de productos de las componentes del tensor unidad δ^i_k, que es el único tensor en sentido estricto cuyas componentes son las mismas en todos los sistemas de coordenadas. Es fácil formar estas combinaciones a partir de las propiedades de simetría que deben poseer respecto de las permutaciones de índices †.

Si A^{ik} es un tensor antisimétrico, el tensor A^{ik} y el pseudotensor $A^{*\,ik} = \frac{1}{2}\, e^{iklm} A_{lm}$ se califican de *duales* entre sí. Análogamente, $e^{iklm} A_m$ es un pseudotensor antisimétrico de tercer orden, dual del vector A^i. El producto $A^{ik} A^*_{ik}$ de dos tensores duales es, evidentemente, un pseudoescalar.

En relación con lo dicho recordaremos algunas propiedades análogas de los vectores y tensores en tres dimensiones. Se llama pseudotensor unidad totalmente antisimétrico de tercer orden al conjunto de cantidades $e_{\alpha\beta\gamma}$ que cambian de signo al permutar dos índices cualesquiera. Son diferentes de cero tan sólo las componentes $e_{\alpha\beta\gamma}$ con tres índices distintos. Si hacemos $e_{xyz} = 1$, las restantes componentes serán iguales a $+1$ o a -1 según sea par o impar el número de transposiciones que pueden llevar de la sucesión $\alpha\beta\gamma$ a la sucesión x, y, z ††.

---

† He aquí las correspondientes fórmulas:

$$e^{iklm}\, e_{prst} = -\begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s & \delta^i_t \\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s & \delta^k_t \\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s & \delta^l_t \\ \delta^m_p & \delta^m_r & \delta^m_s & \delta^m_t \end{vmatrix}, \qquad e^{iklm}\, e_{prsm} = -\begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s \\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s \\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s \end{vmatrix},$$

$$e^{iklm}\, e_{prlm} = -2\left(\delta^i_p\, \delta^k_r - \delta^i_r\, \delta^k_p\right), \quad e^{iklm}\, e_{pklm} = -6\, \delta^i_p.$$

Los valores de los coeficientes comunes en estas fórmulas se comprueban mediante el resultado de la contracción total, contracción que debe dar (6.9).

Como consecuencia de la primera de estas fórmulas tenemos:

$$e^{prst}\, A_{ip}\, A_{kr}\, A_{ls}\, A_{mt} = -A e_{iklm},$$
$$e^{iklm}\, e^{prst}\, A_{ip}\, A_{kr}\, A_{ls}\, A_{mt} = 24\, A,$$

donde A es el determinante formado con las componentes A_{ik}.

†† El carácter invariante de las componentes del cuadritensor e^{iklm} respecto de las rotaciones del cuadrisistema de coordenadas y el mismo carácter de las componentes del tritensor $e_{\alpha\beta\gamma}$ respecto de las rotaciones de los ejes de coordenadas espaciales, son casos particulares de una regla general: todo tensor totalmente antisimétrico de orden igual al número de dimensiones del espacio en el que ha sido definido es invariante respecto de las rotaciones de los sistemas de coordenadas en este espacio.

Los productos $e_{\alpha\beta\gamma}\, e_{\lambda\mu\nu}$ constituyen un tensor tridimensional en sentido estricto de 6.° orden y, por ello, se expresan en forma de combinaciones de productos de las componentes del tensor tridimensional unidad $\delta_{\alpha\beta}$ †).

En una reflexión del sistema de coordenadas, es decir, al cambiar el signo de las tres coordenadas, las componentes de un vector tridimensional ordinario cambian también de signo. Tales vectores se califican de *polares*. En cambio, las componentes de un vector que se pueden representar como producto vectorial de dos vectores polares no cambian de signo en una reflexión. Tales vectores se llaman vectores *axiles*. El producto escalar de dos vectores, uno polar y el otro axil, no es un escalar en sentido estricto, sino un pseudoescalar: cambia de signo en la reflexión de las coordenadas. El producto vectorial es un pseudovector, dual de un tensor antisimétrico. En efecto, si $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, se tiene

$$C_\alpha = \tfrac{1}{2}\, e_{\alpha\beta\gamma}\, C_{\beta\gamma}, \quad \text{donde} \quad C_{\beta\gamma} = A_\beta\, B_\gamma - A_\gamma\, B_\beta.$$

Volvamos a los cuadritensores. Las componentes espaciales ($i, k, \ldots = 1, 2, 3$) de un cuadritensor antisimétrico A^{ik} constituyen, respecto de las transformaciones puramente espaciales, un tensor antisimétrico tridimensional; de acuerdo con lo dicho antes, sus componentes se expresan en función de las componentes de un vector axil en tres dimensiones. En cambio, las componentes A^{01}, A^{02}, A^{03} forman, con relación a las mismas transformaciones, un vector tridimensional polar. De esta manera, las componentes de un cuadritensor antisimétrico se pueden representar en forma de tabla:

$$(A^{ik}) = \begin{vmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & a_y & a_x & 0 \end{vmatrix} \tag{6.10}$$

---

† He aquí las correspondientes fórmulas:

$$e_{\alpha\beta\gamma}\, e_{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix}.$$

Contrayendo este tensor respecto de uno, dos o tres pares de índices, obtendremos:

$$e_{\alpha\beta\gamma}\, e_{\lambda\mu\gamma} = \delta_{\alpha\lambda}\, \delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu}\, \delta_{\beta\lambda},$$
$$e_{\alpha\beta\gamma}\, e_{\lambda\beta\gamma} = 2\, \delta_{\alpha\lambda}, \quad e_{\alpha\beta\gamma}\, e_{\alpha\beta\gamma} = 6.$$

en la que respecto de las transformaciones espaciales **p** y **a** son vectores, polar el uno, y axil el otro. Al enumerar las componentes de un cuadritensor antisimétrico, las escribiremos en la forma

$$A^{ik} = (\mathbf{p}, \mathbf{a});$$

las componentes covariantes de este mismo tensor serán entonces

$$A_{ik} = (-\mathbf{p}, \mathbf{a}).$$

Consideremos, finalmente, algunas operaciones diferenciales e integrales del análisis tensorial en cuatro dimensiones.

El cuadrigradiente de un escalar φ es el cuadrivector

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \nabla \varphi \right).$$

En relación con él es necesario tener en cuenta que las derivadas deben considerarse como componentes covariantes de un cuadrivector. En efecto, la diferencial de un escalar

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx^i$$

es también un escalar; teniendo en cuenta su forma (producto escalar de dos cuadrivectores), resulta precisamente lo que acabamos de afirmar.

De una manera general hay que considerar los operadores $\partial/\partial x^i$ de derivación respecto de las coordenadas x^i como componentes covariantes de un operador cuadrivectorial. En consecuencia, por ejemplo, resulta ser un escalar la divergencia de un cuadrivector, es decir, la expresión $\partial A^i/\partial x^i$, en la que se derivan las componentes contravariantes A^i †.

† En cambio, si se deriva respecto de las «coordenadas covariantes» x_i, las derivadas

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad -\nabla \varphi \right)$$

constituyen las componentes contravariantes de un cuadrivector. Utilizaremos esta notación únicamente en casos excepcionales (por ejemplo, para escribir el cuadrado de un cuadrigradiente $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$).

Recordaremos que en la literatura se utiliza a menudo una notación abreviada de las derivadas parciales respecto de las coordenadas mediante los símbolos

$$\partial^i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

En este tipo de notación de los operadores de derivación se pone de relieve de manera explícita el carácter contravariante o covariante de las magnitudes construidas con su ayuda.

En el espacio tridimensional la integración se puede efectuar en un volumen, sobre una superficie y a lo largo de una línea. En el espacio cuadridimensional son posibles, de manera análoga, cuatro tipos de integración.

1) La integral a lo largo de una curva del cuadriespacio. El elemento de integración es el elemento de línea, es decir, el cuadrivector dx^i.

2) La integración sobre una superficie (bidimensional) en el cuadriespacio. Como es sabido, en el espacio de tres dimensiones las áreas de las proyecciones de un paralelogramo construido a partir de dos vectores $d\mathbf{r}$ y $d\mathbf{r}'$ sobre los planos de coordenadas $x_\alpha x_\beta$ son iguales a $dx_\alpha\, dx'_\beta - dx_\beta\, dx'_\alpha$. Análogamente, en el cuadriespacio un elemento infinitamente pequeño de superficie se define por el tensor antisimétrico de segundo orden $df^{ik} = dx^i\, dx'^k - dx^k\, dx'^i$; sus componentes son iguales a las áreas de las proyecciones del elemento de superficie sobre los planos de coordenadas. Como es sabido, en el espacio tridimensional, en vez del tensor $df_{\alpha\beta}$ se utiliza como elemento de superficie el vector df_α, dual del tensor $df_{\alpha\beta}$: $df_\alpha = \frac{1}{2}\, e_{\alpha\beta\gamma}\, df_{\beta\gamma}$. Geométricamente, éste es un vector normal al elemento de superficie cuyo módulo es igual al área de dicho elemento. En el espacio cuadridimensional es imposible construir un tal vector, pero sí es posible construir el tensor df^{*ik} dual del tensor df^{ik}, es decir,

$$df^{*ik} = \tfrac{1}{2} e^{iklm}\, df_{lm}. \tag{6.11}$$

Geométricamente, representa un elemento de superficie igual y « normal » al elemento df^{ik}; todos los segmentos que se encuentran en él son ortogonales a todos los segmentos del elemento df^{ik}. Es evidente que $df^{ik}\, df^*_{ik} = 0$.

3) La integración sobre una hipersuperficie, es decir, sobre una variedad tridimensional. En el espacio de tres dimensiones el volumen de un paralelepípedo construido mediante tres vectores es igual, como es sabido, al determinante de tercer orden formado con las componentes de estos vectores. En el cuadriespacio se expresan de manera análoga las proyecciones del volumen del « paralelepípedo » (es decir, las « áreas » de hipersuperficie) definido por tres cuadrivectores dx^i, dx'^i, dx''^i; dichas proyecciones vienen dadas por los determinantes

$$dS^{ikl} = \begin{vmatrix} dx^i & dx'^i & dx''^i \\ dx^k & dx'^k & dx''^k \\ dx^l & dx'^l & dx''^l \end{vmatrix},$$

que constituyen un tensor de tercer orden antisimétrico respecto de los tres índices. Como elemento de integración sobre una hipersuperficie es conveniente utilizar el cuadrivector dS^i, dual del tensor dS^{ikl}:

$$dS^i = -\frac{1}{6}\, e^{iklm} dS_{klm}, \quad dS_{klm} = e_{nklm} dS^n \tag{6.12}$$

En particular se tiene:

$$dS^0 = dS^{123}, \quad dS^1 = dS^{023}, \quad \ldots$$

Geométricamente, dS^i es un cuadrivector cuyo módulo es igual al « área » del elemento de hipersuperficie y cuya dirección es normal a dicho elemento (es decir, perpendicular a todas las rectas trazadas en el elemento de hipersuperficie). En particular $dS^0 = dx\,dy\,dz$, es decir, representa el elemento de volumen tridimensional dV-proyección del elemento de hipersuperficie sobre el hiperplano $x^0 = \text{const}$.

4) La integral extendida a un volumen de cuatro dimensiones; el elemento de integración es el escalar

$$d\Omega = dx^0\,dx^1\,dx^2\,dx^3 = c\,dt\,dV \tag{6.13}$$

Teoremas análogos a los de Gauss y de Stokes del análisis vectorial en tres dimensiones permiten transformar entre sí las integrales cuadridimensionales.

La integral extendida a una hipersuperficie cerrada se puede transformar en una integral relativa al cuadrivolumen que encierra mediante la substitución del elemento de integración dS_i por el operador

$$dS_i \to d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{6.14}$$

Por ejemplo, para la integral de un vector A^i tenemos:

$$\oint A^i dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega. \tag{6.15}$$

Esta fórmula es una generalización del teorema de Gauss.

La integral extendida a una superficie de dos dimensiones se transforma en la integral extendida a una hipersuperficie que « delimita » mediante la substitución del elemento de integración df^*_{ik} por el operador

$$df^*_{ik} \to \left(dS_i \frac{\partial}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial}{\partial x^i}\right). \tag{6.16}$$

Por ejemplo, para la integral del tensor antisimétrico A^{ik} tenemos:

$$\tfrac{1}{2}\int A^{ik} df^*_{ik} = \tfrac{1}{2}\int \left(dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^i}\right) = \int dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k}. \tag{6.17}$$

La integral a lo largo de una línea cerrada en el espacio de cuatro dimensiones se transforma en una integral extendida a una superficie que delimita mediante la substitución:

$$dx^i \to df^{ki} \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{6.18}$$

Así, para la integral de un vector tenemos:

$$\oint A_i\,dx^i = \int df^{ki}\frac{\partial A_l}{\partial x^k} = \tfrac{1}{2}\int df^{ik}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right), \tag{6.19}$$

que constituye una generalización del teorema de Stokes.

Problemas

1. Hallar la ley de transformación de las componentes de un cuadritensor simétrico A^{ik} en la transformación de Lorentz (6.1).

Solución. Considerando las componentes del cuadritensor como producto de dos componentes de un cuadrivector, obtendremos:

$$A^{00} = \frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(A'^{00} + 2\frac{V}{c}A'^{01} + \frac{V^2}{c^2}A'^{11}\right),$$

$$A^{11} = \frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(A'^{11} + 2\frac{V}{c}A'^{01} + \frac{V^2}{c^2}A'^{00}\right),$$

$$A^{22} = A'^{22},\quad A^{23} = A'^{23},\quad A^{12} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(A'^{12} + \frac{V}{c}A'^{02}\right),$$

$$A^{01} = \frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left[A'^{01}\left(1+\frac{V^2}{c^2}\right) + \frac{V}{c}A'^{00} + \frac{V}{c}A'^{11}\right],$$

$$A^{02} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(A'^{02} + \frac{V}{c}A'^{12}\right)$$

y fórmulas análogas para A^{33}, A^{13}, A^{03}.

2. El mismo problema para un tensor antisimétrico A^{ik}.

Solución. Dado que las coordenadas x^2, x^3 no cambian, tampoco cambia la componente A^{23} del tensor, mientras que las componentes A^{12}, A^{13} y A^{02}, A^{03} se transforman como x^1 y x^0:

$$A^{23} = A'^{23},\quad A^{12} = \frac{A'^{12} + \frac{V}{c}A'^{02}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad A^{02} = \frac{A'^{02} + \frac{V}{c}A'^{12}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

y análogamente para A^{13}, A^{03}.

Respecto de las rotaciones de un sistema de coordenadas bidimensional en el plano x^0x^1 (como de hecho son las transformaciones consideradas), las componentes $A^{01} = -A^{10}$, $A^{00} = A^{11} = 0$ constituyen un tensor antisimétrico de orden igual al número de dimensiones del espacio. Por ello (cf. la nota en la pág. 25) en dichas transformaciones estas componentes no cambian:

$$A^{01} = A'^{01}$$

§ 7. Velocidad y aceleración cuadridimensionales

A partir del vector velocidad ordinario de tres dimensiones se puede formar un cuadrivector. Esta *velocidad cuadridimensional* (cuadrivelocidad) de una partícula es el vector

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}. \tag{7.1}$$

Para encontrar sus componentes observemos que, según (3.1),

$$ds = c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

donde v es la velocidad tridimensional ordinaria de la partícula. Por lo tanto,

$$u^1 = \frac{dx^1}{ds} = \frac{dx}{c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Análogamente se determinan u^2, u^3, u^0, resultando finalmente,

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{7.2}$$

Obsérvese que la cuadrivelocidad es una magnitud de dimensión nula.

Las componentes de la cuadrivelocidad no son independientes. Dado que $dx_i\,dx^i = ds^2$, se tiene:

$$u^i\,u_i = 1. \tag{7.3}$$

Podemos decir, por consiguiente, que, desde el punto de vista geométrico, u^i es un cuadrivector unitario tangente a la línea de universo de la partícula.

De manera análoga a como se ha definido la cuadrivelocidad, la derivada segunda

$$w^i = \frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{du^i}{ds}$$

puede llamarse *cuadriaceleración*. Derivando la fórmula (7.3) se encuentra

$$u^i w^i = 0 \tag{7.4}$$

es decir, los cuadrivectores velocidad y aceleración son « perpendiculares entre sí ».

PROBLEMA

Determinar el movimiento relativista uniformemente acelerado, es decir, el movimiento rectilíneo para el que la aceleración w_0 en el sistema de referencia propio (en cada instante) es constante.

Solución. Es fácil comprobar que en el sistema de referencia en el que la velocidad de la partícula es $v = 0$ las componentes de la cuadriaceleración son $0, w_0/c^2, 0, 0$ (donde w_0 es la aceleración tridimensional ordinaria, que se supone dirigida a lo largo del eje x). La condición, relativísticamente invariante, de aceleración uniforme se debe expresar mediante la constancia del escalar cuadridimensional que coincide con w_0 en el sistema de referencia propio:

$$w^i w_i = \text{const} \equiv -\frac{w_0^2}{c^4}.$$

En el sistema de referencia « fijo », respecto del cual se observa el movimiento, la expresión de $w^i w_i$ conduce a la ecuación

$$\frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = w_0, \text{ o bien } \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = w_0 t + \text{const.}$$

Haciendo $v = 0$ para $t = 0$, se encuentra que const $= 0$, de forma que

$$v = \frac{w_0 t}{\sqrt{1+\frac{w_0^2 t^2}{c^2}}}.$$

Integrando de nuevo y haciendo $x = 0$ para $t = 0$, encontramos que

$$x = \frac{c^2}{w_0}\left(\sqrt{1+\frac{w_0^2 t^2}{c^2}} - 1\right).$$

Para $w_0 t \ll c$, estas fórmulas se convierten en las expresiones clásicas $v = w_0 t$, $x = w_0 t^2/2$. Para $w_0 t \to \infty$, la velocidad tiende al valor constante c.

El tiempo propio de una partícula acelerada uniformemente viene dado por la integral

$$\int_0^t \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt = \frac{c}{w_0} \operatorname{arsenh}\left(\frac{w_0 t}{c}\right).$$

Cuando $t \to \infty$, aumenta mucho más lentamente que t, precisamente de acuerdo con la ley $\frac{c}{w_0} \ln \frac{2w_0 t}{c}$.

CAPÍTULO 2

MECÁNICA RELATIVISTA

§ 8. El principio de mínima acción

En el estudio del movimiento de las partículas materiales partiremos del *principio de mínima acción*. Como es sabido, el principio de mínima acción afirma que para cada sistema mecánico existe una cierta integral S, llamada la acción, que toma su valor mínimo para el movimiento real, de forma que su variación δs es igual a cero †.

Determinemos la integral de acción correspondiente a una partícula material libre, es decir, a una partícula no sometida a fuerza exterior ninguna. Observemos para ello que esta integral no puede depender del sistema de referencia elegido, esto es, debe ser invariante en las transformaciones de Lorentz. De ahí se sigue que debe depender de un escalar. Además, es claro que el integrando ha de ser una diferencial de primer orden. Pero el único escalar de este tipo que se puede construir para una partícula libre es el intervalo ds o bien $\alpha\, ds$, donde α es una cierta constante. Por consiguiente, para una partícula libre la acción debe ser de la forma

$$S = -\alpha \int_a^b ds,$$

donde $\int_a^b$ es una integral a lo largo de la línea de universo de la partícula entre los dos sucesos que representan la llegada de la misma a la posición inicial y a la posición final en instantes determinados t_1 y t_2, esto es, entre dos puntos dados de universo; α es una cierta constante que caracteriza la partícula en cuestión. Es fácil ver que α debe ser positiva para todas las partículas. En efecto, conforme

† En rigor, el principio de mínima acción afirma que la integral debe ser un mínimo tan sólo para longitudes infinitesimales del camino de integración. Para caminos de longitud cualquiera sólo podemos afirmar que S debe poseer un extremo, no necesariamente un mínimo. (Véase *Mecánica*, § 2).

se vio en el § 3, la integral $\int_a^b ds$ alcanza su valor máximo a lo largo de una recta de universo, por lo que, integrando a lo largo de una línea de universo curva, podemos hacer la integral tan pequeña cuanto queramos. La integral $\int_a^b ds$ tomada con signo positivo no puede tener, por consiguiente, un mínimo. En cambio, si la tomamos con signo contrario, alcanza, evidentemente, su mínimo valor a lo largo de una línea de universo recta.

La acción se puede representar como integral respecto del tiempo

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt.$$

El coeficiente L de dt representa la *función de Lagrange* del sistema mecánico dado. De (3.1) se deduce que

$$S = -\int_{t_1}^{t_2} ac \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt,$$

donde v es la velocidad de la partícula material. La función de Lagrange de la partícula es, por consiguiente,

$$L = -ac\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

La magnitud a, conforme ya se dijo, caracteriza la partícula. En la mecánica clásica cada partícula se caracteriza por su masa m. Determinemos la relación entre a y m. Esta relación resulta de la condición de que para $c\to\infty$ la expresión obtenida para L debe reducirse a la expresión clásica $L = mv^2/2$. Para llevar a cabo este paso al límite desarrollemos L en serie de potencias de v/c. Prescindiendo de términos de orden superior, se encuentra entonces,

$$L = -ac\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx -ac + \frac{av^2}{2c}.$$

Los términos constantes en la función de Lagrange no aparecen en las ecuaciones del movimiento. Prescindiendo, pues, de la constante ac, obtenemos $L = av^2/2c$, mientras que en mecánica clásica es $L = mv^2/2$. Debemos tener, por lo tanto, $a = mc$.

Resumiendo, la acción para un punto material libre es:

$$S = -mc\int_a^b ds \tag{8.1}$$

y la función de Lagrange se escribe:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{8.2}$$

§ 9. Energía e impulso

Por *impulso* de una partícula se entiende, como es sabido, el vector $\mathbf{p} = \partial L/\partial \mathbf{v}$ ($\partial L/\partial \mathbf{v}$ es la representación simbólica del vector cuyas componentes son las derivadas de L respecto de las correspondientes componentes de $\mathbf{v}$). De (8.2) se sigue que

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{9.1}$$

Para velocidades pequeñas ($v \ll c$) o para $c \to \infty$, esta expresión se reduce a la forma clásica $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Para $v = c$, el impulso se hace infinito.

La derivada temporal del impulso es la fuerza que actúa sobre la partícula. Supongamos que la velocidad de ésta cambia sólo de dirección, esto es, supongamos que la fuerza es perpendicular a la velocidad. En estas condiciones,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,. \tag{9.2}$$

Si la velocidad cambia sólo de módulo, esto es, si la fuerza es paralela a la velocidad, se tendrá:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,. \tag{9.3}$$

Vemos, pues, que la razón de la fuerza a la aceleración es diferente en los dos casos.

La *energía* $\mathcal{E}$ de la partícula es, por definición, la magnitud †

$$\mathcal{E} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} - L.$$

† Véase *Mecánica*, § 6.

Substituyendo las expresiones (8.2) y (9.1) de L y de $\mathbf{p}$ se obtiene:

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{9.4}$$

Esta fórmula, muy importante, pone de manifiesto, en particular, que en mecánica relativista la energía de una partícula material no tiende a cero para $v \to 0$, sino que tiende a un valor no nulo

$$\mathcal{E} = mc^2. \tag{9.5}$$

Esta magnitud es la *energía en reposo* de la partícula.

Para velocidades pequeñas ($v/c \ll 1$), el desarrollo de (9.4) en serie de potencias de v/c conduce a la relación

$$\mathcal{E} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2},$$

que, salvo la energía en reposo, coincide con la expresión clásica de la energía cinética de una partícula.

Hay que subrayar que si bien hablamos aquí de una « partícula », en ningún momento nos hemos apoyado en el hecho de que sea una partícula « elemental ». Las fórmulas obtenidas, por consiguiente, son igualmente aplicables a un cuerpo compuesto, constituido por varias partículas, entendiendo por m la masa total del cuerpo y por v la velocidad de su movimiento como un todo. En particular, la fórmula (9.5) es válida para un cuerpo cualquiera que se encuentre en conjunto en reposo. Hay que resaltar el hecho de que en mecánica relativista la energía de un cuerpo libre (es decir, la energía de cualquier sistema aislado) es una cantidad bien definida, que es siempre positiva y directamente ligada a la masa del cuerpo. En relación con esto conviene recordar que la energía de un cuerpo se define en mecánica clásica salvo una constante aditiva arbitraria y puede ser o positiva o negativa.

La energía de un cuerpo en reposo está constituida por las energías en reposo de las partículas que lo constituyen, por la energía cinética de estas partículas y por la energía de sus interacciones mutuas. Dicho de otra manera, mc^2 no es igual a $\Sigma m_a c^2$ (donde m_a son las masas de las partículas), y, por esto, m no es igual a Σm_a. Por consiguiente, en mecánica relativista no vale la ley de conservación de la masa: la masa de un cuerpo compuesto no es igual a la suma de las masas de sus componentes. Vale en cambio tan sólo la ley de conservación de la energía, incluyendo en ésta la energía en reposo de las partículas.

Elevando al cuadrado (9.1) y (9.4) y comparando los resultados, se obtiene la siguiente relación entre la energía y el impulso de una partícula:

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2. \tag{9.6}$$

La expresión de la energía en función del impulso se llama, como es sabido, la *función de Hamilton*

$$\mathcal{H} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \tag{9.7}$$

Para pequeñas velocidades se tiene $p \ll mc$, y aproximadamente,

$$\mathcal{H} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m},$$

es decir, salvo la energía en reposo, obtenemos la conocida expresión clásica de la función de Hamilton.

De las expresiones (9.1) y (9.4) se deducen también las siguientes relaciones entre la energía, el impulso y la velocidad de una partícula libre:

$$\mathbf{p} = \mathcal{E}\frac{\mathbf{v}}{c^2}. \tag{9.8}$$

Para $v = c$ el impulso y la energía de la partícula se hacen infinitos. Esto significa que una partícula cuya masa m es diferente de cero no puede moverse con la velocidad de la luz. Sin embargo, en mecánica relativista pueden existir partículas de masa nula que se mueven con dicha velocidad. De (9.8) se deduce para tales partículas:

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c}. \tag{9.9}$$

La misma fórmula vale también, aproximadamente, para partículas de masa no nula en el llamado caso *ultrarrelativista*, cuando la energía de la partícula $\mathcal{E}$ es grande respecto de su energía en reposo mc^2.

Escribamos ahora todas estas fórmulas en forma cuadridimensional. De acuerdo con el principio de mínima acción,

$$\delta S = -mc\delta \int_a^b ds = 0.$$

Para encontrar la expresión de δS, observemos que $ds = \sqrt{dx_i\, dx^i}$ y que, por consiguiente,

$$\delta S = -mc \int_a^b \frac{dx_i\, \delta dx^i}{ds} = -mc \int_a^b u_i\, d\delta x^i,$$

Integrando por partes se obtiene:

$$\delta S = -mcu_i\, \delta x^i \Big|_a^b + mc \int_a^b \delta x^i \frac{du_i}{ds} ds. \tag{9.10}$$

Conforme es sabido, para determinar las ecuaciones del movimiento se comparan arcos de diferentes trayectorias entre dos puntos dados, es decir, en los límites es $(\delta x^i)_a = (\delta x^i)_b = 0$. La trayectoria real se determina entonces a partir de la condición $\delta S = 0$. De (9.10) se deduce la ecuación $\dfrac{du_i}{ds} = 0$; esto es, una velocidad constante para la partícula libre en forma cuadridimensional.

Para hallar la variación de la acción en función de las coordenadas, hay que considerar dado un solo punto a, de forma que $(\delta x^i)_a = 0$. El segundo punto, en cambio, debe considerarse variable, pero sólo son admisibles trayectorias reales, es decir, aquellas que satisfacen las ecuaciones del movimiento. La integral que aparece en (9.10) es, por lo tanto, nula. En vez de $(\delta x^i)_b$ podemos escribir simplemente δx^i, con lo que se obtiene:

$$\delta S = -mcu_i\, \delta x^i. \tag{9.11}$$

El cuadrivector

$$p_i = -\frac{\delta S}{\delta x^i} \tag{9.12}$$

se llama *cuadrimpulso*. Como se demuestra en mecánica, las derivadas $\partial S/\partial x$, $\partial S/\partial y$, $\partial S/\partial z$ son las tres componentes del vector impulso de una partícula $\mathbf{p}$, y la derivada $\partial S/\partial t$ es la energía $\mathcal{E}$ de la misma. Por ello, las componentes covariantes del cuadriimpulso son $p_i = (\mathcal{E}/c, -\mathbf{p})$, y las componentes contravariantes †,

$$p^i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p}\right). \tag{9.13}$$

† Conviene advertir la regla nemotécnica para recordar la definición de los cuadrivectores físicos: las componentes contravariantes están ligadas con los correspondientes vectores tridimensionales ($\mathbf{r}$ para x^i, $\mathbf{p}$ para p^i, etc.) con el signo positivo, el «correcto».

En (9.11) resulta evidente que las componentes del cuadriimpulso de una partícula libre son iguales a

$$p^i = mcu^i \tag{9.14}$$

Substituyendo aquí las componentes de la cuadrivelocidad dadas por (7.2), se comprueba que, en efecto, para **p** y $\mathcal{E}$ se obtienen las expresiones (9.1) y (9.4).

Así, pues, en la mecánica relativista el impulso y la energía son componentes de un mismo cuadrivector. De aquí se deducen sin más las fórmulas de transformación del impulso y de la energía cuando se pasa de un sistema de referencia inercial a otro. Substituyendo en las fórmulas generales (6.1) de transformación de un cuadrivector las expresiones (9.13), se encuentra

$$p_x = \frac{p'_x + \dfrac{V}{c^2}\,\mathcal{E}'}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}' + Vp'_x}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \tag{9.15}$$

donde p_x, p_y, p_z son las componentes del vector tridimensional **p**.

De la definición del cuadriimpulso (9.14) y de la identidad $u^i u_i = 1$ se sigue para el cuadrado del cuadrimpulso de una partícula libre:

$$p^i\, p_i = m^2\, c^2 \tag{9.16}$$

Substituyendo aquí las expresiones (9.13), volvemos a la relación (9.6).

Por analogía con la definición ordinaria de una fuerza, el cuadrivector fuerza se puede definir como igual a la derivada

$$g^i = \frac{dp^i}{ds} = mc\,\frac{du^i}{ds}. \tag{9.17}$$

Sus componentes satisfacen la identidad $g_i u^i = 0$. Las componentes de este cuadrivector se expresan en función del vector fuerza ordinario en tres dimensiones $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$ mediante las igualdades

$$g^i = \left(\frac{\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}}{c^2\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \; \frac{\mathbf{f}}{c\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \right). \tag{9.18}$$

La componente temporal está ligada, por consiguiente, con el trabajo de la fuerza.

La ecuación relativista de Hamilton-Jacobi se obtiene mediante la substitución en (9.16) de las derivadas $-\partial S/\partial x^i$ en vez de p_i:

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}\,\frac{\partial S}{\partial x^i} \equiv g^{ik}\,\frac{\partial S}{\partial x^i}\,\frac{\partial S}{\partial x^k} = m^2\, c^2, \tag{9.19}$$

o bien, si se escribe la suma en forma explícita:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2=m^2\,c^2. \tag{9.20}$$

La transición en la ecuación (9.20) al caso límite representado por la mecánica clásica se efectúa de la siguiente manera. Ante todo hay que tener en cuenta que, como en la transición correspondiente en (9.7), la energía de una partícula en mecánica relativista contiene el término mc^2 que no encontramos en la mecánica clásica. Dado que la acción S está ligada con la energía por la relación $\mathcal{E}=-\dfrac{\partial S}{\partial t}$, al pasar a la mecánica clásica debemos introducir, en vez de la acción S, una nueva acción S' mediante la relación

$$S=S'-mc^2t.$$

Substituyéndola en (9.20), encontramos:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S'}{\partial z}\right)^2\right]-\frac{1}{2mc^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial S'}{\partial t}=0.$$

Pasando al límite para $c\to\infty$, esta ecuación se transforma en la ecuación clásica de Hamilton-Jacobi.

§ 10. Transformación de las funciones de distribución

En varios problemas de la física encontramos las llamadas funciones de distribución de las partículas según sus impulsos: $f(\mathbf{p})\,dp_x\,dp_y\,dp_z$ es el número de partículas cuyos impulsos tienen componentes que se encuentran en intervalos dados dp_x, dp_y, dp_z (o, como diremos para abreviar, el número de partículas que se encuentran en un elemento de volumen dado $dp_x\,dp_y\,dp_z$ del « espacio de impulso »). Se plantea ahora el problema de encontrar la ley de transformación de la función de distribución $f(\mathbf{p})$ cuando se pasa de un sistema de referencia a otro.

Para resolverlo determinaremos primero las propiedades del « elemento de volumen » $dp_x\,dp_y\,dp_z$ respecto de las transformaciones de Lorentz. Si se introduce un sistema de coordenadas de cuatro dimensiones sobre cuyos ejes se marcan las componentes del cuadrimpulso de una partícula, el producto $dp_x\,dp_y\,dp_z$ se puede considerar como la cuarta componente de un elemento de la hipersuperficie definida por la ecuación (9.18): $p^ip_i=m^2c^2$. El elemento de hipersuperficie es un cuadrivector dirigido a lo largo de la normal a la hipersuperficie; en nuestro caso, la dirección de la normal coincide, evidentemente, con la dirección del cuadrivector p_i. De aquí se sigue que la razón

$$\frac{dp_x\,dp_y\,dp_z}{\mathcal{E}} \tag{10.1}$$

es una cantidad invariante, en tanto que razón de componentes correspondientes de dos cuadrivectores paralelos †.

El número de partículas $f\,dp_x\,dp_y\,dp_z$ es también, claro está, un invariante, ya que no depende del sistema de referencia elegido. Escribiéndolo en la forma

$$f(\mathbf{p})\,\mathcal{E}\frac{dp_x\,dp_y\,dp_z}{\mathcal{E}}$$

y teniendo en cuenta la invariancia de la razón (10.1), llegamos a la conclusión de que el producto $f(\mathbf{p})\mathcal{E}$ es invariante. Por consiguiente, la función de distribución en el sistema K' está ligada con la función de distribución en el sistema K por la fórmula

$$f'(\mathbf{p}') = \frac{f(\mathbf{p})\,\mathcal{E}}{\mathcal{E}'}, \tag{10.2}$$

donde $\mathbf{p}$ y $\mathcal{E}$ deben expresarse en función de $\mathbf{p}'$ y $\mathcal{E}'$ mediante las fórmulas de transformación (9.15).

Volvamos ahora a la expresión invariante (10.1). Si introducimos « coordenadas esféricas » en el espacio de impulsos, el elemento de volumen $dp_x\,dp_y\,dp_z$ toma la forma $p^2\,dp\,do$, donde do es el elemento de ángulo sólido en torno de la dirección del vector $\mathbf{p}$. Observando que en [virtud de (9.6)] $pdp = \mathcal{E}\,d\mathcal{E}/c^2$, tendremos:

$$\frac{p^2\,dp\,do}{\mathcal{E}} = \frac{p\,d\mathcal{E}\,do}{c^2} \tag{10.3}$$

La expresión

$$p\,d\mathcal{E}\,do$$

es, por consiguiente, también invariante.

Si las partículas de que se trata se mueven con la velocidad de la luz, de forma que vale la relación (9.9) $\mathcal{E} = pc$, la magnitud invariante (10.3) se puede escribir en las formas equivalentes $p\,dp\,do$ ó $\mathcal{E}\,d\mathcal{E}\,do$.

† La integración respecto del elemento (10.1) puede representarse en forma cuadridimensional mediante funciones-δ (cf. la nota en la pág. 98) como integración según

$$\frac{2}{c}\,\delta\,(p^i p_i - m^2c^2)\,d^4p,\ d^4p = dp^0\,dp^1\,dp^2\,dp^3. \tag{10.1a}$$

Al hacerlo, las cuatro componentes p^i se consideran variables independientes (tomando p^0 tan sólo valores positivos). La fórmula (10.1*a*) es evidente teniendo en cuenta la siguiente representación de la función-δ que en ella figura:

$$\delta\,(p^i p_i - m^2c^2) = \delta\left(p_0^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{c^2}\right) = \frac{c}{2\mathcal{E}}\left[\,\delta\left(p_0 + \frac{\mathcal{E}}{c}\right) + \delta\left(p_0 - \frac{\mathcal{E}}{c}\right)\right], \tag{10.1b}$$

donde $\mathcal{E} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$. A su vez esta fórmula se sigue de la fórmula (V) citada en la nota de la página 98 .

§ 11. Desintegración de partículas

Consideremos la desintegración espontánea de un cuerpo de masa m en dos fragmentos de masas m_1 y m_2. La ley de conservación de la energía en la desintegración, aplicada en el sistema de referencia en el que el cuerpo está en reposo, nos da†

$$M = \mathcal{E}_{10}+\mathcal{E}_{20}, \tag{11.1}$$

donde $\mathcal{E}_{10}$ y $\mathcal{E}_{20}$ son las energías de las partículas resultantes. Dado que $\mathcal{E}_{10}>m_1$ y $\mathcal{E}_{20}>m_2$, la igualdad (11.1) puede quedar satisfecha solamente si $M>m_1+m_2$, esto es, un cuerpo se puede desintegrar espontáneamente en fragmentos tales que la suma de sus masas es menor que la masa del cuerpo. Por otra parte, si $M<m_1+m_2$, el cuerpo es estable (respecto de este modo particular de desintegración) y no se se desintegra espontáneamente. Para provocar la desintegración en este caso hay que proporcionar al cuerpo una cantidad de energía por lo menos igual a su « energía de enlace » (m_1+m_2-M).

El impulso, al igual que la energía, debe conservarse en el proceso de desintegración. Dado que el impulso inicial del cuerpo era cero, la suma de los impulsos de las partículas resultantes debe ser cero: $\mathbf{p}_{10}+\mathbf{p}_{20} = 0$. Por consiguiente $p_{10}^2 = p_{20}^2$, o bien,

$$\mathcal{E}_{10}^2-m_1^2 = \mathcal{E}_{20}^2-m_2^2. \tag{11.2}$$

Las dos ecuaciones (11.1) y (11.2) determinan unívocamente las energías de las partículas resultantes:

$$\mathcal{E}_{10} = \frac{M^2+m_1^2-m_2^2}{2M}, \qquad \mathcal{E}_{20} = \frac{M^2-m_1^2+m_2^2}{2M}. \tag{11.3}$$

En cierto sentido, el problema inverso de éste consiste en el cálculo de la energía total M de dos partículas que chocan en el sistema de referencia en el que su impulso total es cero. (Para abreviar, a este sistema se le llama « sistema del centro de masa » o « sistema-C »). El cálculo de esta cantidad proporciona un criterio para la posible existencia de varios procesos de colisión inelástica acompañados de un cambio en el estado de las partículas que chocan o de la « creación » de nuevas partículas. Un proceso de este tipo puede ocurrir sólo si la suma de las masas de los « productos de reacción » no supera a M

Supongamos que en el sistema de referencia inicial (sistema del « laboratorio ») una partícula de masa m_1 y energía $\mathcal{E}_1$ choca con una partícula de masa m_2 que se encuentra en reposo. La energía total de las dos partículas es:

† En los §§ 11-13 suponemos $c = 1$. En otras palabras, la velocidad de la luz se elige como unidad para medir las velocidades (con lo cual las dimensiones de una longitud y de un tiempo pasan a ser iguales). Esta elección resulta natural en mecánica relativista y simplifica mucho la escritura de las fórmulas. Sin embargo, en este libro (en el cual un espacio considerable se dedica a la teoría no-relativista) como regla general no utilizaremos dicho sistema de unidades, y cuando se emplee se hará constar cada vez explícitamente.

Si en una fórmula se hace $c = 1$, volver a las unidades ordinarias no ofrece dificultad: la velocidad de la luz se introduce en ella de forma tal que quede garantizada la dimensionalidad correcta.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1+m_2,$$

y su impulso total vale $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1$. Considerando el conjunto de las dos partículas como un solo sistema compuesto, la velocidad de su movimiento conjunto se deduce de (9.8):

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{p}}{\mathcal{E}} = \frac{\mathbf{p}_1}{\mathcal{E}_1+m_2}. \tag{11.4}$$

Esta cantidad es la velocidad del sistema-C respecto del sistema del laboratorio (sistema-L).

Sin embargo, para determinar la masa M no hay necesidad de pasar efectivamente de un sistema de referencia al otro. En vez de ello se puede aplicar directamente la fórmula (9.6) que vale para el sistema compuesto al igual que para cada partícula por separado. Tenemos así,

$$M^2 = \mathcal{E}^2-p^2 = (\mathcal{E}_1+m_2)^2-(\mathcal{E}_1^2-m_1^2),$$

de donde,

$$M^2 = m_1^2+m_2^2+2m_2\,\mathcal{E}_1\,. \tag{11.5}$$

Problemas

1. Una partícula que se mueve con velocidad V se desintegra « en vuelo » dando lugar a dos partículas. Determinar la relación entre los ángulos de emergencia de estas partículas y sus energías.

Solución. Sea $\mathcal{E}_0$ la energía de una de las partículas resultado de la desintegración en el sistema-C [es decir, $\mathcal{E}_{10}$ o $\mathcal{E}_{20}$ de (11.3)], $\mathcal{E}$ la energía de la misma partícula en el sistema-L y θ su ángulo de emergencia en este mismo sistema (referido a la dirección de V). De las fórmulas de transformación (9.15) se sigue

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\mathcal{E}-Vp\cos\theta}{\sqrt{1-V^2}},$$

de modo que

$$\cos\theta = \frac{\mathcal{E}-\mathcal{E}_0\sqrt{1-V^2}}{V\sqrt{\mathcal{E}^2-m^2}}. \tag{1}$$

Para determinar recíprocamente $\mathcal{E}$ a partir de $\cos\theta$ deducimos de (1) la ecuación de segundo grado (respecto de $\mathcal{E}$)

$$\mathcal{E}^2\left(1-V^2\cos^2\theta\right)-2\mathcal{E}\mathcal{E}_0\sqrt{1-V^2}+\mathcal{E}_0^2\left(1-V^2\right)+V^2m^2\cos^2\theta = 0, \tag{2}$$

que tiene una raiz positiva (si la velocidad v_0 de la partícula de desintegración en el sistema-C es $v_0 > V$) o dos raíces positivas (si $v_0 < V$).

La razón de esta ambigüedad resulta claramente de la siguiente construcción gráfica. De acuerdo con las fórmulas (9.15), las componentes del impulso en el sistema-L se expresan en función de cantidades referidas al sistema-C de la siguiente manera:

$$p_x = \frac{p_0 \cos\theta_0 + \mathcal{E}_0 V}{\sqrt{1 - V^2}}, \qquad p_y = p_0 \operatorname{sen}\theta_0.$$

Eliminando θ_0, obtenemos:

$$p_y^2 + \left(p_x \sqrt{1 - V^2} - \mathcal{E}_0 V\right)^2 = p_0^2.$$

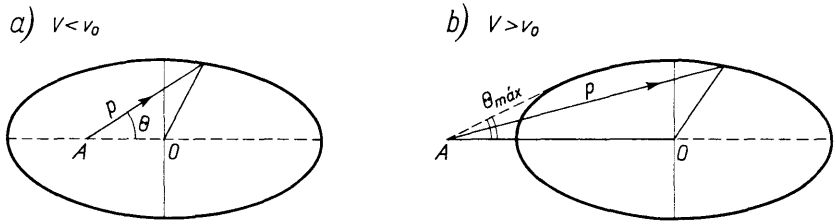

FIG. 3.

Respecto de las variables p_x, p_y, esta es la ecuación de una elipse de semiejes $p_0/\sqrt{1 - V^2}$, p_0, cuyo centro (el punto O de la fig. 3) se encuentra a una distancia $\mathcal{E}_0 V \sqrt{1 - V^2}$ del punto $\mathbf{p} = 0$ (punto A de la fig. 3) †.

Si $V > \frac{p_0}{\mathcal{E}_0} = v_0$, el punto A cae fuera de la elipse (fig. 3b) de forma que para un ángulo dado θ el vector $\mathbf{p}$ (y, por consiguiente, la energía $\mathcal{E}$) puede tener dos valores distintos. Es también claro que en este caso el ángulo θ no puede superar, por construcción, un determinado valor $\theta_{\text{máx}}$ (que corresponde a la posición del vector $\mathbf{p}$ en la que éste es tangente a la elipse). La manera más fácil de determinar el valor de $\theta_{\text{máx}}$ es analíticamente, a partir de la condición de que el discriminante de la ecuación de segundo grado (2) se anule:

$$\operatorname{sen}\theta_{\max} = \frac{p_0 \sqrt{1 - V^2}}{mV}.$$

† En el límite clásico, la elipse se reduce a una circunferencia. (Véase *Mecánica*, § 16.)

2. Hallar la distribución energética de las partículas de desintegración en el sistema-L.

Solución. En el sistema-C las partículas que resulten de la desintegración se distribuyen isotrópicamente, esto es, el número de partículas en el elemento de ángulo sólido $do_0 = 2\pi \operatorname{sen}\theta_0 d\theta_0$ es:

$$dN = \frac{1}{4\pi} do_0 = \tfrac{1}{2}|d\cos\theta_0|. \tag{1}$$

La energía en el sistema-L en función de cantidades relativas al sistema-C viene dada por

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0 + p_0 V \cos\theta_0}{\sqrt{1-V^2}}$$

y varía en el intervalo definido por

$$\frac{\mathcal{E}_0 - V p_0}{\sqrt{1-V^2}} \quad \text{y} \quad \frac{\mathcal{E}_0 + V p_0}{\sqrt{1-V^2}}.$$

Expresando $|d\cos\theta_0|$ en función de $d\mathcal{E}$, se obtiene la distribución energética normalizada a la unidad (para cada uno de los dos tipos de partículas de desintegración)

$$dN = \frac{1}{2Vp_0}\sqrt{1-V^2}\, d\mathcal{E}.$$

3. Determinar el intervalo de valores, en el sistema-L, del ángulo formado por las trayectorias de las dos partículas de desintegración (su ángulo de separación) para el caso de desintegración en dos partículas idénticas.

Solución. En el sistema-C, las partículas se separan en sentidos opuestos, de forma que $\theta_{10} = \pi - \theta_{20} = \theta_0$. De acuerdo con (5.4), la relación entre los ángulos en los sistemas C y L resulta de las fórmulas

$$\operatorname{ctg}\theta_1 = \frac{v_0\cos\theta_0 + V}{v_0 \operatorname{sen}\theta_0 \sqrt{1-V^2}}, \quad \operatorname{ctg}\theta_2 = \frac{-v_0\cos\theta_0 + V}{v_0 \operatorname{sen}\theta_0 \sqrt{1-V^2}}$$

(puesto que $v_{10} = v_{20} = v_0$ en el presente caso). El ángulo de separación buscado es $\Theta = \theta_1 + \theta_2$ y un cálculo simple nos da

$$\operatorname{ctg}\Theta = \frac{V^2 - v_0^2 + V^2 v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta_0}{2Vv_0\sqrt{1-V^2}\operatorname{sen}\theta_0}.$$

Determinando los valores extremos de esta expresión se deducen para los posibles intervalos de variación de Θ las cotas siguientes:

$$\text{si } V < v_0\text{: } 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{v_0}{V}\sqrt{1-V^2}\right) < \Theta < \pi;$$

$$\text{si } v_0 < V < \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}} : 0 < \Theta < \text{arc sen } \sqrt{\frac{1-V^2}{1-v_0^2}} < \frac{\pi}{2};$$

$$\text{si } V > \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}} : 0 < \Theta < 2 \text{ arc tg } \left(\frac{v_0}{V}\sqrt{1-V^2}\right) < \frac{\pi}{2}.$$

4. Hallar la distribución angular en el sistema-L de partículas de desintegración de masa nula.

Solución. De acuerdo con (5.6), la relación entre los ángulos de emergencia en los sistemas C y L para partículas de masa $m = 0$ es:

$$\cos\theta_0 = \frac{\cos\theta - V}{1 - V\cos\theta}.$$

Substituyendo esta expresión en la fórmula (1) del problema 2, se obtiene:

$$dN = \frac{\left(1-V^2\right)do}{4\pi\left(1-V\cos\theta\right)^2}.$$

5. Hallar la distribución de los ángulos de separación en el sistema-L para una desintegración en dos partículas de masa nula.

Solución. Entre los ángulos de emergencia θ_1, θ_2 en el sistema-L y los ángulos $\theta_{10} = \theta_0, \theta_{20} = \pi - \theta_0$ en el sistema-C existe la relación (5.6), de forma que para el ángulo de separación $\Theta = \theta_1 + \theta_2$ se encuentra

$$\cos\Theta = \frac{2V^2 - 1 - V^2\cos^2\theta_0}{1 - V^2\cos^2\theta_0}$$

y, recíprocamente,

$$\cos\theta_0 = \sqrt{1 - \frac{1-V^2}{V^2}\operatorname{ctg}^2\frac{\Theta}{2}}.$$

Substituyendo esta expresión en la fórmula (1) del problema 2, se obtiene:

$$dN = \frac{1-V^2}{16\pi V} \frac{do}{\operatorname{sen}^3\frac{\Theta}{2}\sqrt{V^2 - \cos^2\frac{\Theta}{2}}}.$$

El ángulo Θ varía entre π y $\Theta_{\text{mín}} = 2 \text{ arc cos } V$.

6. Determinar la energía máxima que puede llevarse una de las partículas de desintegración cuando una partícula de masa en reposo M se desintegra en tres partículas de masas m_1, m_2 y m_3.

Solución. La partícula m_1 alcanza su máxima energía si el sistema constituido por las otras dos partículas m_2, m_3 tiene su masa mínima posible. Esta última es igual a la suma m_2+m_3 (y corresponde al caso en que las dos partículas se mueven juntas con igual velocidad). Habiendo así reducido el problema a la desintegración de un cuerpo en dos fragmentos, de (11.3) se deduce:

$$\mathcal{E}_{1\,\text{máx}} = \frac{M^2+m_1^2-(m_2+m_3)^2}{2M}.$$

§ 12. Secciones eficaces invariantes

Como es sabido, los diferentes procesos de dispersión se caracterizan por sus *secciones eficaces*, que determinan el número de colisiones que tienen lugar en los haces de partículas que chocan.

Supongamos que chocan dos haces de partículas; designemos por n_1 y n_2 las densidades de partículas en ellos (es decir, los números de partículas por unidad de volumen), y por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ las velocidades de las mismas. En el sistema de referencia respecto del cual se encuentran en reposo las partículas 2 (o, como se dice abreviadamente, en el *sistema de reposo* de las partículas 2), el problema es el del choque del haz de partículas 1 con un blanco inmóvil. En estas condiciones, según la definición ordinaria de sección eficaz, σ, el número de colisiones que tienen lugar en el volumen dV durante el intervalo de tiempo dt es

$$dv = \sigma v_{\text{rel}} n_1 n_2\, dV\, dt.$$

donde v_{rel} es el valor absoluto de la velocidad de las partículas 1 en el sistema de reposo de las partículas 2 (así precisamente se define en mecánica relativista la velocidad relativa de dos partículas).

El número dv es, por su propia esencia, una magnitud invariante. Veamos cómo expresarla en una forma adecuada a cualquier sistema de referencia:

$$dv = An_1n_2\, dV\, dt, \tag{12.1}$$

donde A es una magnitud que hay que definir y acerca de la cual sabemos que, en el sistema de reposo de una de las partículas, es igual a $v_{\text{rel}}\sigma$. En todo esto entenderemos siempre por σ precisamente la sección eficaz en el sistema de reposo de una de las partículas, es decir, por definición, σ es una cantidad invariante. También por definición es invariante la velocidad relativa v_{rel}.

En la expresión (12.1) el producto $dV\,dt$ es una cantidad invariante. Por consiguiente, invariante debe ser también el producto An_1n_2.

La ley de transformación de la densidad de partículas n se halla fácilmente observando que el número de partículas ndV que se encuentran en un elemento de volumen dado dV es invariante. Escribiendo $n\,dV = n_0\,dV_0$ (el subíndice 0 indica

que se trata del sistema de reposo de las partículas) y utilizando la fórmula (4.6) que da la transformación de un volumen, se encuentra:

$$n = \frac{n_0}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{12.2}$$

o bien $n = n_0 \mathcal{E}/m$, donde $\mathcal{E}$ es la energía y m la masa de las partículas.

Por lo tanto, afirmar que el producto An_1n_2 es invariante equivale a la invariancia de la expresión $A\,\mathcal{E}_1\,\mathcal{E}_2$. Resulta más conveniente representar esta condición en la forma

$$A\,\frac{\mathcal{E}_1\,\mathcal{E}_2}{p_{1i}\,p_2^i} = A\,\frac{\mathcal{E}_1\,\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1\,\mathcal{E}_2 - \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2} = \text{inv}, \tag{12.3}$$

donde en el denominador aparece una magnitud también invariante — el producto de los cuadrimpulsos de las dos partículas.

En el sistema de reposo de las partículas 2 tenemos $\mathcal{E}_2 = m_2$, $\mathbf{p}_2 = 0$, de modo que la magnitud invariante (12.3) se reduce a A. Por otra parte, en este sistema se tiene $A = \sigma v_{\text{rel}}$. Así, pues, en un sistema de referencia arbitrario

$$A = \sigma v_{rel}\,\frac{p_{1i}\,p_2^i}{\mathcal{E}_1\,\mathcal{E}_2}. \tag{12.4}$$

Para dar a esta expresión su forma final, escribamos v_{rel} en función del impulso o de la velocidad de las partículas en un sistema cualquiera de referencia. Para ello observemos que en el sistema de reposo de la partícula 2 el invariante

$$p_{1i}\,p_2^i = \frac{m_1}{\sqrt{1 - v_{rel}^2}}\,m_2$$

De aquí se sigue

$$v_{rel} = \sqrt{1 - \frac{m_1^2\,m_2^2}{(p_{1i}\,p_2^i)^2}}. \tag{12.5}$$

Expresando la magnitud $p_{1i}p_2^i = \mathcal{E}_1\,\mathcal{E}_2 - \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2$ en función de las velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ mediante (9.1) y (9.4), se tiene:

$$p_{1i}\,p_2^i = m_1\,m_2\,\frac{1 - \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2}{\sqrt{(1 - v_1^2)\,(1 - v_2^2)}}$$

y substituyendo en (12.5) resulta, después de simples transformaciones, la expresión siguiente para la velocidad relativa:

$$v_{rel} = \frac{\sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]^2}}{1 - \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2} \tag{12.6}$$

(conviene hacer notar que esta expresión es simétrica respecto de $\mathbf{v}_1$ y de $\mathbf{v}_2$, es decir,

el valor de la velocidad relativa no depende de cuál sea la partícula con relación a la cual se define).

Substituyendo (12.5) y (12.6) en (12.4) y luego en (12.1), obtendremos las fórmulas finales que resuelven el problema planteado:

$$dv = \sigma \frac{\sqrt{(p_{1i}p_2^i)^2 - m_1^2 m_2^2}}{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} n_1 n_2 \, dV \, dt \tag{12.7}$$

o bien

$$dv = \sigma \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]^2} \, n_1 n_2 \, dV \, dt \tag{12.8}$$

(*W. Pauli*, 1933).

Si las velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son paralelas, se tendrá $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = 0$, de modo que la fórmula (12.8) se escribe entonces simplemente:

$$dv = \sigma \, | \, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \, | \, n_1 n_2 \, dV \, dt. \tag{12.9}$$

PROBLEMA

Hallar el «elemento de longitud» en el «espacio de las velocidades» relativista.

Solución. El «elemento de longitud» buscado dl_v representa la velocidad relativa de dos puntos con velocidades $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Por ello, de (12.6) deducimos que

$$dl_v^2 = \frac{(d\mathbf{v})^2 - [\mathbf{v} \times d\mathbf{v}]^2}{(1 - v^2)^2} = \frac{dv^2}{(1 - v^2)^2} + \frac{v^2}{(1 - v^2)} (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d\varphi^2),$$

donde θ, φ son el ángulo polar y el acimut de la dirección (orientada) de $\mathbf{v}$. Si en vez de v se introduce la nueva variable χ definida por la igualdad $v = \operatorname{tgh} \chi$, el elemento de longitud toma la forma:

$$dl_v^2 = d\chi^2 + \operatorname{senh}^2 \chi \, (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d\varphi^2).$$

Desde el punto de vista geométrico, éste es precisamente el elemento de longitud en el espacio tridimensional de Lobachevskii — espacio de curvatura negativa constante — (cf. fórmula (107.12)).

§ 13. Colisiones elásticas de partículas

Consideremos, desde el punto de vista de la teoría de la relatividad, la *colisión elástica* de dos partículas. Designemos los impulsos y las energías de las mismas (cuyas masas son m_1 y m_2) por $\mathbf{p}_1$, $\mathcal{E}_1$ y $\mathbf{p}_2$, $\mathcal{E}_2$; los valores de las diferentes cantidades después del choque se caracterizarán mediante un apóstrofo.

Las leyes de conservación de la energía y del impulso en la colisión se pueden escribir juntas en forma de ecuación de conservación del cuadriimpulso:

$$p_1^i + p_2^i = p_1'^i + p_2'^i. \tag{13.1}$$

A partir de esta ecuación cuadrivectorial formemos relaciones invariantes que

resultarán convenientes para cálculos ulteriores. Con este fin escribamos (13.1) en la forma:

$$p_1^i + p_2^i - p_1'^i = p_2'^i$$

y elevemos al cuadrado los dos miembros de la igualdad (es decir, escribamos sus productos escalares por sí mismos). Observando que los cuadrados de los cuadri-impulsos p_1^i y $p_1'^i$ son iguales a m_1^2 y que los cuadrados de p_2^i y p'^i_2 son iguales a m_2^2, obtendremos:

$$m_1^2 + p_{1i}\, p_2^i - p_{1i}\, p_1'^i - p_{2i}\, p_1'^i = 0. \tag{13.2}$$

De manera análoga, elevando al cuadrado la igualdad $p_1^i + p_2^i - p_2'^i = p_1'^i$ se obtiene

$$m_2^2 + p_{1i}\, p_2^i - p_{2i}\, p_2'^i - p_{1i}\, p_2'^i = 0. \tag{13.3}$$

Consideremos el choque tal como se observa en el sistema de referencia (sistema-L) en el cual una de las partículas (la partícula m_2) se encontraba en reposo antes de la colisión. Entonces es $p_2 = 0$, $\mathcal{E}_2 = m_2$ y los productos escalares que figuran en (13.2) son iguales a:

$$\begin{gathered} p_{1i}\, p_2^i = \mathcal{E}_1\, m_2, \quad p_{2i}\, p_1'^i = m_2\, \mathcal{E}_1', \\ p_{1i}\, p_1'^i = \mathcal{E}_1\, \mathcal{E}_1' - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_1 = \mathcal{E}_1\, \mathcal{E}_1' - p_1 p_1' \cos\theta_1, \end{gathered} \tag{13.4}$$

donde θ_1 es el ángulo de dispersión de la partícula incidente m_1. Substituyendo estas expresiones en (13.2), resulta:

$$\cos\theta_1 = \frac{\mathcal{E}_1'(\mathcal{E}_1 + m_2) - \mathcal{E}_1\, m_2 - m_1^2}{p_1 p_1'}. \tag{13.5}$$

Análogamente, a partir de (13.3) se encuentra:

$$\cos\theta_2 = \frac{(\mathcal{E}_1 + m_2)\,(\mathcal{E}_2' - m_2)}{p_1\, p_2'}, \tag{13.6}$$

donde θ_2 es el ángulo formado por el impulso de retroceso $\mathbf{p}'_2$ y el impulso de la partícula incidente $\mathbf{p}_1$.

Las fórmulas (13.5-6) ligan entre sí los ángulos de dispersión de ambas partículas en el sistema-L con las variaciones de sus energías en los choques. Invirtiendo estas fórmulas, se pueden expresar las energías $\mathcal{E}'_1$, $\mathcal{E}'_2$ en función del ángulo θ_1 o θ_2. Así, substituyendo en (13.6) $p_1 = \sqrt{\mathcal{E}_1^2 - m_1^2}$, $p_2' = \sqrt{\mathcal{E}_2'^2 - m_2^2}$ y elevando la igualdad al cuadrado, después de un cálculo fácil obtendremos:

$$\mathcal{E}_2' = m_2\, \frac{(\mathcal{E}_1 + m_2)^2 + (\mathcal{E}_1^2 - m_1^2)\cos^2\theta_2}{(\mathcal{E}_1 + m_2)^2 - (\mathcal{E}_1^2 - m_1^2)\cos^2\theta_2}. \tag{13.7}$$

En cambio, la inversión de la fórmula (13.5) conduce en el caso general a una expresión muy compleja de $\mathcal{E}'_1$ en función de θ_1.

Obsérvese que si $m_1 > m_2$, es decir, si la partícula incidente es más pesada que la que se encuentra en reposo, el ángulo de dispersión θ_1 no puede superar un cierto valor máximo. Mediante un cálculo elemental es fácil encontrar que este valor se determina por la igualdad

$$\operatorname{sen} \theta_{1\,\max} = \frac{m_2}{m_1}, \tag{13.8}$$

que coincide exactamente con el conocido resultado clásico.

Las fórmulas (13.5-6) se simplifican en el caso en que la partícula incidente es de masa nula: $m_1 = 0$ y, en consecuencia, $p_1 = \mathcal{E}_1$, $p'_1 = \mathcal{E}'_1$. Escribamos para este caso la fórmula que da la energía de la partícula incidente después del choque en función de su ángulo de desviación:

$$\mathcal{E}'_1 = \frac{m_2}{1 - \cos\theta_1 + \dfrac{m_2}{\mathcal{E}_1}}. \tag{13.9}$$

Volvamos de nuevo al caso general de la colisión de partículas de masas cualesquiera. El choque aparece en su forma más simple al referirlo al sistema-C. Caracterizando los valores de las cantidades en este sistema por el índice adicional 0, tenemos ahora $\mathbf{p}_{10} = -\mathbf{p}_{20} \equiv \mathbf{p}_0$. En virtud de la conservación del impulso, los impulsos de ambas partículas sólo giran en la colisión, siendo iguales sus módulos y manteniéndose opuestos en su sentido. Por otra parte, en virtud de la conservación de la energía los valores absolutos de cada uno de los impulsos se mantiene invariable.

Designemos por χ el ángulo de dispersión en el sistema-C, es decir, el ángulo que giran, como resultado del choque, los impulsos $\mathbf{p}_{10}$ y $\mathbf{p}_{20}$. Esta cantidad determina por completo el proceso de dispersión en el sistema del centro de masa y, en consecuencia, también en cualquier otro sistema de referencia. Resulta conveniente elegirlo asimismo para describir la colisión en el sistema-L como único parámetro que se conserva indeterminado después de tener en cuenta las leyes de conservación de la energía y del impulso.

Expresemos en función de este parámetro las energías finales de las dos partículas en el sistema-L. Volvamos para ello a la relación (13.2), pero esta vez despejemos el producto $p_{1i}p'^{i}_1$ en el sistema-C:

$$p_{1i}\,p'^{i}_1 = \mathcal{E}_{10}\mathcal{E}'_{10} - \mathbf{p}_{10}\cdot\mathbf{p}'_{10} = \mathcal{E}^2_{10} - p_0^2\cos\chi = p_0^2(1-\cos\chi) + m_1^2$$

(en el sistema-C la energía de cada una de las partículas se conserva en la colisión: $\mathcal{E}'_{10} = \mathcal{E}_{10}$). Los otros dos productos, en cambio, representémoslos como antes

en el sistema-L, es decir, tomémoslos de (13.4). El resultado que se obtiene es:

$$\mathcal{E}_1' - \mathcal{E}_1 = -\frac{p_0^2}{m_2}(1 - \cos\chi).$$

Queda por expresar $p_0{}^2$ en función de las cantidades referidas al sistema-L. Esto se hace fácilmente sin más que igualar los valores de los invariantes $p_{1i}p^i{}_2$ en los sistemas (C) y (L):

$$\mathcal{E}_{10}\mathcal{E}_{20} - \mathbf{p}_{10}\cdot\mathbf{p}_{20} = \mathcal{E}_1 m_2$$

o bien,

$$\sqrt{(p_0^2 + m_1^2)(p_0^2 + m_2^2)} = \mathcal{E}_1 m_2 - p_0^2.$$

Despejando en esta ecuación $p_0{}^2$, se obtiene

$$p_0^2 = \frac{m_2^2(\mathcal{E}_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathcal{E}_1}. \tag{13.10}$$

De esta manera tenemos, en definitiva:

$$\mathcal{E}_1' = \mathcal{E}_1 - \frac{m_2(\mathcal{E}_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathcal{E}_1}(1 - \cos\chi). \tag{13.11}$$

La energía de la segunda partícula se obtiene a partir de la ley de conservación: $\mathcal{E}_1 + m_2 = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2$. Por consiguiente,

$$\mathcal{E}_2' = m_2 + \frac{m_2(\mathcal{E}_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathcal{E}_1}(1 - \cos\chi). \tag{13.12}$$

Los segundos miembros en estas fórmulas representan la energía que pierde la primera partícula y que cobra la segunda. La máxima transferencia de energía se obtiene para $\chi = \pi$ y es igual a

$$\mathcal{E}'_{2\,\max} - m_2 = \mathcal{E}'_1 - \mathcal{E}'_{1\,\min} = \frac{2m_2(\mathcal{E}_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathcal{E}_1}. \tag{13.13}$$

La razón de la energía cinética mínima de la partícula incidente después de la colisión a su energía cinética inicial vale:

$$\frac{\mathcal{E}'_{1\,\min} - m_1}{\mathcal{E}_1 - m_1} = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathcal{E}_1}. \tag{13.14}$$

En el caso límite de pcqueñas velocidades (cuando $\mathcal{E} \approx m + mv^2/2$) esta razón tiende al límite

$$\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2.$$

En cambio, en el caso opuesto extremo de grandes energías $\mathcal{E}_1$, la razón (13.14) tiende a cero, mientras que la propia energía $\mathcal{E}'_{1\min}$ tiende a un límite no nulo, igual a

$$\mathcal{E}'_{1\,\min} = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2m_2}.$$

Supongamos que $m_2 \gg m_1$, es decir, que la masa de la partícula incidente es pequeña comparada con la masa de la partícula en reposo. Según la mecánica clásica, en estas condiciones la partícula ligera podría ceder a la pesada tan sólo una pequeñísima parte de su energía (véase Mecánica, § 17). Esta situación no se produce, sin embargo, en la teoría relativista. Por la fórmula (13.14) es evidente que, para energías suficientemente grandes $\mathcal{E}_1$, la fracción de energía cedida puede alcanzar valores del orden de 1. Para esto, sin embargo, no basta que la velocidad de la partícula m_1 sea del orden de 1, sino que es necesario, como es fácil ver, que la energía

$$\mathcal{E}_1 \sim m_2,$$

es decir, la partícula ligera debe poseer una energía que sea del orden de la energía en reposo de la partícula pesada.

Una situación análoga tiene lugar cuando $m_2 \ll m_1$, es decir, cuando la partícula pesada incide sobre la ligera. También aquí, según la mecánica clásica, tendría lugar tan sólo una cesión insignificante de energía. La fracción de energía transferida comienza a ser apreciable únicamente a partir de energías

$$\mathcal{E}_1 \sim \frac{m_1^2}{m_2}.$$

Obsérvese que ahora también se trata, no simplemente de velocidades del orden de la velocidad de la luz, sino de energías que son grandes comparadas con m_1, es decir, de un caso ultrarrelativista.

Problemas

1. El triángulo ABC de la figura 4 está formado por el vector impulso $\mathbf{p}_1$ de la partícula proyectil y los impulsos $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$ de las dos partículas después de la colisión. Determinar el lugar geométrico de los puntos C que corresponden a todos los valores posibles de $\mathbf{p}_1'$ y $\mathbf{p}_2'$.

Solución. La curva que se pide es una elipse cuyos semiejes se pueden hallar mediante las fórmulas obtenidas en el problema 1 del § 11. En efecto, la construcción dada allí determinaba el lugar geométrico de los vectores $\mathbf{p}$, en el sistema-L, que se obtienen a partir de vectores $\mathbf{p}_0$ de dirección arbitraria que tienen longitud p_0 en el sistema-C.

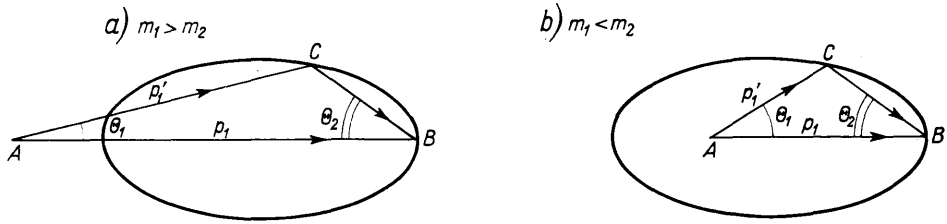

Fig. 4.

Teniendo en cuenta que los módulos de los impulsos, en el sistema-C, de las partículas que chocan son idénticos y no cambian en la colisión, se trata de una construcción análoga para el vector $\mathbf{p}_1'$, para el que

$$p_0 = p_{10} = p_{20} = \frac{m_2 V}{\sqrt{1 - V^2}}$$

en el sistema $-C$, donde V es la velocidad de la partícula m_2, velocidad que coincide con la del centro de masa, $V = p_1/(\mathcal{E}_1 + m_2)$, (cf. [11.4]).

$$p_0 = \frac{m_2 p_1}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 \mathcal{E}_1}},$$

$$\frac{p_0}{\sqrt{1 - V^2}} = \frac{m_2 p_1 (\mathcal{E}_1 + m_2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 \mathcal{E}_1}$$

(la primera de estas ecuaciones coincide, claro está, con (13.10)
Para $\theta_1 = 0$, el vector $\mathbf{p}_1'$ coincide con $\mathbf{p}_1$, de forma que la distancia AB es igual a p_1. De la comparación de p_1 con la longitud del eje mayor de la elipse se deduce fácilmente que el punto A es exterior a la elipse si $m_1 > m_2$ (fig. 4a), e interior a ella si $m_1 < m_2$ (fig. 4b).

2. Determinar el ángulo de separación mínimo $\Theta_{\text{mín}}$ de las dos partículas después de la colisión si sus masas son las mismas ($m_1 = m_2 = m$).

Solución. Si $m_1 = m_2$, el punto A del diagrama se encuentra sobre la elipse, mientras que el ángulo de separación mínimo corresponde al caso en que el punto C se encuentra en el extremo del eje menor (fig. 5). Es claro, por construcción, que $\operatorname{tg}(\Theta_{\text{mín}}/2)$ coincide con la razón de las longitudes de los dos semiejes y que, por consiguiente,

$$\operatorname{tg} \frac{\Theta_{\text{mín}}}{2} = \sqrt{\frac{2m}{\mathcal{E}_1 + m}},$$

o bien,

$$\cos \Theta_{\text{mín}} = \frac{\mathcal{E}_1 - m}{\mathcal{E}_1 + 3m}.$$

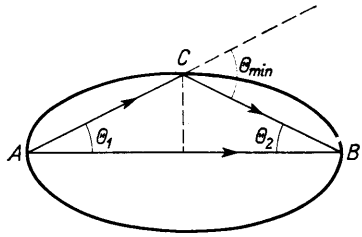

FIG. 5.

3. Para el choque de dos partículas de igual masa m expresar $\mathcal{E}_1'$, $\mathcal{E}_2'$, χ en función del ángulo de dispersión θ_1 en el sistema-L.

Solución. La fórmula (13.5) da en este caso :

$$\mathcal{E}_1' = \frac{(\mathcal{E}_1 + m) + (\mathcal{E}_1 - m)\cos^2 \theta_1}{(\mathcal{E}_1 + m) - (\mathcal{E}_1 - m)\cos^2 \theta_1}$$

$$\mathcal{E}_2' = m + \frac{(\mathcal{E}_1^2 - m^2)\operatorname{sen}^2 \theta_1}{2m + (\mathcal{E}_1 - m)\operatorname{sen}^2 \theta_1}.$$

Comparando con la expresión de $\mathcal{E}_1'$ en función de χ:

$$\mathcal{E}_1' = \mathcal{E}_1 - \frac{\mathcal{E}_1 - m}{2}(1 - \cos \chi),$$

encontramos el ángulo de dispersión en el sistema-C:

$$\cos \chi = \frac{2m - (\mathcal{E}_1 + 3m)\operatorname{sen}^2 \theta_1}{2m + (\mathcal{E}_1 + m)\operatorname{sen}^2 \theta_1}.$$

§ 14. Momento cinético

Como es sabido por la mecánica clásica, en un sistema aislado se conservan no sólo la energía y el impulso, sino también el momento cinético, es decir, el vector

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

(**r** y **p** son el vector posición y el impulso de la partícula; la suma se extiende a todas las partículas que constituyen el sistema). La conservación del momento cinético es consecuencia de que, debido a la isotropía del espacio, la función de Lagrange de un sistema aislado no cambia en una rotación del sistema en conjunto.

Un razonamiento análogo, aplicado al caso de cuatro dimensiones, conduce a la expresión relativista del momento cinético. Sean x_i las coordenadas de una de las partículas del sistema. Apliquemos una rotación infinitesimal al espacio de cuatro dimensiones. En ella, las coordenadas x^i toman nuevos valores tales que las diferencias $x'^i - x^i$ son funciones lineales.

$$x'^i - x^i = x_k \, \delta\Omega^{ik} \tag{14.1}$$

con coeficientes $\delta\Omega^{ik}$ infinitamente pequeños. Las componentes del cuadritensor $\delta\Omega^{ik}$ están ligadas entre sí por relaciones que resultan de la condición de que, en una rotación, la longitud $x_i \, x^i$ del vector posición debe conservarse, esto es, de que $x'_i \, x'^i = x_i \, x^i$. Substituyendo el valor que se deduce de (14.1) para x'^i y prescindiendo de términos de segundo orden en $\delta\Omega^{ik}$, considerados como infinitésimos de orden superior, encontramos:

$$x^i x^k \, \delta\Omega_{ik} = 0.$$

Esta ecuación debe quedar satisfecha cualquier que sea x^i. Dado que $x^i x^k$ es un tensor simétrico, $\delta\Omega_{ik}$ ha de ser un tensor antisimétrico (el producto de un tensor simétrico por un tensor antisimétrico es, claro, idénticamente nulo). Llegamos así a la conclusión de que

$$\delta\Omega_{ki} = -\delta\Omega_{ik}. \tag{14.2}$$

La variación δS de la acción S debida a un cambio infinitesimal de coordenadas es de la forma [véase (9.11)]:

$$\delta S = \sum p^i \, \delta x_i$$

(la suma se extiende a todas las partículas del sistema). En el caso de una rotación, que es el que ahora consideramos, es $\delta x_i = \delta\Omega_{ik} \, x^k$, de forma que

$$\delta S = \delta\Omega_{ik} \sum p^i x^k.$$

Si descomponemos el tensor $\sum p^i x^k$ en parte simétrica y parte antisimétrica, la primera, multiplicada por un tensor antisimétrico, da como resultado el valor cero.

Por consiguiente, si se toma la parte antisimétrica de $\sum p^i x^k$, se puede escribir la igualdad anterior en la forma

$$\delta S = \delta\Omega_{ik} \cdot \tfrac{1}{2} \sum (p^i x^k - p^k x^i). \tag{14.3}$$

En un sistema aislado, debido a la isotropía del espacio y del tiempo, la función de Lagrange no cambia en una rotación del espacio de cuatro dimensiones, esto es, los parámetros $\delta\Omega_{ik}$ correspondientes a la rotación son coordenadas cíclicas. Por lo tanto, se conservan los impulsos generalizados correspondientes. Estos impulsos generalizados son las magnitudes $\partial S/\partial\Omega_{ik}$. De (14.3) se deduce:

$$\frac{\delta S}{\delta\Omega_{ik}} = \frac{1}{2} \sum (p^i x^k - p^k x^i).$$

Vemos, pues, que el tensor

$$M^{ik} = \sum (x^i p^k - x^k p^i) \tag{14.4}$$

se conserva en un sistema aislado. Este tensor antisimétrico se llama cuadritensor *momento cinético*. Sus componentes espaciales ($i, k = 1, 2, 3$) son, evidentemente, las componentes del vector tridimensional momento cinético:

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

$$M^{23} = M_x, \qquad M^{31} = M_y, \quad M^{12} = M_z$$

En cuanto a las componentes M^{01}, M^{02} y M^{03}, es fácil ver que forman un vector de tres dimensiones $\sum (t\mathbf{p} - \mathcal{E}\mathbf{r}/c^2)$ y podemos escribir las componentes del tensor M^{ik} en la forma

$$M^{ik} = \left(\sum \left(t\mathbf{p} - \frac{\mathcal{E}\,\mathbf{r}}{c^2} \right), \; -\mathbf{M} \right) \tag{14.5}$$

Debido a la conservación de M_{ik} para un sistema aislado, se tiene, en particular,

$$\sum \left(t\mathbf{p} - \frac{\mathcal{E}\mathbf{r}}{c^2} \right) = \text{const}.$$

Dado que, de otra parte, la energía total $\sum \mathcal{E}$ también se conserva, esta igualdad se puede escribir en la forma

$$\frac{\sum \mathcal{E}\mathbf{r}}{\sum \mathcal{E}} - \frac{c^2 \sum \mathbf{p}}{\sum \mathcal{E}}\, t = \text{const}.$$

De ahí se sigue que el punto determinado por el vector posición

$$\mathbf{R} = \frac{\sum \mathcal{E}\mathbf{r}}{\sum \mathcal{E}} \tag{14.6}$$

se mueve uniformemente con la velocidad

$$\mathbf{V} = \frac{c^2 \sum \mathbf{p}}{\sum \mathcal{E}}, \tag{14.7}$$

que no es sino la velocidad del movimiento del sistema como un todo (velocidad que corresponde, según (9.8), a su energía e impulso totales). La fórmula (14.6) es la definición relativista de las coordenadas del *centro de masa* del sistema. Si las velocidades de todas las partículas son pequeñas comparadas con c, podemos hacer, aproximadamente, $\mathcal{E} \approx mc^2$ y **(14.6)** se transforma en la expresión clásica ordinaria $\mathbf{R} = \frac{\sum m\mathbf{r}}{\sum m}$ †.

Conviene observar que las componentes del vector (14.6) no constituyen las componentes espaciales de un cuadrivector y que, por ello, al pasar a otro sistema de referencia no se transforman como las coordenadas de un punto. En consecuencia, el centro de masa de un mismo sistema de partículas con relación a diferentes sistemas de referencia viene representado por puntos distintos.

PROBLEMA

Hallar la relación entre el momento cinético $\mathbf{M}$ de un cuerpo (de un sistema de partículas) en el sistema de referencia K respecto del cual el cuerpo se mueve con velocidad $\mathbf{V}$ y $\mathbf{M}_0$, su momento cinético en el sistema de referencia K_0 en el que el cuerpo en conjunto se halla en reposo; en ambos casos el momento cinético se determina con relación a un mismo punto — el centro de masa del cuerpo en el sistema K_0 ††.

Solución. El sistema K_0 se mueve respecto de K con velocidad $\mathbf{V}$; elijamos su dirección como eje x. Las componentes del tensor M^{ik} que nos interesan se transforman según las fórmulas (cf. el problema 2 del § 6):

$$M^{12} = \frac{M^{(0)12} + \frac{V}{c} M^{(0)02}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad M^{13} = \frac{M^{(0)13} + \frac{V}{c} M^{(0)03}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad M^{23} = M^{(0)23}.$$

† Véase *Mecánica*, § 8. Conviene hacer notar que mientras la fórmula clásica para el centro de masa se aplica a sistemas tanto de partículas en interacción, como de partículas libres, la fórmula (14.6) vale sólo si se prescinde de la interacción. En mecánica relativista la definición del centro de masa de un sistema de partículas en interacción nos obliga a tener en cuenta explícitamente el impulso y la energía del campo que producen.

†† Recordemos que aunque en el sistema K_0 (en el cual $\Sigma\mathbf{p} = 0$) el momento cinético no depende del punto con relación al cual se define dicho momento, en el sistema K (en el cual $\Sigma\mathbf{p} \neq 0$) el momento cinético depende del punto elegido para definirlo (cf. Mecánica, § 9).

Dado que como origen de coordenadas se ha elegido el centro de masa del cuerpo (en el sistema K_0), en este sistema se tendrá $\Sigma \mathbf{r} = 0$, y dado que en él también $\Sigma \mathbf{p} = 0$, se tendrá $M^{(0)02} = M^{(0)03} = 0$. Teniendo en cuenta la relación entre las componentes M^{ik} y el vector $\mathbf{M}$, se encuentra para este último:

$$M_x = M_x^{(0)}, \quad M_y = \frac{M_y^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad M_z = \frac{M_z^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

CAPÍTULO 3

CARGAS EN CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

§ 15. Las partículas elementales en teoría de la relatividad

La interacción mutua de las partículas se puede describir mediante el concepto de *campo* de fuerzas. Es decir, en vez de hablar de la acción de una partícula sobre otra, podemos decir que la partícula crea un campo en torno de sí; determinada fuerza actúa entonces sobre cada una de las otras partículas situadas en este campo. En mecánica clásica, el campo es meramente un modo de describir un fenómeno físico — la interacción de las partículas. En teoría de la relatividad, en cambio, debido al valor finito de la velocidad de propagación de las interacciones, el estado de cosas cambia radicalmente. Las fuerzas que actúan sobre una partícula en un instante dado no están determinadas por las posiciones de las demás en el mismo instante. Un cambio en la posición de una de las partículas repercute sobre las otras partículas tan sólo después de transcurrido un cierto tiempo. Esto significa que el propio campo cobra realidad física. No podemos hablar de una interacción directa de partículas colocadas a distancia las unas de las otras. Las interacciones pueden ocurrir en un instante cualquiera tan sólo entre puntos vecinos en el espacio (interacciones de contacto). Debemos hablar, por esto, de la interacción de una partícula con el campo y de la ulterior interacción del campo con una segunda partícula.

Consideraremos dos tipos de campos, el gravitatorio y el electromagnético. Al estudio del campo gravitatorio se dedican los capítulos del X al XII. En los demás capítulos consideraremos tan sólo los campos electromagnéticos.

Antes de examinar las interacciones de las partículas con el campo electromagnético, haremos algunas consideraciones generales relativas al concepto de « partícula » en mecánica relativista.

En mecánica clásica se puede introducir el concepto de cuerpo rígido, es decir, un cuerpo cuya deformación es absolutamente imposible. En teoría de la relatividad, el mismo punto de vista nos llevaría a considerar como rígidos aquellos cuerpos cuyas dimensiones permanecen invariables en el sistema de referencia en que se encuentran en reposo. Sin embargo, es fácil ver que la teoría de relatividad hace imposible con carácter general la existencia de cuerpos absolutamente rígidos.

Consideremos, por ejemplo, un disco circular que gira en torno a su eje y supongamos que este disco es rígido. Un sistema de referencia solidario del disco no es, evidentemente, un sistema inercial. Con todo, es posible introducir para cada uno de los elementos infinitesimales del disco un sistema inercial en el que este elemento se encuentre en reposo en el instante en cuestión; para diferentes elementos del disco, que poseen diferentes velocidades, estos sistemas serán, claro está, también diferentes. Consideremos una serie de elementos de longitud a lo largo de un determinado radio. Debido a la rigidez del disco, en el correspondiente sistema de referencia inercial la longitud de cada uno de estos segmentos será la misma que la que tenían cuando el disco estaba en reposo. Pero esta misma longitud sería la obtenida por un observador en reposo por delante del cual pasa el radio vector en el instante dado, puesto que cada uno de sus segmentos es perpendicular a su velocidad y, en consecuencia, no se produce la contracción de Lorentz. La longitud total del radio medida por el observador en reposo, que será la suma de las longitudes de dichos segmentos, coincidirá, por lo tanto, con el valor que se obtenía en el caso del disco en reposo. Por otra parte, la longitud de cada elemento de la circunferencia del disco que pasa, en un instante dado, por delante de un observador en reposo experimenta una contracción de Lorentz, de modo que la longitud de la circunferencia (medida por el observador en reposo como suma de las longitudes de los diferentes arcos) resulta ser menor que la longitud de la circunferencia del disco en reposo. Llegamos así a la conclusión de que en la rotación del disco la razón de la longitud de la circunferencia a la longitud del radio (medidas por un observador en reposo) debería cambiar, en vez de conservarse igual a 2π. El absurdo que supone este resultado indica que, en realidad, el disco no puede ser rígido y que al entrar en rotación debe experimentar necesariamente cierta deformación compleja que depende de las propiedades elásticas del material que lo forma.

La imposibilidad de que existan cuerpos absolutamente rígidos puede ponerse de manifiesto de otra manera. Supongamos que un cuerpo sólido se pone en movimiento por la acción de una fuerza exterior que actúa sobre uno de sus puntos. Si el cuerpo fuera absolutamente rígido, todos sus puntos deberían ponerse en movimiento en el mismo instante en que comienza a moverse el punto en que se aplica la fuerza, pues si así no ocurriera el cuerpo sufriría una deformación. Sin embargo, la teoría de la relatividad afirma que esto es imposible, ya que la fuerza aplicada a aquel punto se transmite a los demás con una velocidad finita y, por lo tanto, no es posible que todos los puntos se pongan en movimiento simultáneamente.

De esta discusión podemos deducir ciertas conclusiones relativas a cómo tratar las partículas *elementales*, es decir, las partículas cuyo estado mecánico se puede describir completamente, por hipótesis, mediante sus tres coordenadas y las tres componentes de su velocidad en conjunto. Es evidente que si una partícula elemental tuviese dimensiones no nulas, esto es, si poseyera una cierta extensión en el espacio, no podría deformarse, dado que el concepto de deformación está ligado al de posi-

bilidad de movimiento independiente de las diferentes partes del cuerpo. Pero, conforme acabamos de ver, la teoría de la relatividad prueba que es imposible que existan cuerpos absolutamente rígidos.

Llegamos así a la conclusión de que en mecánica relativista clásica (no-cuántica) no podemos atribuir dimensiones finitas a las partículas que consideramos elementales. Con otras palabras, dentro del marco de la teoría clásica las partículas elementales deben considerarse como puntos †.

§ 16. Cuadripotencial de un campo

La acción correspondiente a una partícula que se mueve en un campo electromagnético dado se compone de dos partes: la acción (8.1) para la partícula libre, y un término que describe la interacción de la partícula con el campo. Este último término debe contener magnitudes que caracterizan a la partícula y magnitudes que caracterizan al campo.

Las propiedades de una partícula respecto a su interacción con el campo electromagnético resultan estar determinadas por un solo parámetro — la *carga e* de la partícula, que puede ser una cantidad positiva o negativa (o igual a cero)††. Las propiedades del campo, en cambio, están caracterizadas por un cuadrivector A_i, el *cuadripotencial*, cuyas componentes son funciones de las coordenadas y del tiempo. Estas magnitudes aparecen en la función acción como término de la forma

$$-\frac{e}{c}\int_a^b A_i\,dx^i,$$

donde las funciones A_i se toman en puntos de la línea de universo de la partícula. El factor $1/c$ se ha introducido aquí por conveniencia. Hay que señalar que, al no contar por el momento con fórmulas que relacionen la carga o los potenciales con cantidades ya conocidas, las unidades para medir estas nuevas cantidades se pueden elegir arbitrariamente †††.

---

† Aunque la mecánica cuántica altera fundamentalmente esta situación, sin embargo también aquí la teoría relativista hace extremadamente difícil introducir interacciones que no sean interacciones locales.

††Esta proposición y las que siguen deben considerarse, en buena medida, como resultado de datos experimentales. La forma de la acción para una partícula en un campo electromagnético no puede determinarse basándose solamente en consideraciones generales, como, por ejemplo, la condición de invariancia relativista (ésta no se opone a que en la fórmula (16.1) figure un término de la forma $\int A\,ds$, donde A es una función escalar).

Para evitar cualquier mala interpretación, repetiremos una vez más que estamos considerando una teoría clásica (y no cuántica) y que, por consiguiente, no se tienen en cuenta efectos ligados con el spin de las partículas.

††† Acerca del establecimiento de estas unidades, véase § 27.

Por consiguiente, la función acción correspondiente a una carga en un campo electromagnético tiene la forma

$$S = \int_a^b \left(-mc\, ds - \frac{e}{c} A_i\, dx^i \right). \tag{16.1}$$

Las tres componentes espaciales del cuadrivector A_i forman un vector de tres dimensiones **A** llamado *potencial vector* del campo. La componente temporal del cuadrivector A_i la escribiremos en la forma $A_0 = \phi$. La cantidad ϕ se llama *potencial escalar* del campo. Tenemos así

$$\mathrm{A}^i = (\phi, \mathbf{A}) \tag{16.2}$$

La integral de acción se puede escribir, por lo tanto, en la forma

$$S = \int_a^b \left(-mc\, ds + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - e\phi\, dt \right).$$

o, introduciendo la velocidad de la partícula $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ y tomando t como variable de integración,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi \right) dt. \tag{16.3}$$

El integrando es precisamente la función de Lagrange de una carga en un campo electromagnético:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi. \tag{16.4}$$

Esta expresión difiere de la función de Lagrange de una partícula libre (8.2) en los términos $\dfrac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi$, que describen la interacción de la carga con el campo.

La derivada $\partial L / \partial \mathbf{v}$ es el impulso generalizado de la partícula; lo representaremos por **P**. Efectuando la derivación, se encuentra:

$$\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}. \tag{16.5}$$

Hemos representado aquí por **p** el impulso de la partícula en sentido ordinario, al que llamaremos, simplemente, impulso.

De la función de Lagrange se deduce la función de Hamilton correspondiente a una partícula en un campo mediante la conocida fórmula general

$$\mathcal{H} = \mathbf{v}\cdot\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L.$$

Substituyendo aquí (16.4), se encuentra

$$\mathcal{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} + e\phi. \tag{16.6}$$

Sin embargo, la función de Hamilton se debe expresar no en función de la velocidad, sino en función del impulso generalizado de la partícula.

De (16.5) y (16.6) resulta fácilmente que la relación entre $\mathcal{H}-e\phi$ y $\mathbf{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}$ es la misma que la que existe entre $\mathcal{H}$ y **p** en ausencia del campo, esto es,

$$\left(\frac{\mathcal{H}-e\phi}{c}\right)^2 = m^2c^2 + \left(\mathbf{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2, \tag{16.7}$$

o de otra manera,

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\mathbf{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2} + e\phi. \tag{16.8}$$

Para velocidades pequeñas, es decir, en el caso de la mecánica clásica, la función de Lagrange (16.4) se transforma en

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} - e\phi. \tag{16.9}$$

En esta aproximación,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A},$$

y para la función de Hamilton se encuentra la expresión siguiente:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\phi. \tag{16.10}$$

Finalmente, escribamos la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula en un campo electromagnético. Esta ecuación se obtiene substituyendo en la ex-

presión de la función de Hamilton **P** por $\partial S/\partial \mathbf{r}$ y el propio $\mathcal{H}$ por $-\dfrac{\partial S}{\partial t}$. Se obtiene así, partiendo de (16.7),

$$\left(\nabla S-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\phi\right)^2+m^2c^2=0. \tag{16.11}$$

§ 17. Las ecuaciones del movimiento de una carga en un campo

Una carga situada en un campo no sólo está sujeta a la fuerza que el campo ejerce sobre ella, sino que a su vez actúa sobre el campo modificándolo. Sin embargo, si la carga e no es grande, se puede prescindir de la acción de la carga sobre el campo. En este caso, al considerar el movimiento de la carga en un campo dado, podemos admitir que el campo en sí no depende ni de las coordenadas ni de la velocidad de la carga. Las condiciones precisas que debe cumplir la carga para que se pueda considerar pequeña en este sentido se pondrán de manifiesto más adelante (véase § 75). En lo que sigue admitiremos que se cumplen estas condiciones.

Se trata, pues, de hallar las ecuaciones del movimiento de una carga en un campo electromagnético dado. Estas ecuaciones se encuentran variando la acción, esto es, vienen dadas por las ecuaciones de Lagrange,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right)=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}, \tag{17.1}$$

con L definida por la fórmula (16.4).

La derivada $\partial L/\partial \mathbf{v}$ es el impulso generalizado de la partícula (16.5). Hagamos, además,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}=\nabla L=\frac{e}{c}\operatorname{grad}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}-e\operatorname{grad}\phi.$$

Ahora bien, según una conocida fórmula del análisis vectorial,

$$\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}+(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}+\mathbf{b}\times\operatorname{rot}\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{b},$$

donde **a** y **b** son dos vectores arbitrarios. Aplicándola al producto $\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$ y recordando que la derivación respecto de **r** se efectúa manteniendo **v** constante, se encuentra que

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}=\frac{e}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}+\frac{e}{c}\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}-e\operatorname{grad}\phi.$$

La ecuación de Lagrange, por consiguiente, tiene la forma

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p}+\frac{e}{e}\mathbf{A}\right)=\frac{e}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}+\frac{e}{c}\mathbf{v}\times \text{ rot } \mathbf{A}-e \text{ grad}\,\phi\,.$$

Pero la diferencial total $\frac{d\mathbf{A}}{dt}\,dt$ consta de dos términos: el cambio $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\,dt$ del potencial vector con el tiempo en un punto fijo del espacio y el cambio debido al paso de un punto del espacio a otro separado $d\mathbf{r}$. Este segundo término, como es sabido por el análisis vectorial, vale $(d\mathbf{r}\cdot\nabla)\,\mathbf{A}$. Por consiguiente,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}.$$

Substituyendo esta expresión en la ecuación anterior, se encuentra que

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=-\frac{e}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}-e \text{ grad}\,\phi+\frac{e}{c}\mathbf{v}\times \text{ rot } \mathbf{A}. \tag{17.2}$$

Ésta es la ecuación del movimiento de una partícula en un campo electromagnético. En el primer miembro aparece la derivada del impulso de la partícula respecto del tiempo. Por lo tanto, la expresión que aparece en el segundo miembro de (17.2) es la fuerza que actúa sobre la carga en el campo electromagnético. Vemos, pues, que esta fuerza consta de dos partes. La primera parte [el primero y segundo términos del segundo miembro de (17.2)] no depende de la velocidad de la partícula. La segunda parte (tercer término) depende de la velocidad, siendo proporcional a ésta y perpendicular a la misma.

La fuerza del primer tipo, por unidad de carga, se llama intensidad del *campo eléctrico;* la representaremos por **E**. Por definición, pues,

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}-\text{grad}\,\phi. \tag{17.3}$$

El factor que multiplica a $\mathbf{v}/c$ en la fuerza del segundo tipo, por unidad de carga, se llama intensidad del *campo magnético;* lo representaremos por **H**. Por definición, pues,

$$\mathbf{H}=\text{rot } \mathbf{A}. \tag{17.4}$$

Si en un campo electromagnético es $\mathbf{E}\neq 0$, pero $\mathbf{H}=0$, diremos que se trata de un *campo eléctrico;* en cambio, si $\mathbf{E}=0$, pero $\mathbf{H}\neq 0$, del campo se dice que es un *campo magnético*. En general, el campo electromagnético es una superposición de campos eléctrico y magnético.

Obsérvese que **E** es un vector polar y **H** un vector axil.

La ecuación del movimiento de una carga en un campo electromagnético puede ahora escribirse en la forma

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}. \tag{17.5}$$

La expresión que aparece en el segundo miembro se llama *fuerza de Lorentz*. El primer término — la fuerza que el campo eléctrico ejerce sobre la carga — no depende de la velocidad de la carga y es paralelo al vector **E**. El segundo término — la fuerza que el campo magnético ejerce sobre la carga — es proporcional a la velocidad de la carga y perpendicular a la velocidad y al campo magnético **H**.

Para velocidades pequeñas frente a la velocidad de la luz, el impulso **p** es aproximadamente igual a su expresión clásica $m\mathbf{v}$ y la ecuación del movimiento (17.5) se transforma en

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}, \tag{17.6}$$

Determinemos ahora la ecuación que da la variación de la energía cinética de la partícula con el tiempo †, es decir la derivada

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{cin}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Es fácil comprobar que

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{cin}}}{dt} = \mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Substituyendo en vez de $d\mathbf{p}/dt$ la expresión (17.5) y observando que $(\mathbf{v}\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{v} = 0$, se tiene

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{cin}}}{dt} = e\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}. \tag{17.7}$$

La variación de la energía cinética por unidad de tiempo es el trabajo realizado por el campo sobre la partícula (por unidad de tiempo). La fórmula (17.7) prueba que este trabajo es igual al producto de la velocidad por la fuerza que el campo

† Entendemos aquí y a continuación por « cinética » la energía (9.4), incluida la energía en reposo.

eléctrico ejerce sobre la carga. El trabajo realizado por el campo durante un tiempo dt, es decir, durante el corrimiento $d\mathbf{r}$ de la carga, es igual, evidentemente, a $e\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$.

Conviene subrayar el hecho de que sólo el campo eléctrico realiza trabajo sobre la carga; el campo magnético no realiza trabajo alguno sobre una carga que se mueve en él. Esto último resulta del hecho de que la fuerza que el campo magnético ejerce sobre una carga es siempre perpendicular a la velocidad de la misma.

Las ecuaciones de la mecánica son invariantes respecto de un cambio en el signo del tiempo, esto es, respecto del intercambio de futuro y pasado. Dicho de otra manera, en mecánica los dos sentidos del tiempo son equivalentes, es decir, el tiempo es isótropo. Esto significa que si un cierto movimiento es posible de acuerdo con las ecuaciones de la mecánica, el movimiento inverso es también posible, movimiento en que el sistema pasa por los mismos estados en orden inverso.

Es fácil ver que esto es también válido para el campo electromagnético en la teoría de la relatividad. En este caso, sin embargo, a la vez que se cambia t en $-t$ hemos de cambiar el signo del campo magnético. En efecto, es fácil ver que las ecuaciones del movimiento (17.5) subsisten inalteradas si se hace el cambio

$$t \to -t, \quad \mathbf{E} \to \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \to -\mathbf{H}. \tag{17.8}$$

De acuerdo con (17.3) y (17.4), esta transformación no modifica el potencial escalar, mientras que el potencial vector cambia de signo:

$$\phi \to \phi, \quad \mathbf{A} \to -\mathbf{A}, \tag{17.9}$$

De esta manera, si un cierto movimiento es posible en un campo electromagnético, el movimiento inverso es también posible en un campo en el que se invierte el sentido de $\mathbf{H}$.

PROBLEMA

Expresar la aceleración de una partícula en función de su velocidad y de las intensidades de los campos eléctrico y magnético.

Solución. En la ecuación del movimiento (17.5) substitúyase $\mathbf{p}$ por $\mathbf{p} = \mathbf{v}\mathcal{C}_{cin}/c^2$ y tómese para $d\mathcal{C}_{cin}/dt$ la expresión que resulta de (17.7). Se obtendrá así

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}-\frac{1}{c^2}\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E})\right\}.$$

§ 18. **Invariancia de contraste**

Veamos hasta que punto están unívocamente determinados los potenciales del

campo. Ante todo conviene tener en cuenta que el campo está caracterizado por el efecto que produce sobre el movimiento de una carga colocada en él. Pero en la ecuación del movimiento (17.5) aparecen, no los potenciales, sino las intensidades del campo **E** y **H**. Por consiguiente, dos campos son físicamente idénticos si están caracterizados por los mismos vectores **E** y **H**.

Si se nos dan los potenciales **A** y ϕ, éstos determinan unívocamente, según (17.3) y (17.4), los vectores **E** y **H**, y, por consiguiente, también el campo. Sin embargo, a un mismo campo pueden corresponder diferentes potenciales. Para comprobarlo, sumemos a cada componente del potencial la cantidad $\partial f/\partial x^k$, donde f es una función arbitraria de las coordenadas y del tiempo. El potencial A_k se transforma entonces en

$$A'_k = A_k + \frac{\partial f}{\partial x^k}. \tag{18.1}$$

Como consecuencia de este cambio aparece en la integral de acción (16.1) el término adicional,

$$\frac{e}{c}\frac{\partial f}{\partial x^k}dx^k = \frac{e}{c}df, \tag{18.2}$$

que es una diferencial exacta y carece de efecto sobre las ecuaciones del movimiento (véase **Mecánica** § 2.)

Si en vez del cuadripotencial introducimos los potenciales escalar y vectorial y en vez de x^4, las coordenadas x, y, z, ct, las cuatro ecuaciones (18.1) se pueden escribir en la forma:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f, \quad \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{18.3}$$

Es fácil comprobar que los campos eléctrico y magnético determinados por las ecuaciones (17.3) y (17.4) no cambian al substituir **A** y ϕ por **A**′ y ϕ', definidos por (18.3). La transformación de potenciales (18.3) no cambia, pues, los campos. Los potenciales no están, por consiguiente, unívocamente definidos; el potencial vector está determinado salvo el gradiente de un escalar arbitrario y el potencial escalar lo está salvo la derivada con relación al tiempo del mismo escalar.

En particular, evidentemente se puede sumar un vector constante arbitrario al potencial vector y una constante arbitraria al potencial escalar. Este último resultado es consecuencia directa del hecho de que en la definición de **E** y **H** aparecen sólo las derivadas de **A** y ϕ y, por lo tanto, la adición a estas últimas cantidades de otras que son constantes no afecta a las intensidades del campo.

Sólo las cantidades que son invariantes con relación a la transformación (18.3) de los potenciales tienen sentido físico; en particular, todas las ecuaciones tienen que ser invariantes en esta transformación. Esta invariancia se llama *invariancia de contraste* (en alemán Eichinvarianz, en inglés gauge invariance, en ruso gradientnaia (o kalibrovochnaia) invariantnost').

Esta no-unicidad de los potenciales nos da siempre la posibilidad de elegirlos de manera que cumplan una condición suplementaria — una, dado que podemos elegir arbitrariamente una función f en (18.3). En particular, es siempre posible elegir los potenciales de forma que el potencial escalar ϕ sea nulo. Si el potencial vector no es cero, no es entonces posible, en general, reducirlo a cero, dado que la condición $\mathbf{A} = 0$ equivale a tres condiciones suplementarias (una para cada una de las componentes de **A**).

§ 19. Campo electromagnético constante

Por campo electromagnético *constante* entendemos un campo que no depende del tiempo. Es evidente que los potenciales de un campo constante se pueden elegir de manera que sean funciones tan sólo de las coordenadas, pero no del tiempo. Un campo magnético constante es igual, como antes, a $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Un campo eléctrico constante, en cambio, es igual a

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi. \tag{19.1}$$

Por consiguiente, un campo eléctrico constante está determinado por el potencial escalar solamente y un campo magnético constante tan sólo por el potencial vector.

Vimos en el párrafo anterior que los potenciales del campo no están unívocamente determinados. Sin embargo, es fácil comprobar que si describimos un campo electromagnético constante mediante potenciales que no dependen del tiempo, podemos sumar al potencial escalar, sin cambiar los campos, sólo una constante arbitraria (que no depende ni de las coordenadas ni del tiempo). Por lo general, ϕ se somete a la condición suplementaria de que tome un valor dado en un punto dado del espacio; lo más frecuente es imponer a ϕ la condición de que se anule en el infinito. En estas condiciones, queda determinada incluso la constante arbitraria antes mencionada y el potencial escalar del campo constante queda así fijado unívocamente.

Por el contrario, por lo visto antes el potencial vector no está unívocamente

determinado ni aun para el campo electromagnético constante; podemos sumarle, en efecto, el gradiente de un escalar arbitrario, función de las coordenadas.

Determinemos ahora la energía de una carga en un campo electromagnético constante. Si el campo es constante, la función de Lagrange de la carga no depende tampoco explícitamente del tiempo. Como es sabido, en este caso la energía se conserva y coincide con la función de Hamilton:

De acuerdo con (16.6) se tiene:

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\phi. \tag{19.2}$$

La presencia del campo añade así a la energía de la partícula el término $e\phi$, la energía potencial de la carga en el campo. Obsérvese el hecho importante de que la energía depende sólo del potencial escalar, pero no del potencial vector. Esto significa que el campo magnético no influye en la energía de las cargas; sólo el campo eléctrico puede cambiar la energía de la partícula. Esta circunstancia está ligada con el hecho de que el campo magnético, en contraste con el campo eléctrico, no efectúa trabajo alguno sobre la carga.

Si la intensidad del campo es la misma en todos los puntos del espacio, se dice del campo que es *uniforme*. El potencial escalar de un campo eléctrico uniforme se puede expresar en función de la intensidad del campo de acuerdo con la igualdad

$$\phi = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{r}. \tag{19.3}$$

En efecto, dado que $\mathbf{E} = \text{const}$, se tiene $\nabla(\mathbf{E}\cdot\mathbf{r}) = (\mathbf{E}\cdot\nabla)\,\mathbf{r} = \mathbf{E}$.

El potencial vector de un campo magnético uniforme se puede expresar en función de la intensidad del campo mediante la fórmula

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{2}\mathbf{H}\times\mathbf{r}. \tag{19.4}$$

En efecto, recordando que $\mathbf{H} = \text{const}$, se obtiene, mediante fórmulas conocidas del análisis vectorial:

$$\text{rot}\ (\mathbf{H}\times\mathbf{r}) = \mathbf{H}\,\text{div}\ \mathbf{r} - (\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{r} = 2\mathbf{H}$$

(recuérdese que $\text{div}\ \mathbf{r} = 3$).

El potencial vector de un campo magnético uniforme puede elegirse también de otro modo, por ejemplo en la forma,

$$A_z = -Hy, \quad A_y = A_z = 0 \tag{19.5}$$

(el eje Z es paralelo al vector **H**). Es fácil comprobar que aun con esta elección de **A** subsiste la igualdad $\mathbf{H} = \text{rot}\,\mathbf{A}$. De acuerdo con las fórmulas de transformación (18.3), los potenciales (19.4) y (19.5) difieren entre sí en el gradiente de un cierto escalar: la fórmula (19.5) se obtiene a partir de (19.4) sumándole ∇f, donde $f = -xyH/2$.

PROBLEMA

Formular el principio variacional, en mecánica relativista, para la trayectoria de una partícula (principio de Maupertuis) en un campo electromagnético constante.

Solución. El principio de Maupertuis afirma que si la energía total de una partícula se conserva (movimiento en un campo constante), su trayectoria se puede determinar a partir de la ecuación variacional

$$\delta \int \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

en la que **P** es el impulso generalizado de la partícula, expresado en función de la energía y de las derivadas de las coordenadas, y la integral se toma a lo largo de la trayectoria de la partícula †. Substituyendo en vez de **P** la expresión $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$ y observando que las direcciones de **p** y $d\mathbf{r}$ coinciden, tenemos

$$\delta \int \left(p\, dl + \frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \right) = 0,$$

donde $dl = \sqrt{d\mathbf{r}^2}$ es el elemento de arco. Despejando p a partir de $p^2 + m^2c^2 = \left(\frac{\mathcal{E} - e\varphi}{c}\right)^2$, se obtiene finalmente

$$\delta \int \left\{ \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E} - e\varphi}{c}\right)^2 - m^2c^2}\, dl + \frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \right\} = 0.$$

§ 20. Movimiento en un campo eléctrico uniforme constante

Consideremos el movimiento de una carga e en un campo eléctrico constante uniforme **E**. Tomemos el eje X en la dirección del campo. El movimiento tendrá lugar, evidentemente, en un plano, que elegimos como plano XY. La ecuación del movimiento (17.5) toma entonces la forma

$$\dot{p}_x = eE, \quad \dot{p}_y = 0$$

† Véase *Mecánica*, § 44.

(el punto sobre una letra indica derivación respecto del tiempo), de donde,

$$p_x = eEt, \quad p_y = p_0. \tag{20.1}$$

Se ha tomado como origen del tiempo el instante en que $p_x = 0$; $\mathbf{p}_0$ es el impulso de la partícula en dicho instante.

La energía cinética de la partícula (es decir, la energía prescindiendo de la energía potencial en el campo) es igual a $\mathcal{E}_{\text{cin}} = c\sqrt{m^2c^2+p^2}$. Substituyendo (20.1), encontramos en nuestro caso,

$$\mathcal{E}_{\text{cin}} = \sqrt{m^2c^4+c^2p_0^2+(ceEt)^2} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2+(ceEt)^2}, \tag{20.2}$$

donde $\mathcal{E}_0$ es la energía en el instante $t = 0$.

De acuerdo con (9.8), la velocidad de la partícula es $\mathbf{v} = \mathbf{p}c^2/\mathcal{E}_{cin}$. Para la velocidad $v_x = \dot{x}$ tenemos, por consiguiente,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x c^2}{\mathcal{E}_{\text{cin}}} = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2+(ceEt)^2}}.$$

Integrando se encuentra

$$x = \frac{1}{eE}\sqrt{\mathcal{E}_0^2+(ceEt)^2}. \tag{20.3}$$

(la constante de integración se ha elegido igual a 0) †.

Para determinar y, tenemos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_y c^2}{\mathcal{E}_{\text{cin}}} = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2+(ceEt)^2}},$$

de donde,

$$y = \frac{p_0 c}{eE}\,\text{arsenh}\left(\frac{ceEt}{\mathcal{E}_0}\right). \tag{20.4}$$

La ecuación de la trayectoria se obtiene expresando t en función de y a partir de (20.4) y substituyendo en (20.3). Esto da

$$x = \frac{\mathcal{E}_0}{eE}\cosh\frac{eEy}{p_0 c}. \tag{20.5}$$

† Este resultado (para $p_0 = 0$) coincide con la solución del problema del movimiento relativista con « aceleración propia » constante $w_0 = eE/m$ (véase el problema en el § 7). En el presente caso, la constancia de la aceleración está ligada con el hecho de que el campo eléctrico no cambia en las transformaciones de Lorentz caracterizadas por velocidades V dirigidas en el sentido del campo (véase § 24).

En un campo eléctrico uniforme una carga se mueve, por consiguiente, a lo largo de una catenaria.

Si la velocidad de la partícula es $v \ll c$, podemos hacer $p_0 = mv_0$. $\mathcal{E}_0 = mc^2$; desarrollando (20.5) en serie de potencias de $1/c$, obtenemos entonces, salvo términos de orden superior,

$$x = \frac{eE}{2mv_0^2} y^2 + \text{const},$$

esto es, la carga se mueve a lo largo de una parábola, resultado éste bien conocido en mecánica clásica.

§ 21. Movimiento en un campo magnético uniforme constante

Consideremos ahora el movimiento de una carga e en un campo magnético uniforme $\mathbf{H}$. Elijamos el eje Z en la dirección del campo. La ecuación del movimiento

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}$$

la escribiremos en otra forma, substituyendo en vez del impulso el valor dado por (9.8)

$$\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}\mathbf{v}}{c^2},$$

donde $\mathcal{E}$ es la energía de la partícula, que es constante en un campo magnético. La ecuación del movimiento toma entonces la forma

$$\frac{\mathcal{E}}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \tag{21.1}$$

o bien, en términos de las componentes,

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \qquad \dot{v}_y = -\omega v_x, \qquad \dot{v}_z = 0, \tag{21.2}$$

donde se ha hecho

$$\omega = \frac{ecH}{\mathcal{E}}. \tag{21.3}$$

Multipliquemos la segunda ecuación (21.2) por i y sumemos el producto a la primera. Se tendrá:

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y),$$

de modo que

$$v_x + iv_y = ae^{-i\omega t},$$

donde a es una constante compleja. Ésta puede escribirse en la forma $a = v_{0t}\, e^{-i\alpha}$, donde v_{0t} y α son reales. En estas condiciones

$$v_x + iv_y = v_{0t}\, e^{-i(\omega t+\alpha)}$$

y separando las partes real e imaginaria, se encuentra

$$v_x = v_{0t} \cos(\omega t+\alpha), \qquad v_y = -v_{0t} \operatorname{sen}(\omega t+\alpha). \tag{21.4}$$

Las constantes v_{0t} y α se determinan a partir de las condiciones iniciales; α es la fase inicial; en cuanto a v_{0t}, de (21.4) se sigue sin más que

$$v_{0t} = \sqrt{v_x^2+v_y^2},$$

esto es, v_{0t} es la velocidad de la partícula en el plano XY, que se conserva constante en todo el movimiento.

De (21.4) se deduce, integrando de nuevo,

$$x = x_0 + r \operatorname{sen}(\omega t+\alpha), \qquad y = y_0 + r \cos(\omega t+\alpha), \tag{21.5}$$

donde,

$$r = \frac{v_{0t}}{\omega} = \frac{v_{0t}\,\mathcal{E}}{ecH} = \frac{cp_t}{eH} \tag{21.6}$$

(p_t es la proyección del impulso sobre el plano XY). De la tercera ecuación (21.2) se deduce que $v_z = v_{0z}$ y que

$$z = z_0 + v_{0z}\, t. \tag{21.7}$$

Las fórmulas (21.5) y (21.7) muestran claramente que la carga, en un campo magnético uniforme, se mueve a lo largo de una hélice cuyo eje está dirigido en el sentido del campo magnético y cuyo radio r viene dado por (21.6). La velocidad de la partícula es constante. En el caso particular en que $v_{0z} = 0$, esto es, cuando la componente de la velocidad de la carga a lo largo del campo es nula, la carga se mueve siguiendo una circunferencia en un plano perpendicular a la dirección del campo.

La magnitud ω, como se deduce de las fórmulas, es la frecuencia angular de rotación de la partícula en el plano perpendicular al campo.

Si la velocidad de la partícula es pequeña, podemos hacer, aproximadamente, $\mathcal{E} = mc^2$. La frecuencia ω pasa a ser entonces

$$\omega = \frac{eH}{mc}. \tag{21.8}$$

Supongamos ahora que el campo magnético sigue siendo uniforme, pero que varía lentamente en magnitud y en dirección. Veamos cómo cambia el movimiento de la partícula en este caso.

Es sabido que cuando las condiciones del movimiento cambian lentamente, ciertas cantidades, llamadas invariantes adiabáticos, permanecen constantes. Dado que el movimiento en el plano perpendicular al campo magnético es periódico, un invariante adiabático lo es la integral $I = \frac{1}{2\pi}\oint \mathbf{P}_t \cdot d\mathbf{r}$ extendida a un período completo del movimiento, es decir, en este caso, a lo largo de una circunferencia ($\mathbf{P}_t$ es la proyección del impulso generalizado sobre el plano perpendicular a $\mathbf{H}$ †). Substituyendo $\mathbf{P}_t$ por $\mathbf{P}_t = \mathbf{p}_t + \frac{e}{c}\mathbf{A}$, tenemos:

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint \mathbf{P}_t \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2\pi}\oint \mathbf{p}_t \cdot d\mathbf{r} + \frac{e}{2\pi c}\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.$$

En el primer término, observemos que $\mathbf{p}_t$ es constante en módulo y dirigido a lo largo de $d\mathbf{r}$; al segundo término se puede aplicar el teorema de Stokes y hacer rot $\mathbf{A} = \mathbf{H}$. Se obtiene así,

$$I = rp_t + \frac{e}{2c}Hr^2,$$

donde r es el radio de la órbita. Substituyendo en vez de r la expresión (21.6), se encuentra

$$I = \frac{3cp_t^2}{2eH}. \tag{21.9}$$

Vemos, pues, que, para variaciones lentas de H, el impulso tangencial p_t varía proporcionalmente a $\sqrt{H}$.

Este resultado se puede aplicar aproximadamente también a otro caso — cuando la partícula se mueve en un campo constante que no es del todo uniforme, pero que varía poco en distancias comparables con el radio y el paso de la órbita helicoidal de la partícula.

---

† Véase *Mecánica*, § 49. En general, las integrales $\oint p\,dq$, relativas a un período de variación de una coordenada dada q, son invariantes adiabáticos. En el presente caso, los períodos para las dos coordenadas en el plano perpendicular a $\mathbf{H}$ coinciden y la integral I que hemos escrito es la suma de los dos invariantes adiabáticos correspondientes. Sin embargo, cada uno de estos invariantes por separado carece de significación especial, dado que depende de la elección (no única) del potencial vector del campo. La no-unicidad de los invariantes adiabáticos que resulta de ello refleja el hecho de que, cuando consideramos el campo magnético como uniforme en todo el espacio, es en principio imposible determinar el campo eléctrico que resulta de cambios en $\mathbf{H}$, puesto que aquél dependerá realmente de las condiciones específicas en el infinito.

En el movimiento en un campo cuasiuniforme de este tipo, la órbita circular se desplaza lentamente y el campo visto desde ella parece variar con el tiempo, aunque conservándose uniforme. La componente del impulso perpendicular a la dirección del campo varía entonces de acuerdo con la ley $p_t = \sqrt{CH}$, donde C es una constante y H es una función dada de las coordenadas. Por otra parte, al igual que en cualquier movimiento en un campo magnético constante, la energía de la partícula (y, por lo tanto, también el cuadrado de su impulso p^2) se conserva constante. Tenemos así para la componente longitudinal del impulso:

$$p_l^2 = p^2 - p_t^2 = p^2 - CH(x, y, z). \tag{21.10}$$

Dado que $p_l^2 \geqslant 0$, es evidente que la penetración de la partícula en ciertas regiones del espacio puede resultar imposible (aquellas en que $CH > p^2$). En el movimiento dirigido en el sentido de valores crecientes del campo, el radio de la trayectoria helicoidal disminuye proporcionalmente a p_t/H (es decir, proporcionalmente a $1/\sqrt{H}$) y su paso, proporcionalmente a p_l. Cuando se alcanza la frontera en la que se anula p_l, la partícula se ve reflejada en ella: conservando su rotación en la dirección primitiva, comienza a moverse en sentido opuesto al gradiente del campo.

La no-homogeneidad del campo conduce también a otro fenómeno — a un lento corrimiento transversal (deriva) del centro guía de la trayectoria helicoidal de la partícula (así se llama, en este caso, el centro de la órbita circular); a esta cuestión se dedica el problema 3 del párrafo siguiente.

Problema

Determinar la frecuencia de un oscilador espacial cargado colocado en un campo magnético uniforme constante; la frecuencia propia del oscilador (en ausencia del campo) es igual a ω_0.

Solución. Las ecuaciones de la vibración forzada del oscilador en un campo magnético (dirigido a lo largo del eje Z) son:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eH}{mc}\dot{y}, \qquad \ddot{y} + \omega_0^2 y = -\frac{eH}{mc}\dot{x}, \qquad \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0.$$

Multiplicando la segunda ecuación por i y sumando el producto a la primera, obtenemos:

$$\ddot{\zeta} + \omega_0^2 \zeta = -i\frac{eH}{mc}\dot{\zeta},$$

donde $\zeta = x + iy$. De ahí se sigue que la frecuencia del oscilador en un plano perpendicular al campo es:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{eH}{mc}\right)^2} \pm \frac{eH}{2mc}.$$

Si el campo H es débil, esta fórmula se reduce a la siguiente:

$$\omega = \omega_0 \pm eH/2mc.$$

La vibración a lo largo de la dirección del campo permanece inalterada.

§ 22. Movimiento de una carga en un campo eléctrico y un campo magnético uniformes y constantes

Consideremos finalmente el movimiento de una carga cuando existen a la vez un campo eléctrico y un campo magnético que son constantes y uniformes. Nos limitaremos al caso (no-relativista) en que la velocidad de la carga $v \ll c$, de forma que su impulso $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$; como veremos más adelante, para ello es necesario que el campo eléctrico sea pequeño comparado con el magnético.

Elijamos el eje Z en la dirección de $\mathbf{H}$ y como plano YZ el plano determinado por $\mathbf{H}$ y $\mathbf{E}$. En estas condiciones, la ecuación del movimiento

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}$$

se puede escribir en la forma:

$$m\ddot{x} = \frac{e}{c}\dot{y}H, \qquad m\ddot{y} = eE_y - \frac{e}{c}\dot{x}H, \qquad m\ddot{z} = eE_z. \tag{22.1}$$

De la tercera ecuación se deduce que la carga se mueve con movimiento uniformemente acelerado en la dirección Z, esto es,

$$z = \frac{eE_z}{2m}t^2 + v_{0z}t. \tag{22.2}$$

Multiplicando la segunda ecuación (22.1) por i y sumando el producto a la primera se encuentra

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\dot{y}) + i\omega(\dot{x} + i\dot{y}) = i\frac{e}{m}E_y$$

($\omega = eH/mc$). La integral de esta ecuación, considerando $\dot{x} + i\dot{y}$ como incógnita, es igual a la suma de la integral general de la ecuación homogénea y una integral particular de la no homogénea. La primera de ellas es $ae^{-i\omega t}$, la segunda se puede tomar igual a $eE_y/m\omega = cE_y/H$. Por consiguiente,

$$\dot{x} + i\dot{y} = ae^{-i\omega t} + \frac{cE_y}{H}.$$

La constante a es, en general, compleja. Escribiéndola en la forma $a = be^{i\alpha}$, con α y b reales, vemos que dado que a está multiplicado por $e^{-i\omega t}$, se puede, eligiendo convenientemente el origen del tiempo, dar a la fase α un valor arbitrario. Elijámoslo de forma que a sea real. Descomponiendo entonces $\dot{x} + i\dot{y}$ en parte real y parte imaginaria, se encuentra

$$\dot{x} = a\cos\omega t + \frac{cE_y}{H}, \qquad \dot{y} = -a\,\mathrm{sen}\,\omega t. \tag{22.3}$$

Para $t = 0$ la velocidad es entonces paralela al eje X.

Las componentes de la velocidad de la partícula son, por lo tanto, funciones periódicas del tiempo; sus valores medios son iguales a

$$\bar{\dot{x}} = \frac{cE_y}{H}, \qquad \bar{\dot{y}} = 0.$$

Esta velocidad media del movimiento de la carga en un campo eléctrico y uno magnético en cruz se llama frecuentemente velocidad de *deriva* eléctrica. Su dirección es perpendicular a los dos campos y es independiente del signo de la carga. Puede escribirse vectorialmente en la forma

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{c\,(\mathbf{E} \times \mathbf{H})}{H^2}. \tag{22.4}$$

Todas las fórmulas de esta sección suponen que la velocidad de la partícula es pequeña respecto de la velocidad de la luz; vemos ahora que para que esto ocurra es necesario, en particular, que los campos eléctrico y magnético cumplan la condición

$$\frac{E_y}{H} \ll 1, \tag{22.5}$$

mientras que los módulos de E_y y H pueden ser cualesquiera.

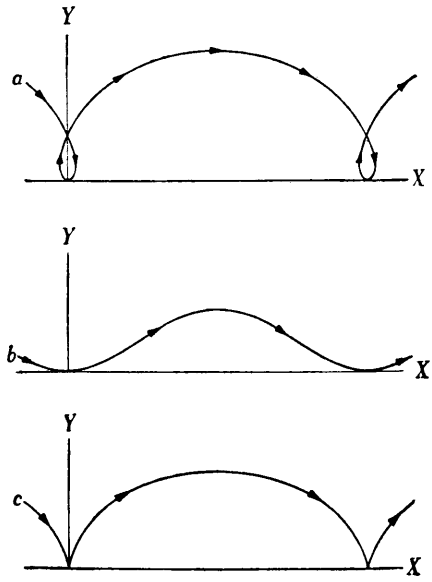

FIG. 6.

Integrando de nuevo la ecuación (22.3) y eligiendo la constante de integración de forma que para $t = 0$ sea $x = y = 0$, se obtiene:

$$x = \frac{a}{\omega}\operatorname{sen}\omega t + \frac{cE_y}{H}t; \qquad y = \frac{a}{\omega}(\cos\omega t - 1). \tag{22.6}$$

Consideradas como ecuaciones paramétricas de una curva, estas ecuaciones definen una trocoide. Según a sea mayor o menor en valor absoluto que el valor absoluto de la cantidad cE_y/H, la proyección de la trayectoria de la partícula sobre el plano XY tiene las formas representadas en las figuras 6a y 6b, respectivamente.

Si $a = -cE_y/H$, las fórmulas (22.6) se reducen a

$$x = \frac{cE_y}{\omega H}(\omega t - \operatorname{sen}\ \omega t),$$

$$y = \frac{cE_y}{\omega H}(1 - \cos \omega t) \tag{22.7}$$

esto es, la proyección de la trayectoria sobre el plano XY es una cicloide (fig. 6c).

Problemas

1. Determinar el movimiento relativista de una carga en un campo eléctrico y en un campo magnético uniformes y paralelos.

Solución. El campo magnético no influye sobre el movimiento a lo largo de la dirección común a **E** y **H** (el eje Z), movimiento que, por lo tanto, viene determinado por la sola influencia del campo eléctrico; de acuerdo con § 20, se encuentra así:

$$z = \frac{\mathcal{E}_{\text{cin}}}{eE}, \qquad \mathcal{E}_{\text{cin}} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}.$$

Para el movimiento en el plano XY tenemos la ecuación

$$\dot{p}_x = \frac{e}{c} H v_y, \quad \dot{p}_y = -\frac{e}{c} H v_x,$$

o bien,

$$\frac{d}{dt}(p_x + ip_y) = -i\frac{eH}{c}(v_x + iv_y) = -\frac{ieHc}{\mathcal{E}_{\text{cin}}}(p_x + ip_y).$$

Por consiguiente,

$$p_x + ip_y = p_t e^{-i\varphi},$$

donde p_t es el valor constante de la proyección del impulso sobre el plano XY y la cantidad auxiliar φ se define por la relación

$$d\varphi = eHc\frac{dt}{\mathcal{E}_{\text{cin}}},$$

de donde

$$ct = \frac{\mathcal{E}_0}{eE}\ \operatorname{sh}\ \frac{E}{H}\varphi. \tag{1}$$

Además, tenemos,

$$p_x + ip_y = p_t e^{-i\varphi} = \frac{\mathcal{E}_{\text{cin}}}{c^2}(\dot{x} + i\dot{y}) = \frac{eH}{c}\frac{d(x+iy)}{d\varphi},$$

de forma que

$$x = \frac{cp_t}{eH}\operatorname{sen}\varphi, \qquad y = \frac{cp_t}{eH}\cos\varphi. \tag{2}$$

Las fórmulas (1), (2) junto con la fórmula

$$z = \frac{\mathcal{E}_0}{eE}\cosh\frac{E}{H}\varphi, \tag{3}$$

determinan el movimiento de la partícula en forma paramétrica. La trayectoria es una hélice de radio cp_t/eH y de paso que crece con monotonía, a lo largo de la cual la partícula se mueve con velocidad angular decreciente $\dot{\varphi} = eHc/\mathcal{E}_{cin}$ y con una velocidad paralela al eje Z que tiende al valor c.

2. Determinar el movimiento relativista de una carga en un campo magnético y en un campo eléctrico perpendiculares entre sí y de igual módulo †.

Solución. Eligiendo el eje Z a lo largo de **H**, el eje Y a lo largo de **E** y haciendo $E = H$, escribiremos las ecuaciones del movimiento:

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{e}{c}Ev_y, \qquad \frac{dp_y}{dt} = eE\left(1-\frac{v_x}{c}\right), \qquad \frac{dp_z}{dt} = 0$$

y, como consecuencia de ellas, la fórmula (17.7),

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{cin}}}{dt} = eEv_y.$$

De estas ecuaciones se sigue que

$$p_z = \text{const}, \qquad \mathcal{E}_{\text{cin}} - cp_z = \text{const} \equiv a.$$

Utilizando también la igualdad

$$\mathcal{E}^2_{\text{cin}} - c^2p_x^2 = (\mathcal{E}_{\text{cin}} + cp_x)(\mathcal{E}_{\text{cin}} - cp_x) = c^2p_y^2 + \varepsilon^2$$

(donde $\mathcal{E}^2 = m^2c^4 + c^2p^2_z = \text{const}$), se encuentra

$$\mathcal{E}_{\text{cin}} + cp_x = \frac{1}{a}(c^2p_y^2 + \varepsilon^2),$$

y además,

$$\mathcal{E}_{\text{cin}} = \frac{a}{2} + \frac{c^2p_y^2+\varepsilon^2}{2a},$$

$$p_x = -\frac{a}{2c} + \frac{c^2p_y^2+\varepsilon^2}{2ac}.$$

Escribamos luego,

$$\mathcal{E}_{\text{cin}}\frac{dp_y}{dt} = eE\left(\mathcal{E}_{\text{cin}} - \frac{\mathcal{E}_{\text{cin}}\,v_x}{c}\right) = eE(\mathcal{E}_{\text{cin}} - cp_x) = eEa,$$

de donde

$$2eEt = \left(1+\frac{\varepsilon^2}{a^2}\right)p_y + \frac{c^2}{3a^2}p_y^3. \tag{1}$$

---

† El problema del movimiento en campos **E** y **H** perpendiculares entre sí y que no son de igual valor absoluto, se puede reducir, mediante una transformación adecuada del sistema de referencia, al problema del movimiento en un campo eléctrico puro o en un campo magnético puro (véase § 25).

Para determinar la trayectoria, efectuemos un cambio de variable en las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2 p_x}{\mathcal{E}_{cin}}, \ldots$$

pasando a la variable p_y mediante la relación $dt = \frac{\mathcal{E}_{cin}\, dp_y}{eE\alpha}$. La integración conduce luego a las fórmulas

$$x = \frac{c}{2eE}\left(-1 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2}\right) p_y + \frac{c^3}{6\alpha^2 eE} p_y^3, \tag{2}$$

$$y = \frac{c^2}{2\alpha eE} p_y^2, \qquad z = \frac{p_z c^2}{eE\alpha} p_y.$$

Las fórmulas (1) y (2) determinan completamente el movimiento de la partícula en forma paramétrica (parámetro p_y). Conviene llamar la atención sobre el hecho de que el aumento más rápido de la velocidad tiene lugar en la dirección perpendicular a **E** y **H** (el eje X).

3. Determinar la velocidad de deriva del centro guía de la órbita de una partícula cargada no-relativista en un campo magnético constante casi uniforme (*H. Alfvén*, 1940).

Solución. Supongamos primero que la partícula se mueve a lo largo de una órbita circular, es decir, que su velocidad no tiene componente longitudinal (en el sentido del campo). Representemos la ecuación de la trayectoria de la partícula en la forma $\mathbf{r} = \mathbf{R}(t) + \boldsymbol{\zeta}(t)$, donde $\mathbf{R}(t)$ es el vector posición del centro guía (que es una función lentamente variable del tiempo) y $\boldsymbol{\zeta}(t)$ es una cantidad que varía rápidamente y que representa el movimiento de rotación en torno de dicho centro. Promediemos la fuerza $\frac{e}{c}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}(\mathbf{r})$ que actúa sobre la partícula en un período del movimiento oscilatorio (circular; cf. Mecánica, § 50). Desarrollaremos la función $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ que en ella aparece en potencias de $\boldsymbol{\zeta}$:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{R}) + (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla)\, \mathbf{H}(\mathbf{R}).$$

Al promediar, los términos de primer orden respecto de la magnitud oscilante $\boldsymbol{\zeta}(t)$ se anulan y el término de segundo orden hace aparecer una fuerza complementaria

$$\mathbf{f} = \frac{e}{c}\overline{[\dot{\boldsymbol{\zeta}} \times (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla)\, \mathbf{H}]}.$$

Para el movimiento circular

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \omega\, \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{n}, \qquad \boldsymbol{\zeta} = \frac{v_\perp}{\omega},$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario correspondiente a $\mathbf{H}$; la frecuencia $\omega = eH/mc$; $v_\perp$ es la velocidad de la partícula en su movimiento circular. El valor medio de los productos de las componentes del vector $\boldsymbol{\zeta}$, que gira en un plano (plano que es perpendicular a $\mathbf{n}$), vale:

$$\overline{\zeta_\alpha \zeta_\beta} = \frac{1}{2}\zeta^2 \delta_{\alpha\beta},$$

donde $\delta_{\alpha\beta}$ es el tensor unidad en dicho plano. El resultado que se obtiene es:

$$\mathbf{f} = -\frac{mv_\perp^2}{2H}\, [[\mathbf{n} \times \nabla] \times \mathbf{H}].$$

En virtud de las ecuaciones div $\mathbf{H} = 0$, rot $\mathbf{H} = 0$ a las que satisface el campo constante $\mathbf{H}(\mathbf{R})$, tenemos:

$$[[\mathbf{n} \times \nabla] \times \mathbf{H}] = -\mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{H} + (\mathbf{n} \cdot \nabla)\, \mathbf{H} + \mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{H} = (\mathbf{n} \cdot \nabla)\, \mathbf{H} = H\,(\mathbf{n} \cdot \nabla)\, \mathbf{n} + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{H}).$$

Nos interesa la fuerza transversal (respecto de $\mathbf{n}$) que conduce al desplazamiento de la órbita; esta fuerza es igual a

$$\mathbf{f} = -\frac{mv_\perp^2}{2}\,(\mathbf{n} \cdot \nabla)\, \mathbf{n} = \frac{mv_\perp^2}{2\rho}\,\nu,$$

donde ρ es el radio de curvatura de la línea de fuerza del campo en el punto en cuestión y ν es el versor correspondiente al vector de origen en el centro de curvatura y extremo en dicho punto.

El caso en que la partícula tiene también una velocidad longitudinal $v_\parallel$ (a lo largo de $\mathbf{n}$) se reduce al anterior sin más que pasar a un sistema de referencia que gira en torno del centro de curvatura instantáneo de la línea de fuerza (trayectoria del centro guía) con velocidad angular $v_\parallel/\rho$. En este sistema de referencia la partícula no tiene velocidad longitudinal, pero aparece una fuerza transversal complementaria — la fuerza centrífuga, igual a $\nu m v_\parallel^2/\rho$. De esta manera, la fuerza transversal total es:

$$\mathbf{f}_\perp = \nu \frac{m}{\rho}\left(v_\parallel^2 + \frac{v_\perp^2}{2}\right).$$

Esta fuerza equivale a un campo eléctrico constante de intensidad $\mathbf{f}_\perp/e$. Según (22.4), da lugar a una deriva del centro guía de la órbita con velocidad

$$\mathbf{v}_d = \frac{1}{\omega\rho}\left(v_\parallel^2 + \frac{v_\perp^2}{2}\right)[\nu \times \mathbf{n}].$$

El signo de esta velocidad depende del signo de la carga.

§ 23. El tensor campo electromagnético

En el párrafo 17 se han deducido las ecuaciones del movimiento de una carga en un campo a partir de la función de Lagrange (16.4) escrita en forma tridimensional. Obtendremos ahora las mismas ecuaciones directamente a partir de la acción (16.1) escrita en notación cuadridimensional.

El principio de mínima acción afirma que

$$\delta S = \delta \int_a^b \left(-mc\, ds - \frac{e}{c} A_i\, dx^i\right) = 0. \tag{23.1}$$

Observando que $ds = \sqrt{-dx_i\, dx^i}$, se encuentra (los límites de integración a y b se omiten para abreviar):

$$\delta S = -\int\left(mc\frac{dx_i\, d\delta x^i}{ds} + \frac{e}{c}A_i\, d\delta x^i + \frac{e}{c}\delta A_i\, dx^i\right) = 0.$$

Integremos por partes los dos primeros términos del integrando. Hagamos, además, en el primer término $dx_i/ds = u_i$, donde u_i son las componentes de la cuadrivelocidad. En estas condiciones,

$$\int\left(mc\, du_i\, \delta x^i + \frac{e}{c}\delta x^i\, dA_i - \frac{e}{c}\delta A_i\, dx^i\right) - \left(mcu_i + \frac{e}{c}A_i\right)\delta x^i \Big| = 0. \qquad (23.2)$$

El segundo término de esta ecuación es igual a cero, puesto que la integral se varía entre límites fijos. Además,

$$\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\delta x^k, \qquad dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}dx^k,$$

y, por consiguiente,

$$\int\left(-mc\, du_i\, \delta x^i - \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\delta x^i dx^k + \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_k}dx^i \delta x^k\right) = 0.$$

Hagamos en el primer término $du_i = \dfrac{du_i}{ds}\, ds$ y en el segundo y tercero $dx^i = u^i\, ds$. Además, permutemos en el tercer término los índices i y k (lo que nada cambia, puesto que se trata de índices mudos). Se tiene, entonces,

$$\int\left[-mc\frac{du_i}{ds} + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)u_k\right]\delta x^i ds = 0.$$

Dado que δx^i es arbitraria, de ahí se sigue que el integrando debe ser nulo, esto es,

$$mc\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)u^k.$$

Introduzcamos ahora la notación

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}. \qquad (23.3)$$

El tensor F_{ik} se llama *tensor campo electromagnético*. Las ecuaciones del movimiento (23.3) toman entonces la forma

$$mc\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k. \qquad (23.4)$$

Estas cuatro ecuaciones son las ecuaciones del movimiento de una carga en el campo electromagnético escritas en forma cuadridimensional.

El significado de cada una de las componentes del tensor F_{ik} puede ponerse de manifiesto fácilmente substituyendo los valores $A_i = (\varphi, -\mathbf{A})$ en la definición (23.3). El resultado se puede presentar en forma de tabla en la cual el índice $i = 0, 1, 2, 3$ numera las filas, y el índice k, las columnas:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{23.5}$$

Más brevemente, podemos escribir (cf. § 6):

$$F_{ik} = (\mathbf{E}, \mathbf{H}), \qquad F^{ik} = (-\mathbf{E}, \mathbf{H}).$$

Las componentes de los campos eléctrico y magnético resultan ser así las componentes del cuadritensor campo electromagnético.

Pasando a notaciones tridimensionales es fácil comprobar que las tres componentes espaciales ($i = 1, 2, 3$) de la ecuación (23.4) coinciden idénticamente con la ecuación vectorial del movimiento (17.5) y que la componente temporal ($i = 0$) es idéntica a la ecuación del trabajo (17.7). Esta última es consecuencia de la ecuación del movimiento; el hecho de que de las cuatro ecuaciones (23.4) sólo tres son independientes puede también probarse fácilmente sin más que multiplicar los dos miembros de (23.4) por u^i. Entonces el primer miembro de la igualdad se anula debido a que los vectores u^i y du_i/ds son ortogonales, y el segundo miembro, en virtud del carácter antisimétrico del tensor F_{ik}.

Si al considerar las variaciones δS admitimos únicamente las trayectorias posibles, el primer término de (23.2) es idénticamente nulo. En estas condiciones, el segundo término, en el que el límite superior se considera variable, nos da la diferencia de la acción como función de las coordenadas. Tenemos así:

$$\delta S = -\left(mcu_i + \frac{e}{c} A_i\right) \delta x^i, \tag{23.6}$$

de forma que

$$-\frac{\delta S}{\partial x^i} = mcu_i + \frac{e}{c} A_i = p_i + \frac{e}{c} A_i. \tag{23.7}$$

El cuadrivector de componentes $-\partial S/\partial x^i$ es el cuadrivector del impulso generalizado P_i. De las expresiones para la cuadrivelocidad y el cuadripotencial que lo constituyen se deducen las siguientes expresiones para las componentes P^i:

$$P^i = \left(\frac{\mathcal{E}_{\text{cin}} + e\varphi}{c}, \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) \tag{23.8}$$

Como debía ser, las componentes espaciales del cuadrivector P^i forman el vector impulso generalizado de tres dimensiones (16.5) y la componente temporal es $\mathcal{E}/c$, donde $\mathcal{E}$ es la energía total de la carga en el campo.

§ 24. Transformación de Lorentz del campo

En este párrafo hallaremos las fórmulas de transformación correspondientes a un campo, esto es, las fórmulas mediante las cuales se puede determinar el campo en un sistema inercial de referencia cuando se conoce el mismo campo en otro sistema.

Las fórmulas de transformación de los potenciales se obtienen directamente a partir de las fórmulas generales de transformación de cuadrivectores (6.1). Recordando que las componentes del vector A^i son (φ, A), se encuentra fácilmente

$$A_x = \frac{A'_x + \frac{V}{c}\varphi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z, \quad \varphi = \frac{\varphi' + \frac{V}{c}A'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{24.1}$$

Las fórmulas de transformación de las componentes de un cuadritensor antisimétrico de segundo orden (que esto es precisamente el tensor F^{ik}) se hallaron en el problema 2 del § 6: las componentes F^{23} y F^{01} no cambian en la transformación y las componentes F^{02}, F^{03} y F^{12}, F^{13} se transforman como x^0 y x^1, respectivamente. Expresando las componentes del tensor F^{ik} en función de las componentes de los campos **E** y **H**, de acuerdo con (23.5), obtendremos las siguientes fórmulas de transformación para el campo eléctrico

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c}H'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c}H'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \tag{24.2}$$

y para el campo magnético:

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c}E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{24.3}$$

El campo eléctrico y el campo magnético, por consiguiente, como la mayoría de las magnitudes físicas, son relativos, esto es, sus propiedades son diferentes en sistemas de referencia diferentes. En particular, el campo eléctrico o el campo magnético pueden ser iguales a cero en un sistema de referencia y, a la vez, no serlo en otro sistema.

Las fórmulas (24.2), (24.3) se simplifican considerablemente en el caso en que $V \ll c$. Salvo términos de orden superior a V/c, se tiene:

$$E_x = E'_x,\ E_y = E'_y + \frac{V}{c} H'_z,\ E_z = E'_z - \frac{V}{c} H'_y;$$

$$H_x = H'_x,\ H_y = H'_y - \frac{V}{c} E'_z,\ H_z = H'_z + \frac{V}{c} E'_y.$$

Estas fórmulas se pueden escribir en forma vectorial

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \frac{1}{c}\mathbf{H}' \times \mathbf{V},\ \mathbf{H} = \mathbf{H}' - \frac{1}{c}\mathbf{E}' \times \mathbf{V}. \tag{24.4}$$

Las fórmulas para la transformación inversa de K' a K se obtienen directamente a partir de (24.2)-(24.4) cambiando el signo de V y permutando el apóstrofo.

Si el campo magnético $\mathbf{H}' = 0$ en el sistema K', es fácil comprobar, partiendo de (24.2) y (24.3), que entre el campo eléctrico y el campo magnético existe en el sistema K la siguiente relación:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{E}. \tag{24.5}$$

Si, en cambio, en el sistema K' es $\mathbf{E}' = 0$, en el sistema K será:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{H}. \tag{24.6}$$

Por consiguiente, en ambos casos, en el sistema K los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí.

Estas fórmulas tienen también sentido cuando se las considera al revés: si los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ son perpendiculares entre sí (pero de diferente valor absoluto) en cierto sistema de referencia K, existe entonces un sistema de referencia K' en el que el campo es puramente eléctrico o puramente magnético. La velocidad $\mathbf{V}$ de este sistema (relativa a K) es perpendicular a $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ e igual en valor absoluto a cH/E en el primer caso (cuando debe ser $H<E$) y a cE/H en el segundo caso (en el que $E<H$).

§ 25. Invariantes del campo

A partir de las intensidades del campo eléctrico y magnético podemos formar magnitudes invariantes, magnitudes que se conservan al pasar de un sistema de referencia inercial a otro. La forma de estos invariantes se encuentra fácilmente a partir de la representación cuadridimensional del campo y valiéndose del cuadritensor antisimétrico F_{ik}. Es evidente que partiendo de las componentes de este tensor podemos formar las siguientes magnitudes invariantes:

$$F_{ik}F^{ik} = \text{inv}, \tag{25.1}$$

$$e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = \text{inv}, \tag{25.2}$$

donde e^{iklm} es el tensor unidad completamente antisimétrico de cuarto orden (cf. § 6).

Hay que hacer notar que la primera de esas magnitudes es un escalar puro, la segunda no es un escalar en sentido estricto, sino un pseudoescalar (el producto del tensor F^{ik} por su tensor dual, cf § 6)*

Si se substituyen en (25.1)-(25.2) las expresiones (23.7), es fácil demostrar que, con notación tridimensional, estos invariantes son de la forma,

$$H^2 - E^2 = \text{inv}, \tag{25.3}$$

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{H} = \text{inv}. \tag{25.4}$$

El carácter pseudoescalar de la segunda de estas expresiones se manifiesta aquí claramente, ya que aparece como producto de un vector polar **E** por un vector axil **H** (su cuadrado, en cambio $(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})^2$, es un verdadero escalar).

De la invariancia de las dos expresiones que acabamos de presentar se deducen las siguientes consecuencias. Si los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí en un sistema de referencia cualquiera, esto es, $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H} = 0$, dichos cam-

---

* Obsérvese también que el pseudoescalar (25.2) puede representarse como cuadrivergencia

$$e^{iklm}\,F_{ik}\,F_{lm} = 4\,\frac{\partial}{\partial x^i}\left(e^{iklm}\,A_k\,\frac{\partial}{\partial x^l}\,A_m\right),$$

como es fácil comprobar teniendo en cuenta la antisimetría de e^{iklm}.

pos son también perpendiculares en cualquier otro sistema inercial de referencia. Si los módulos de **E** y de **H** son iguales entre sí en un sistema de referencia cualquiera, son también iguales en cualquier otro sistema de referencia.

Las siguientes desigualdades, claro está, son también válidas. Si en un sistema de referencia cualquiera es $E>H$ (o bien $H>E$), en cualquier otro sistema de referencia se tendrá $E>H$ (o bien $H>E$). Si en un sistema de referencia cualquiera los vectores **E** y **H** forman un ángulo agudo (u obtuso), formarán también un ángulo agudo (u obtuso) en cualquier otro sistema de referencia.

Mediante una transformación de Lorentz podemos dar a **E** y **H** valores cualesquiera sujetos sólo a la condición de que E^2-H^2 y $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}$ tomen valores fijados previamente. En particular, podemos siempre encontrar un sistema inercial en el que los campos eléctrico y magnético sean paralelos entre sí en un punto dado. En este sistema $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H} = EH$, y de las dos ecuaciones

$$E^2-H^2 = E_0^2-H_0^2, \qquad EH = \mathbf{E}_0\cdot\mathbf{H}_0,$$

podemos deducir los correspondientes valores de **E** y **H** en este sistema de referencia ($\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{H}_0$ son los campos eléctrico y magnético en el sistema de referencia de partida).

Se excluye el caso en que ambos invariantes son iguales a cero. En este caso, **E** y **H** son iguales en módulo y perpendiculares entre sí en todos los sistemas de referencia.

Si tan sólo $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H} = 0$, podemos siempre encontrar un sistema de referencia en el que $\mathbf{E} = 0$ o $\mathbf{H} = 0$ (según sea $E^2-H^2<$ o >0), esto es, el campo es puramente magnético o puramente eléctrico; recíprocamente, si en un sistema de referencia se tiene $\mathbf{E} = 0$ o $\mathbf{H} = 0$, los dos campos son perpendiculares entre sí en cualquier otro sistema, de acuerdo con lo dicho al final del párrafo anterior.

Veamos ahora otra manera de abordar el problema de hallar los invariantes de un cuadritensor antisimétrico. Este método nos permitirá, en particular, comprobar que (25.3-4) son, en realidad, los dos únicos invariantes independientes y a la vez presentar algunas propiedades matemáticas instructivas de la transformación de Lorentz cuando se aplica a un cuadritensor de aquel tipo.

Consideremos el vector complejo,

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}+i\mathbf{H}. \tag{25.5}$$

Teniendo en cuenta las fórmulas (24.2-3), es fácil ver que una transformación de Lorentz (a lo largo del eje X) aplicada a este vector es de la forma

$$F_x = F'_x,\ F_y = F'_y \cosh\phi - iF'_z \operatorname{senh}\phi = F'_y \cos i\phi - F'_z \operatorname{sen} i\phi.$$

$$F_z = F'_z \cos i\phi + F'_y \operatorname{sen} i\phi,\quad \operatorname{tgh}\phi = \frac{V}{c}. \quad (25.6)$$

Vemos así que una rotación en el plano x, t del espacio de cuatro dimensiones (que es precisamente lo que representa la transformación de Lorentz aplicada al vector $\mathbf{F}$, es equivalente a una rotación de ángulo imaginario en el plano YZ del espacio tridimensional. El conjunto de todas las rotaciones posibles del espacio de cuatro dimensiones (incluidas también las rotaciones simples en torno de los ejes X, Y y Z) equivale al conjunto de todas las rotaciones posibles de ángulo complejo en el espacio tridimensional (en el que a los seis ángulos de rotación del espacio de cuatro dimensiones corresponden los tres ángulos complejos de rotación del espacio de tres).

El único invariante del vector respecto de una rotación es el cuadrado de su valor absoluto: $F^2 = E^2 - H^2 + 2i\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}$; por consiguiente, las cantidades reales $E^2 - H^2$ y $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}$ son los dos únicos invariantes independientes del tensor F_{ik}.

Si $\mathbf{F}^2 \neq 0$, el vector $\mathbf{F}$ se puede escribir en la forma $\mathbf{E} = a\mathbf{n}$, donde $\mathbf{n}$ es un vector complejo unitario ($\mathbf{n}^2 = 1$). Mediante una rotación compleja adecuada, podemos orientar $\mathbf{n}$ en el sentido de uno de los ejes de coordenadas; es claro que entonces $\mathbf{n}$ pasa a ser real y que $\mathbf{F} = (E + iH)\mathbf{n}$; con otras palabras, llegamos al resultado de que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ pasan a ser paralelos entre sí.

PROBLEMA

Determinar la velocidad del sistema de referencia en el cual los campos eléctrico y magnético son paralelos.

Solución. Hay una infinidad de sistemas de referencia K' que cumplen la condición impuesta: si hemos encontrado uno de ellos, de la misma propiedad gozará cualquier otro sistema cuyo movimiento relativo respecto del primero se caracterice por una velocidad paralela a la dirección común de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$. Por consiguiente, basta hallar uno de ellos tal que su velocidad sea perpendicular a ambos campos. Eligiendo la dirección de ésta como eje X, y teniendo en cuenta el hecho de que en K' es $E'_x = H'_x = 0$, $E'_y H'_z - E'_z H'_y = 0$, mediante las fórmulas (24.2) y (24.3) se obtiene para la velocidad $\mathbf{V}$ del sistema K' respecto del sistema original la siguiente ecuación:

$$\frac{\dfrac{\mathbf{V}}{c}}{1 - \dfrac{\mathbf{V}^2}{c^2}} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{H}}{E^2 + H^2}$$

(hay que elegir, claro está, aquella raíz de la ecuación de segundo grado tal que $V < c$).

CAPÍTULO 4

ECUACIONES DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

§ 26. El primer par de ecuaciones de Maxwell

De las expresiones

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad}\,\phi$$

es fácil deducir ecuaciones que contienen sólo **E** y **H**. Para ello determinemos rot **E**:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \text{ rot } \mathbf{A} - \text{rot grad}\,\phi.$$

Pero el rotacional de un gradiente es nulo; en consecuencia,

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{26.1}$$

Formando la divergencia de ambos miembros de la ecuación rot **A** = **H** y recordando que la divergencia de un rotacional es nula, se encuentra:

$$\text{div}\,\mathbf{H} = 0. \tag{26.2}$$

Las ecuaciones (26.1) y (26.2) constituyen el primer par de *ecuaciones de Maxwell* †. Obsérvese que estas dos ecuaciones no determinan aún por completo las propiedades del campo. Esto es claro sin más que tener en cuenta el hecho de que dichas ecuaciones determinan la variación del campo magnético con el tiempo (la derivada $\partial\mathbf{H}/\partial t$), pero no determinan la derivada $\partial\mathbf{E}/\partial t$.

Las ecuaciones (26.1) y (26.2) se pueden escribir en forma integral. De acuerdo con el teorema de Gauss,

$$\int \text{div}\,\mathbf{H}\, dV = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f},$$

† Las ecuaciones de Maxwell—que son las ecuaciones fundamentales de la electrodinámica—fueron formuladas por él por vez primera entre 1860 y 1870.

donde la integral del segundo miembro se extiende a la superficie cerrada que rodea al volumen al que se refiere la integral del primer miembro. Teniendo en cuenta (26.2), se tiene:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f} = 0. \tag{26.3}$$

La integral de un vector extendida a una superficie se llama *flujo del vector* a través de la misma. En consecuencia, el flujo del campo magnético a través de una superficie cerrada cualquiera es nulo.

Según el teorema de Stokes,

$$\int \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

donde la integral del segundo miembro se toma a lo largo del contorno cerrado que limita la superficie a que se extiende la integral del primer miembro. De (26.1) se deduce, integrando ambos miembros sobre una superficie cualquiera,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f}. \tag{26.4}$$

La integral de un vector a lo largo de un contorno cerrado se llama *circulación del vector* a lo largo del mismo. La circulación del campo eléctrico se llama también *fuerza electromotriz* en el contorno dado. La fuerza electromotriz en un contorno cualquiera es igual a la derivada respecto del tiempo, cambiada de signo, del flujo magnético a través de una superficie limitada por dicho contorno.

Las ecuaciones de Maxwell (26.1) y (26.2) se pueden expresar también en notación cuadridimensional. Partiendo de la definición del tensor campo electromagnético

$$F_{ik} = \partial A_k / \partial x^i - \partial A_i / \partial x^k,$$

es fácil comprobar que

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0. \tag{26.5}$$

El primer miembro es un tensor de tercer orden, antisimétrico respecto de sus tres índices. Las únicas componentes que no son idénticamente nulas son aquéllas para las que $i \neq k \neq l$. En total hay, pues, cuatro ecuaciones distintas que, como es fácil demostrar substituyendo la expresión (23.5), coinciden con las ecuaciones (26.1) y (26.2).

El cuadrivector dual de este tensor cuadridimensional antisimétrico de orden tres se puede construir multiplicando por el tensor e^{iklm} y contrayendo respecto de

tres pares de índices (véase § 6). De esta manera, la ecuación (26.5) se puede escribir en la forma:

$$e^{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0, \tag{26.6}$$

que muestra explícitamente la existencia de sólo cuatro ecuaciones independientes.

§ 27. La función acción del campo electromagnético

La función acción S para el sistema constituido por el campo electromagnético y las partículas situadas en él ha de constar de tres partes:

$$S = S_f + S_m + S_{mf}, \tag{27.1}$$

S_m es aquella parte de la acción que depende sólo de las propiedades de las partículas. Esta parte, claro está, es precisamente la acción que corresponde a las partículas libres, esto es, a las partículas en ausencia del campo. La acción para una partícula libre viene dada por (8.1). Si hay varias partículas, su acción total es la suma de las acciones correspondientes a cada una de ellas. Por consiguiente,

$$S_m = -\sum mc \int ds. \tag{27.2}$$

S_{mf} es aquella parte de la acción que depende de la interacción entre las partículas y el campo. De acuerdo con lo dicho en el § 16, para un sistema de partículas se tiene:

$$S_{mf} = -\sum \frac{e}{c} \int A_k \, dx^k. \tag{27.3}$$

En cada término de esta suma, A_k es el potencial del campo en aquel punto del espacio y del tiempo en que se encuentra la correspondiente partícula. La suma $S_m + S_{mf}$ nos es ya familiar: es la acción (16.1) de una carga en un campo.

Finalmente, S_f es aquella parte de la acción que depende sólo de las propiedades del campo en sí, esto es, S_f es la acción que corresponde a un campo cuando no existen cargas. Hasta ahora, dado que tan sólo nos interesaba el movimiento de las cargas en un campo electromagnético dado, la magnitud S_f, que no depende de las partículas, no había de tenerse en cuenta, dado que este término no puede afectar al movimiento de las partículas. Sin embargo, este término pasa a ser necesario cuando se trata de encontrar las ecuaciones que determinan al propio campo. A ello corresponde el hecho de que de la parte $S_m + S_{mf}$ de la acción se siguen únicamente dos ecuaciones para el campo (26.1) y (26.2), ecuaciones que no bastan para determinarlo por completo.

Para establecer la forma de la acción que corresponde al campo, partiremos de la siguiente propiedad, muy importante, de los campos electromagnéticos. Muestra la experiencia que el campo electromagnético obedece al llamado *principio de superposición*. Este principio afirma que si una carga produce un cierto campo y otra carga produce un segundo campo, el campo producido por las dos cargas resulta de la simple composición de los campos producidos por cada una de ellas individualmente. Esto significa que la intensidad del campo resultante en cada punto es igual a la suma vectorial de las intensidades de cada uno de dichos campos en aquel punto.

Cualquier solución de las ecuaciones del campo representa un campo que puede existir en la naturaleza. Según el principio de superposición, la suma de un número cualquiera de tales campos debe ser un campo que puede existir en la naturaleza, esto es, debe satisfacer las ecuaciones del campo.

Como es sabido, las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas poseen precisamente la propiedad de que la suma de un número cualquiera de soluciones es también una solución. Luego, las ecuaciones del campo deben ser ecuaciones diferenciales lineales homogéneas.

De esta discusión se sigue que el integrando correspondiente a la acción S_f debe ser una expresión cuadrática en las componentes del campo. Sólo en este caso serán lineales las ecuaciones del mismo, ya que las ecuaciones del campo se obtienen variando la acción, y en la variación el grado del integrando disminuye en una unidad.

Los potenciales no pueden aparecer en la expresión de la acción S_f, ya que no están determinados univocamente (en S_{mf} esta falta de unicidad carecía de importancia). Por consiguiente, S_f debe ser la integral de una cierta función del tensor del campo electromagnético F_{ik} . Pero la acción debe ser un escalar y, por lo tanto, integral de un cierto escalar. Éste sólo puede ser el producto $F_{ik}F^{ik}$ †

Por lo tanto, S_f debe ser de la forma:

$$S_f = a\int\int F_{ik}F^{ik}\,dV\,dt, \qquad dV = dx\,dy\,dz,$$

† El integrando de S_f no puede contener derivadas de F_{ik}, puesto que la función de Lagrange puede contener, aparte de las coordenadas, tan sólo sus primeras derivadas respecto del tiempo, y el papel de « coordenadas » (es decir, de los elementos que se deben variar en el principio de mínima acción) lo representan en este caso los potenciales A_k del campo. Esta situación es análoga a la que se presenta en mecánica, en la que la función de Lagrange de un sistema mecánico contiene sólo las coordenadas de las partículas y sus primeras derivadas respecto del tiempo.

En cuanto a la magnitud $e^{iklm}F_{ik}F_{lm}$ (§ 25), es una cuadridivergencia (como se hizo observar en la nota de la pág. 89) y, en consecuencia, el sumarla al integrando de S_f no se refleja absolutamente en las «ecuaciones del movimiento». Es interesante que, por esta misma razón, dicha magnitud se excluye de la acción, incluso con independencia del hecho que no es propiamente un escalar, sino un pseudoescalar.

donde la integral se extiende a todo el espacio y a todo el tiempo entre dos instantes dados; a es una cierta constante. En el integrando aparece $F_{ik}F^{ik} = 2(H^2 - E^2)$. El campo **E** contiene la derivada $\partial \mathbf{A}/\partial t$; pero es fácil ver que $(\partial \mathbf{A}/\partial t)^2$ debe aparecer en la acción con signo positivo (y, por consiguiente, también E^2 debe tener signo positivo). En efecto, si $(\partial \mathbf{A}/\partial t)^2$ apareciera en S_f con signo negativo, un cambio suficientemente rápido del potencial con el tiempo (en el intervalo de tiempo considerado) podría siempre hacer de S_f una cantidad negativa de valor absoluto arbitrariamente grande. En estas condiciones, S_f no podría tener un mínimo, en contra de lo que exige el principio de mínima acción. Por consiguiente, a debe ser negativa.

El valor numérico de a depende de la elección de unidades para medir el campo. Hay que hacer notar que, una vez elegido un valor para a y las unidades para la medida del campo, las unidades para todas las demás magnitudes electromagnéticas quedan determinadas.

En lo que sigue utilizaremos el llamado *sistema de unidades de Gauss;* en este sistema, a es de dimensión nula e igual a $-1/16\pi$ †.

Resumiendo, la acción para el campo es de la forma:

$$S_f = -\frac{i}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}\,d\Omega, \quad d\Omega = c\,dt\,dx\,dy\,dz\,d. \tag{27.4}$$

En forma tridimensional,

$$S_f = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 - H^2)\,dV\,dt. \tag{27.5}$$

Con otras palabras, la función de Lagrange del campo es:

$$L_f = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 - H^2)\,dV. \tag{27.6}$$

La acción correspondiente al sistema formado por el campo y las partículas es de la forma,

$$S = -\sum\int mc\,ds - \sum\int \frac{e}{c}A_k\,dx^k - \frac{1}{16\pi c}\int F^{ik}\,d\Omega. \tag{27.7}$$

† Además del sistema de Gauss, se utiliza también el llamado sistema de Heaviside, en el cual $a = -1/4$. En este sistema de unidades, las ecuaciones del campo toman una forma más conveniente (no aparece el número π), pero entonces π aparece en la ley de Coulomb. Recíprocamente, en el sistema de Gauss las ecuaciones del campo contienen π, pero la ley de Coulomb toma una forma simple.

Obsérvese que ahora no se supone ya que las cargas sean pequeñas, como se hizo al deducir las ecuaciones del movimiento de una carga en un campo dado. Por consiguiente, A_k y F_{ik} corresponden al campo total, esto es, al campo exterior más el campo producido por las propias partículas; A_k y F_{ik} dependen ahora de las posiciones y de las velocidades de las cargas.

§ 28. El vector corriente cuadridimensional

En vez de considerar las cargas como puntos, por conveniencia matemática las suponemos, con frecuencia, distribuidas en el espacio de manera continua. Se puede entonces introducir la *densidad de carga* ϱ tal que $\varrho\, dV$ es la carga contenida en el volumen dV; la densidad ϱ es, en general, una función de las coordenadas y del tiempo.La integral de ϱ extendida a un cierto volumen es la carga contenida en el mismo.

Hay que recordar aquí que las cargas son en realidad puntuales, de forma que la densidad ϱ es nula en todas partes excepto en los puntos ocupados por las cargas y la integral $\int \varrho\, dV$ debe ser igual a la suma de las cargas contenidas en el volumen dado †. Por consiguiente, ϱ se puede expresar mediante la función-δ de la siguiente manera:

---

† La función-δ, $\delta(x)$, se define como sigue: $\delta(x) = 0$ para todo valor de x distinto de cero; para $x = 0$, $\delta(0) = \infty$, de forma tal que la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1. \tag{1}$$

De esta definición resultan las siguientes propiedades: si $f(x)$ es una función cualquiera continua, será

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \delta(x-a)\ dx = f(a), \tag{2}$$

y, en particular,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \delta(x)\ dx = f(0). \tag{3}$$

(los límites de integración, claro está, no tienen por qué ser $\pm\infty$, el intervalo de integración puede ser cualquier intervalo con tal que incluya el punto en que la función δ no se anula).

El sentido de las siguientes igualdades es que el primer miembro y el segundo conducen al mismo resultado cuando se introducen como factores en un integrando:

$$\delta(-x) = \delta(x),\quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\,\delta(x). \tag{4}$$

La última igualdad es un caso particular de una relación más general

$$\delta[\phi(x)] = \sum_i \frac{1}{|\phi'(a_i)|}\,\delta(x-a_i), \tag{5}$$

$$\varrho = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \tag{28.1}$$

donde la suma se extiende a todas las cargas y $\mathbf{r}_a$ es el vector posición de la carga e_a.

La carga de una partícula es, por definición, una cantidad invariante, esto es, no depende de la elección del sistema de referencia. La densidad ϱ, en cambio, no es en general un invariante — sólo el producto $\varrho\, dV$ lo es.

Multiplicando los dos miembros de la igualdad $de = \varrho\, dV$ por dx^i se obtiene

$$de\, dx^i = \varrho\, dV\, dx^i = \varrho\, dV\, dt \frac{dx^i}{dt}.$$

En el primer miembro figura un cuadrivector (dado que de es un escalar y dx^i un cuadrivector). Esto significa que el segundo miembro debe ser un cuadrivector.

Pero $dVdt$ es un escalar y, por lo tanto, $\varrho \dfrac{dx^i}{dt}$ es un cuadrivector. Este vector (que representaremos por j^i) es el *cuadrivector corriente:*

$$j^i = \varrho \frac{dx^i}{dt}. \tag{28.2}$$

Las tres primeras componentes de este vector constituyen un vector del espacio ordinario

$$\mathbf{j} = \varrho \mathbf{v}; \tag{28.3}$$

$\mathbf{v}$ es la velocidad de la carga en el punto dado. El vector $\mathbf{j}$ se llama vector *densidad de corriente.* La componente temporal del cuadrivector corriente es $c\varrho$. Por consiguiente,

$$j^i = (c\varrho, \mathbf{j}). \tag{28.4}$$

---

donde $\phi(x)$ es una función univalente (cuya inversa no tiene por qué serlo) y las a_i son las raíces de la ecuación $\phi(x) = 0$.

De la misma manera que se ha definido $\delta(x)$ para una sola variable x, podemos introducir una función-δ tridimensional, $\delta(\mathbf{r})$, igual a cero en todo el espacio salvo en el origen del sistema de coordenadas tridimensionales y cuya integral en todo el espacio es igual a la unidad. Como a tal función podemos utilizar, evidentemente, el producto $\delta(x)\, \delta(y)\, \delta(z)$.

La carga total presente en todo el espacio es igual a la integral $\int \varrho\, dV$ extendida a todo él. Esta integral se puede escribir en forma cuadridimensional:

$$\int \varrho\, dV = \frac{1}{c}\int j^0 dV = \frac{1}{c}\int j^i dS_i, \tag{28.5}$$

donde la integral se extiende a todo el hiperplano cuadridimensional perpendicular al eje x^0 (evidentemente, esta integración significa que se integra en todo el espacio de tres dimensiones).

En general la integral $\frac{1}{c}\int j^i dS_i$ extendida a una superficie arbitraria es la suma de las cargas cuyas líneas de universo atraviesan dicha superficie.

Introduzcamos el cuadrivector corriente en la expresión (27.7) para la acción, es decir, transformemos el segundo término de dicha expresión. Introduciendo en vez de cargas puntuales e una distribución continua de carga de densidad ϱ, deberemos escribir dicho término en la forma

$$-\frac{1}{c}\int \varrho A_i\, dx^i dV,$$

substituyendo la suma relativa a las cargas por una integral extendida a todo el volumen. Escribiéndola ahora en la forma:

$$-\frac{1}{c}\int \varrho \frac{dx^i}{dt} A_i\, dV\, dt,$$

es fácil ver que coincide con

$$-\frac{1}{c^2}\int A_i j^i d\Omega.$$

La acción S toma así la forma:

$$S = -\sum \int mc\, ds - \frac{1}{c^2}\int A_i j^i d\Omega - \frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}\, d\Omega. \tag{28.6}$$

§ 29. La ecuación de continuidad

El cambio con el tiempo de la carga contenida en un cierto volumen viene determinado por la derivada

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \varrho\, dV.$$

Por otra parte, el cambio por unidad de tiempo viene determinado por la cantidad de carga que, por unidad de tiempo, abandona dicho volumen y pasa al exterior o, recíprocamente, pasa a su interior. La cantidad de carga que atraviesa por unidad de tiempo el elemento $d\mathbf{f}$ de la superficie que limita el volumen considerado es igual a $\varrho\mathbf{v}\cdot d\mathbf{f}$, donde $\mathbf{v}$ es la velocidad de la carga en el punto del espacio en que está situado el elemento $d\mathbf{f}$. El vector $d\mathbf{f}$ está dirigido, como siempre, en el sentido de la normal que apunta al exterior del volumen considerado. Por consiguiente, $\varrho\mathbf{v}\cdot d\mathbf{f}$ es positivo si la carga abandona el volumen y negativo si penetra en él. La carga total que escapa del volumen dado por unidad de tiempo es, por consiguiente $\oint \varrho\mathbf{v}\cdot d\mathbf{f}$, donde la integral se extiende a toda la superficie cerrada que limita el volumen.

De la igualdad de estas dos expresiones se deduce que

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \varrho\, dV = -\oint \varrho\mathbf{v}\cdot d\mathbf{f}. \tag{29.1}$$

El signo negativo aparece en el segundo miembro, dado que el primero es positivo si aumenta la carga total en el volumen dado. La ecuación (29.1) expresa la conservación de la carga y es la llamada *ecuación de continuidad*, escrita en forma integral. Observando que $\varrho\mathbf{v}$ es la densidad de corriente, la igualdad (29.1) puede escribirse también en la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \varrho\, dV = -\oint \mathbf{j}\cdot d\mathbf{f}. \tag{29.2}$$

Es también posible escribir esta misma ecuación en forma diferencial. Aplicando el teorema de Gauss:

$$\oint \mathbf{j}\cdot d\mathbf{f} = \int \operatorname{div}\mathbf{j}\, dV.$$

al segundo miembro de la relación (29.2), se encuentra:

$$\int\left(\operatorname{div}\mathbf{j}+\frac{\partial\varrho}{\partial t}\right)dV = 0.$$

Dado que esta relación debe valer cualquiera que sea el volumen de integración, el integrando debe ser igual a cero:

$$\operatorname{div}\mathbf{j}+\frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0. \tag{29.3}$$

Ésta es la ecuación de continuidad en forma diferencial.

Es fácil comprobar que la expresión (28.1) para ϱ en forma de función-δ satisface automáticamente la ecuación (29.3). Supongamos, para simplificar, que se trata de una sola carga, de modo que

$$\varrho = e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0).$$

La corriente $\mathbf{j}$ es entonces:

$$\mathbf{j} = e\mathbf{v}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad de la carga. Determinemos la derivada $\partial\varrho/\partial t$. Durante el movimiento de la carga cambian sus coordenadas, esto es, el vector $\mathbf{r}_0$ cambia. Por consiguiente,

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} = \frac{\partial\varrho}{\partial\mathbf{r}_0}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial t}.$$

Pero $\partial\mathbf{r}_0/\partial t$ es precisamente la velocidad $\mathbf{v}$ de la carga. Además, dado que ϱ es función de $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$,

$$\frac{\partial\varrho}{\partial\mathbf{r}_0} = -\frac{\partial\varrho}{\partial\mathbf{r}}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} = -\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\varrho = -\operatorname{div}(\varrho\mathbf{v})$$

(la velocidad $\mathbf{v}$ de la carga no depende, claro está de $\mathbf{r}$). Llegamos así a la ecuación (29.3).

Es tácil comprobar que, en torma cuadridimensional, la ecuación de continuidad (29.3) expresa el hecho de que la cuadridivergencia del cuadrivector corriente es nula:

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0. \tag{29.4}$$

En el párrato anterior vimos que la carga total presente en todo el espacio se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{c}\int j^i dS_i,$$

donde la integración se extiende a todo el hiperplano $x^0 = \text{const}$. En cada instante, la carga total viene dada por una integral de este tipo extendida a un diferente hiperplano perpendicular al eje x^0 Es fácil ver que la ecuación (29.4) conduce, en efecto, a la conservación de la carga, esto es, al resultado de que la integral $\int j^i dS_i$ es la misma cualquiera que sea el hiperplano $x^0 = \text{const}$. al que se extienda. La

diferencia entre las integrales $\int j^i dS_i$ extendidas a dos de dichos hiperplanos se puede escribir en la forma $\oint j^i dS_i$, donde la integral se extiende a toda la hipersuperficie cerrada que limita el cuadrivolumen determinado por los dos hiperplanos considerados (esta integral difiere de la integral que se busca en la contribución de la integral extendida a la hipersuperficie « lateral » infinitamente distante, contribución que, sin embargo, se anula, ya que no existen cargas en el infinito). Según el teorema de Gauss (6.15), podemos transformar esta integral de hipersuperficie en una integral extendida al cuadrivolumen comprendido entre los dos hiperplanos, y teniendo en cuenta (29.4) es fácil ver que

$$\oint j^i dS_i = \int \frac{\partial j^i}{\partial x^i} d\Omega = 0. \tag{29.5}$$

La demostración que precede conserva su validez, evidentemente, para dos integrales cualesquiera $\int j^i dS_i$, en las que la integración se extienda a dos hipersuperficies infinitas (y no precisamente a hiperplanos $x^0 = \text{const}$), cada una de las cuales contiene todo el espacio tridimensional. Se sigue de aquí que la integral $\frac{1}{c}\int j^i dS_i$ conserva su valor (igual a la carga total en el espacio) cualquiera que sea la hipersuperficie de aquella especie a que se extiende la integración.

Hemos recordado ya (cf. lo dicho ya en la pág. 71) la íntima relación que existe entre la invariancia de contraste de las ecuaciones de la electrodinámica y la ley de conservación de la carga. Demostrémosla una vez más partiendo de la expresión de la acción en la forma (28.6). Al substituir A_i por $A_i - \frac{\partial f}{\partial x^i}$, al segundo término de esta expresión se añade la integral

$$\frac{1}{c^2}\int j^i \frac{\partial f}{\partial x^i} d\Omega.$$

Precisamente la conservación de la carga, expresada por la ecuación de continuidad (29.4), permite escribir el integrando en forma de cuadridivergencia $\frac{\partial}{\partial x^i}(fj^i)$, hecho lo cual, según el teorema de Gauss, la integral extendida al cuadrivolumen se transforma en una integral sobre la hipersuperficie frontera; al variar la acción, estas integrales desaparecen y, de esta manera, no se reflejan en las ecuaciones del movimiento.

§ 30. El segundo par de ecuaciones de Maxwell

Para determinar las ecuaciones del campo mediante el principio de mínima acción hemos de suponer dado el movimiento de las cargas y variar únicamente el

campo, esto es, los potenciales †; al determinar las ecuaciones del movimiento hemos supuesto, por el contrario, dado el campo, y se ha variado la trayectoria de la partícula.

Por lo tanto, la variación del primer término en (28.6) es nula y en el segundo hay que conservar invariable la corriente j^i. Por consiguiente,

$$\delta S = -\int \frac{1}{c}\left\{\frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ik} \delta F_{ik}\right\} d\Omega = 0.$$

(al variar el segundo término se tuvo en cuenta que $F^{ik}\,\delta\, F_{ik} \equiv F_{ik}\,\delta\, F^{ik}$) Substituyendo en vez de F_{ik} la expresión $\partial A_k/\partial x^i - \partial A_i/\partial x^k$, tendremos,

$$\delta S = -\int \frac{1}{c}\left\{\frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i}\delta A_k - \frac{1}{8\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i\right\} d\Omega.$$

Permutemos en el segundo término los índices i y k, a los que se extiende la suma, y, además, substituyamos F_{ik} por $-F_{ki}$. Se obtiene entonces,

$$\delta S = -\int \frac{1}{c}\left\{\frac{1}{c} j^i \delta A_i - \frac{1}{4\pi} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i\right\} d\Omega.$$

Integremos por partes la segunda de estas integrales, es decir, apliquemos el teorema de Gauss. Se obtiene así:

$$dS = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c} j^i + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\right\}\delta A_i\, d\Omega - \frac{1}{4\pi c}\int F^{ik}\delta A_i\, dS_k\Big|. \qquad (30.1)$$

En el segundo término hay que introducir los valores que corresponden a los límites de integración. Los límites para las coordenadas son iguales a infinito, donde el campo es nulo. En cambio, en los límites de la integración respecto del tiempo, esto es, para los instantes inicial y final, la variación de los potenciales es nula, puesto que, de acuerdo con el principio de mínima acción, los potenciales en estos instantes son datos fijos. El segundo término de (30.1) es, por lo tanto, igual a cero y llegamos así a la ecuación

$$\int\left(\frac{1}{c} j^i + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\right)\delta A_i\, d\Omega = 0.$$

Dado que según el principio de mínima acción las variaciones δA_i son cualesquiera, los coeficientes de las δA_i deben ser nulos, con lo que

† Los potenciales son las « coordenadas » del sistema (véase la nota en la pág. 96).

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i. \tag{30.2}$$

Expresemos estas cuatro ecuaciones ($i = 0-3$), en forma tridimensional. Para ($i = 1$) es:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial F^{10}}{\partial t} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x} + \frac{\partial F^{12}}{\partial y} + \frac{\partial F^{13}}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} j^1.$$

Substituyendo los valores de las componentes F^{ik}, se encuentra:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_x.$$

Esta ecuación, junto con las otras dos ($i = 2,3$), se puede escribir como ecuación vectorial única:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{30.3}$$

Finalmente, la ecuación con $i = 0$ nos da

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\varrho. \tag{30.4}$$

Las ecuaciones (30.3) y(30.4) constituyen el segundo *par de ecuaciones de Maxwell* †. Junto con el primer par, determinan completamente el campo electromagnético y constituyen las ecuaciones fundamentales de la teoría de tales campos, es decir, de la *electrodinámica.*

Escribamos estas ecuaciones en forma integral. Integrando (30.4) en un volumen y aplicando el teorema de Gauss

$$\int \text{div } \mathbf{E}\, dV = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{f},$$

se obtiene:

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{f} = 4\pi \int \varrho\, dV. \tag{30.5}$$

Por consiguiente, el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual al producto por 4π de la carga total contenida en el volumen limitado por la superficie.

† Las ecuaciones de Maxwell en forma aplicable al campo electromagnético en el vacío y a cargas puntuales que se encuentran en él fueron formuladas por Lorentz.

Integrando (30.3) sobre una superficie abierta y aplicando el teorema de Stokes,

$$\int \text{rot } \mathbf{H}\cdot d\mathbf{f} = \oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l},$$

se encuentra,

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{f} + \frac{4\pi}{c}\int \mathbf{j}\cdot d\mathbf{f}. \tag{30.6}$$

La cantidad

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{30.7}$$

se llama *corriente de desplazamiento*. De (30.6), escrita en la forma:

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\int \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{f}, \tag{30.8}$$

se sigue que la circulación del campo magnético a lo largo de un contorno cualquiera es igual al producto por $4\pi/c$ de la suma de la corriente en sentido estricto y de la corriente de desplazamiento que atraviesan una superficie limitada por dicho contorno.

De las ecuaciones de Maxwell es posible deducir la ya conocida ecuación de continuidad (29.3). Formando la divergencia de los dos miembros de (30.3), se encuentra:

$$\text{div rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\text{div } \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\text{div } \mathbf{j}.$$

Pero div. rot $\mathbf{H} = 0$ y div $\mathbf{E} = 4\pi\varrho$, de acuerdo con (30.4). Llegamos así de nuevo a la ecuación (29.3). En forma cuadridimensional, teniendo en cuenta (30.2), se tiene:

$$\frac{\partial^2 F^{ik}}{\partial x^i \partial x^k} = -\frac{4\pi}{c}\frac{\partial j^i}{\partial x^i}.$$

Pero debido a la antisimetría de F_{ik} y a la simetría respecto de los índices i, k del operador $\dfrac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k}$, se tiene $\partial^2 F^{ik}/\partial x^i \partial x^k = 0$, lo que expresa la ecuación de continuidad (29.4) en forma cuadridimensional.

§ 31. Flujo y densidad de energía

Multipliquemos los dos miembros de (30.3) por **E**, los dos miembros de (26.1) por **H** y sumemos miembro a miembro las ecuaciones que así resultan. Se tendrá entonces:

$$\frac{1}{c}\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\frac{1}{c}\mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}-(\mathbf{H}\cdot \text{rot } \mathbf{E}-\mathbf{E}\cdot \text{rot } \mathbf{H}).$$

Si tenemos en cuenta la conocida fórmula del análisis vectorial,

$$\text{div } (\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\cdot \text{rot } \mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot \text{rot } \mathbf{b},$$

podemos escribir esta relación en la forma:

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(E^2+H^2)=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}-\text{div } (\mathbf{E}\times\mathbf{H})$$

o bien,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2+H^2}{8\pi}\right)=-\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}-\text{div } \mathbf{S}. \tag{31.1}$$

El vector

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} \tag{31.2}$$

se llama *vector de Poynting*.

Integremos (30.1) en un volumen y apliquemos el teorema de Gauss al segundo término del segundo miembro. Se obtiene así,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}dV=-\int\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,dV-\oint\mathbf{S}\cdot d\mathbf{f}. \tag{31.3}$$

Si la integral se extiende a todo el espacio, la integral de superficie se anula (ya que el campo es nulo en el infinito). Además, podemos expresar la integral $\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,dV$ como suma $\sum e\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}$ extendida a todas las cargas y substituir, en virtud de (17.7),

$$e\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}=\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{E}_{\text{cin}}.$$

La igualdad (31.3) se transforma entonces en

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}dV+\sum\mathcal{E}_{\text{cin}}\right\}=0. \tag{31.4}$$

Vemos así que para el sistema aislado constituido por el campo electromagnético y las cargas presentes en él, se conserva la cantidad entre corchetes que aparece

en esta ecuación. El segundo término en ella es la energía cinética (incluida la energía en reposo de todas las partículas; véase la nota en la pág. 62); el primer término es, por consiguiente, la energía del propio campo electromagnético. Podemos así llamar la magnitud

$$W = \frac{E^2+H^2}{8\pi} \tag{31.5}$$

densidad de energía del campo eiectromagnético; es la energía del campo por unidad de volumen.

Si integramos en un volumen finito, la integral de superficie que aparece en (31.3) en general no se anula, de modo que podemos escribir la ecuación en la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int \frac{E^2+H^2}{8\pi}\,dV + \sum \mathcal{E}_{\text{cin}}\right\} = -\oint \mathbf{S}\cdot d\mathbf{f}, \tag{31.6}$$

donde ahora la suma que aparece como segundo término entre corchetes se extiende únicamente a las partículas situadas en el volumen considerado. El primer miembro representa el cambio por unidad de tiempo de la energía total del campo y de las partículas. Por lo tanto, la integral $\oint \mathbf{S}\cdot d\mathbf{f}$ debe interpretarse como el flujo de energía del campo a través de la superficie que limita al volumen dado, de forma que el vector de Poynting $\mathbf{S}$ representa esta densidad de flujo — es decir, la cantidad de energía del campo que atraviesa la unidad de área de la superficie por unidad de tiempo †.

§ 32. Tensor energía-impulso

En el párrafo que precede se ha obtenido una expresión para la energía del campo electromagnético. Deduciremos ahora esta expresión, junto con la correspondiente al impulso del campo, en forma cuadridimensional. Para simplificar, consideraremos por el momento un campo electromagnético sin cargas. Teniendo presente aplicaciones ulteriores (al campo gravitario) y también para simplificar los cálculos se llevará a cabo la deducción de forma general, sin particularizar la naturaleza del sistema concreto. Consideremos así un sistema cualquiera cuya integral de acción es de la forma,

$$S = \int \Lambda\left(q, \frac{\partial q}{\partial x^i}\right) dV\,dt = \frac{1}{c}\int \Lambda\, d\Omega, \tag{32.1}$$

† Suponemos que en el instante dado no existen cargas sobre la propia superficie. De no ser así, en el segundo miembro deberíamos incluir el flujo de energía debido a las partículas que atraviesan la superficie.

donde Λ es una cierta función de las magnitudes q, que describen el estado del sistema, y de sus primeras derivadas respecto de las coordenadas y del tiempo (para el campo electromagnético las componentes del cuadripotencial son las cantidades q); para abreviar, escribiremos aquí sólo una q. Observemos que la integral de espacio $\int \Lambda\, dV$ es la función de Lagrange del sistema, de modo que Λ se puede considerar como «*densidad*» *de función de Lagrange*. La expresión matemática del hecho que el sistema es aislado se traduce en que Λ no depende explícitamente de las x_i, situación ésta análoga a la que encontramos para un sistema aislado en mecánica, cuya función de Lagrange no depende explícitamente del tiempo.

Las « ecuaciones del movimiento » (es decir, las ecuaciones del campo si se trata de un campo) se obtienen de acuerdo con el principio de mínima acción variando S. Se tiene (para abreviar hemos hecho $q_{,i} \equiv \partial q/\partial x^i$):

$$\delta S = \frac{1}{c}\int \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\,\delta q_{,i}\right) d\Omega$$

$$= \frac{1}{c}\int \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\,\delta q\right) - \delta q\,\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\right] d\Omega = 0.$$

El segundo término del integrando se anula al extender la integración a todo el espacio, como resulta del teorema de Gauss, y se encuentran entonces las siguientes « ecuaciones del movimiento »:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0 \tag{32.2}$$

(se sobreentiende, claro está, que se suma respecto de cualquier par de índices repetidos).

El resto del razonamiento es análogo al que en mecánica conduce a la conservación de la energía. Hagamos, a saber,

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\frac{\partial q_{,k}}{\partial x^i}.$$

Substituyendo (32.2) y observando que $q_{,k,i} = q_{,i,k}$, se encuentra

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\right) q_{,i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\frac{\partial q_{,i}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(q_{,i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\right).$$

Haciendo en el segundo miembro $\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \delta_i^k \frac{\partial \Lambda}{\partial x^k}$,

Introduciendo la notación

$$T_{\frac{k}{2}} = -\delta_i^k \Lambda + q_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \tag{32.3}$$

podemos expresar dicha relación en la forma:

$$\frac{\partial T_{\frac{k}{2}}}{\partial x^k} = 0. \tag{32.4}$$

Obsérvese que si en vez de una sola variable q hubiera varias variables $q^{(i)}$, en vez de (32.3) deberíamos escribir:

$$T_{ik} = -\delta_{ik} \Lambda + \sum_i q_{,i}^{(i)} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}^{(i)}}. \tag{32.5}$$

Pero en el § 29 vimos que una ecuación de la forma $\partial A^k / \partial x^k = 0$, es decir, la anulación de la cuadridivergencia de un vector, equivale a afirmar que se conserva la integral $\int A_k \, dS^k$ del vector extendida a una hipersuperficie que contiene todo el espacio de tres dimensiones. Es claro que un resultado análogo vale para la divergencia de un tensor; la ecuación $\partial T_{ik} / \partial x^k = 0$ nos dice que se conserva el vector P^i cuyas componentes son las integrales de T^{ik} extendidas a una de aquellas hipersuperficies

$$P^i = \text{const} \int T^{ik} dS_k$$

Este vector debe identificarse con el cuadrivector impulso del sistema. Eligiremos el factor constante que multiplica la integral de forma que, de acuerdo con nuestra anterior definición, la componente **temporal** del vector P^i sea igual a la energía del sistema dividida por c. Para ello observemos que P^0 se puede escribir en la forma:

$$P^0 = \text{const} \int T^{0k} dS_k = \text{const} \int T^{00} dV$$

si la integración se extiende al hiperplano $x^0 = \text{const}$. Por otra parte, de acuerdo con (32.3),

$$T^{00} = \dot{q} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}} - \Lambda. \qquad \left(\dot{q} \equiv \frac{\partial q}{\partial t} \right)$$

La comparación con las fórmulas usuales que ligan la energía y la función de Lagrange hace ver que esta magnitud debe considerarse como densidad de energía del sistema y que, por consiguiente, $\int T^{00}\, dV$ es la energía total del mismo. Debemos hacer, pues, const $= 1/c$ y obtenemos así finalmente para el cuadrimpulso del sistema la expresión

$$P^i = \frac{1}{c}\int T^{ik} dS_k . \tag{32.6}$$

El tensor T^{ik} se llama *tensor energía-impulso* del sistema.

Hay que señalar que la definición del tensor T^{ik} no es única. En efecto, al tensor T^{ik} definido por la ecuación (32.3) podemos sumar una cantidad de la forma $\frac{\partial}{\partial x^l}\psi^{ikl}$, donde ψ^{ikl} es un tensor arbitrario antisimétrico respecto de los índices k, l. Después de este cambio, el nuevo tensor T^{ik} satisfará también la ecuación (32.4), ya que se tiene idénticamente $\partial^2\psi^{ikl}/\partial x^k \partial x^i = 0$. El cuadrimpulso total del sistema, P^i, no cambia, dado que, de acuerdo con (6.12), podemos escribir:

$$\int \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^l} dS_k = \frac{1}{2}\int \left(dS_k \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^l} - dS_l \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2}\int \psi^{ikl} df^*_{kl},$$

donde la integración en el segundo miembro de la igualdad se extiende a la superficie (ordinaria) que « limita » la hipersuperficie a que se extiende la integración del primer miembro. Esta superficie se encuentra, evidentemente, en el infinito del espacio de tres dimensiones y dado que, en el infinito, no existen ni campo ni partículas, esta integral es igual a cero. Resulta así que el cuadrimpulso del sistema es, como debe ser, una cantidad unívocamente determinada. Para definir el tensor T^{ik} de manera unívoca podemos valernos de la condición de que el cuadritensor momento cinético (véase § 14) del sistema se exprese en función del cuadrimpulso por la relación

$$M^{ik} = \int (x^i dP^k - x^k dP^i) = \frac{1}{c}\int (x^i T^{kl} - x^k T^{il})\, dS_l, \tag{32.7}$$

esto es, de manera que no sólo el momento cinético total del sistema, sino también su « densidad » se exprese en función de la « densidad » de impulso por la fórmula usual.

Es fácil determinar qué condiciones debe satisfacer el tensor energía-impulso para que así ocurra. Observemos que la ley de conservación del momento cinético se puede expresar, conforme ya sabemos, igualando a cero la divergencia de la ex-

presión subintegral que aparece en M^{ik}. Por consiguiente,

$$\frac{\partial}{\partial x^l}(x^i T^{kl} - x^k T^{il}) = 0.$$

Observando que $\partial x^i/\partial x^l = \delta^i{}_l$ y que $\partial T^{kl}/\partial x^l = 0$, se sigue de aquí que

$$\delta^i{}_l T^{kl} - \delta^k{}_l T^{il} = T^{ki} - T^{ik} = 0$$

o bien,

$$T^{ik} = T^{ki}, \tag{32.8}$$

es decir, el tensor de energía-impulso debe ser simétrico.

Obsérvese que el tensor T^{ik}, definido por la fórmula (32.5), no es, en general, simétrico, pero se puede transformar en simétrico sumándole una expresión de la forma $\frac{\partial}{\partial x^l}\psi^{ikl}$, eligiendo convenientemente el tensor ψ^{ikl}. Más adelante (§ 94) veremos que existe un método directo que permite obtener un tensor T^{ik} simétrico.

Como antes dijimos, si se lleva a cabo la integración (32.6) en un hiperplano $x^0 = \text{const}$, P^i toma la forma:

$$P^i = \frac{1}{c}\int T^{i0} dV, \tag{32.9}$$

donde la integración se extiende a todo el espacio (tridimensional). Las componentes espaciales de P^i forman el vector impulso tridimensional del sistema y la componente temporal es igual a la energía del mismo dividida por c. El vector de componentes

$$\frac{1}{c}T^{10}, \frac{1}{c}T^{20}, \frac{1}{c}T^{30}$$

puede así definirse como *densidad de impulso*, y la magnitud

$$W = T^{00}$$

como *densidad de energía*.

Para poner en claro la significación de las restantes componentes de T^{ik}, escribamos la ecuación de conservación (32.4) en forma tridimensional:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0. \tag{32.10}$$

Integremos estas ecuaciones en un volumen V del espacio. De la primera ecuación

se deduce

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00}dV+\int \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x_\alpha}dV=0$$

o bien, aplicando a la segunda integral el teorema de Gauss,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int (T^{00})\,dV=-c\oint T^{0\alpha}df_\alpha, \tag{32.11}$$

donde la integral del segundo miembro se extiende en la superficie que limita al volumen V (df_x, df_y, df_z son las componentes del vector tridimensional del elemento de superficie df). La expresión que aparece en el primer miembro es la variación por unidad de tiempo de la energía contenida en el volumen V. De aquí se sigue que la expresión que aparece en el segundo miembro es la cantidad de energía transferida a través de la frontera del volumen V, y el vector **S** de componentes

$$cT^{01},\ cT^{02},\ cT^{03}$$

es su flujo — la cantidad de energía que atraviesa la unidad de superficie por unidad de tiempo. Llegamos así a la importante conclusión de que las condiciones de invariancia relativista, que expresan el carácter tensorial de las cantidades T^{ik} conducen automáticamente a una relación bien definida entre el flujo de energía y el flujo de impulso: el flujo de energía es igual al flujo de impulso multiplicado por c^2.

Análogamente, de la segunda ecuación se deduce que

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \left(\frac{1}{c}T^{\alpha 0}\right)dV=-\oint T^{\alpha\beta}df_\beta. \tag{32.12}$$

En el primer miembro aparece la variación del impulso del sistema en el volumen V por unidad de tiempo; por consiguiente, $\oint T^{\alpha\beta}df_\beta$ es el impulso que sale del volumen V por unidad de tiempo. $T^{\alpha\beta}$ es así el flujo de impulso, llamado *tensor de tensiones;* lo designaremos por $\sigma_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = x, y, z$). El flujo de energía es un vector; en cambio, el flujo de impulso debe ser un tensor, evidentemente, ya que el impulso es un vector (la componente $\sigma_{\alpha\beta}$ de este tensor es la cantidad de componente α del impulso que atraviesa, por unidad de tiempo, la unidad de superficie perpendicular al eje x^β).

Escribamos, una vez más, un cuadro que dé el significado de las diferentes componentes del tensor de energía-impulso:

$$T^{ik}=\begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y/c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{32.13}$$

§ 33. El tensor energía-impulso del campo electromagnético

Apliquemos ahora las relaciones generales obtenidas en el párrafo anterior al campo electromagnetico. En este caso, la magnitud que aparece como integrando en (32.1) es igual, según (27.4), a

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{kl} F^{kl}$$

Las magnitudes q son las componentes del cuadripotencial del campo, A_k, de forma que la definición (32.5) del tensor T^{ik} es ahora;

$$T_i^k = \frac{\partial A_l}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\frac{\partial A_l}{\partial x^k} \right)} - \delta_i^k \Lambda.$$

Para calcular las derivadas de Λ que aparecen en esta expresión, determinemos la variación $\delta\Lambda$. Se tiene:

$$\delta\Lambda = -\frac{1}{8\pi} F^{kl} \delta F_{kl} = -\frac{1}{8\pi} F^{kl} \left(\delta \frac{\partial A_l}{\partial x^k} - \delta \frac{\partial A_k}{\partial x^l} \right)$$

o bien, permutando los índices y valiéndonos del hecho que $F_{kl} = -F_{lk}$,

$$\delta\Lambda = -\frac{1}{4\pi} F^{kl} \delta \frac{\partial A_l}{\partial x_k}.$$

De ahí se sigue que

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \left(\frac{\partial A_l}{\partial x^k} \right)} = -\frac{1}{4\pi} F^{kl},$$

y por esto,

$$T_i^k = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A_l}{\partial x^i} F^{kl} + \frac{1}{16\pi} \delta_i^k F_{lm} F^{lm}$$

o para las componentes contravariantes:

$$T^{ik} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A_l}{\partial x_i} F^k{}_l + \frac{1}{16\pi} g^{ik} F_{lm} F^{lm}.$$

Este tensor, sin embargo, no es simétrico. Para simetrizarlo sumémosle la cantidad

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A^l}{\partial x_l} F^k{}_l.$$

De acuerdo con la ecuación del campo (30.2), cuando no existen cargas se tiene $\partial F^k{}_l/\partial x_l = 0$ y, por consiguiente,

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A^i}{\partial x_l}F^k{}_l = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_l}(A^i F^k{}_l),$$

de modo que el cambio efectuado en T^{ik} se reduce a la forma (32.7) y es así admisible. Dado que $\dfrac{\partial A^l}{\partial x_i} - \dfrac{\partial A^i}{\partial x_l} = F^{il}$, encontramos finalmente la siguiente expresión del tensor energía-impulso del campo electromagnético

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(-F^{il}F^k{}_l + \frac{1}{4}g^{ik}F_{lm}F^{lm}\right). \tag{33.1}$$

Evidentemente, este tensor es simétrico. Además, goza de la propiedad de que

$$T^i_i = 0, \tag{33.2}$$

es decir, la suma de sus términos diagonales, su traza, es igual a cero.

Expresemos las componentes del tensor T^{ik} en función de las intensidades de los campos eléctrico y magnético. Partiendo de los valores (23.5) de las componentes F_{ik}, es fácil comprobar que, la magnitud T^{00} coincide con la densidad de energía W (31.5), del campo electromagnético mientras que las componentes coinciden con las componentes del vector de Poynting (31.2). Las componentes espaciales forman, en cambio, un tensor de tres dimensiones cuyas componentes son:

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{8\pi}(E_y^2+E_z^2-E_x^2+H_y^2+H_z^2-H_x^2),$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{1}{4\pi}(E_xE_y+H_xH_y),$$

etc., o bien,

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\{-E_\alpha E_\beta - H_\alpha H_\beta + \tfrac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}(E^2+H^2)\}. \tag{33.3}$$

Este tensor se llama *tensor de tensiones de Maxwell.*

Para reducir el tensor T^{ik} a la forma diagonal, hemos de pasar a un sistema de referencia en el que los vectores **E** y **H** (en el punto dado del espacio y en el instante dado) son paralelos o en el que uno de ellos es igual a cero; conforme sabemos (§ 25), esta transformación es siempre posible, excepto cuando **E** y **H** son perpendiculares entre sí y de igual módulo. Es fácil ver que después de la transformación las únicas componentes no nulas de T^{ik} serán:

$$T^{00} = -T^{11} = T^{22} = T^{33} = W$$

(el eje X se ha tomado en la dirección del campo).

Pero si los vectores **E** y **H** son perpendiculares entre sí y de igual módulo, el

tensor T^{ik} no se puede reducir a la forma diagonal †. Las componentes no nulas son en este caso, (donde el eje X se toma en la dirección de **E** y el eje Y en la dirección de **H**).

$$T^{00} = T^{33} = T^{30} = W$$

Hasta aquí hemos considerado campos en ausencia de cargas. Cuando existen partículas cargadas, el tensor energía-impulso de todo el sistema es la suma de los tensores energía-impulso del campo electromagnético y de las partículas, considerando en este último que las partículas no interactúan entre sí.

Para determinar la forma del tensor energía-impulso de las partículas hemos de representar su distribución de masas en el espacio mediante una « densidad de masa », de la misma manera como se ha descrito una distribución de cargas puntuales mediante su densidad de carga. Análogamente a la fórmula (28.1) para esta densidad, podemos escribir la densidad de masa en la forma,

$$\mu = \sum_a m_a \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \tag{33.4}$$

donde $\mathbf{r}_a$ son los vectores posición de las partículas y la suma se extiende a todas las partículas del sistema.

La « densidad de cuadrimpulso » de las partículas viene dada por $\mu c u_i$. En cambio, la densidad de impulso espacial es $\mu c u_a$. Sabemos ya que esta densidad es la componente $T^{0\alpha}/c$ del tensor energía-impulso, es decir, $T^{0\alpha} = \mu c^2 u^\alpha (\alpha = 1, 2, 3)$. Pero la densidad de masa es la componente temporal del cuadrivector $\frac{\mu}{c}\frac{dx^k}{dt}$ (de manera análoga a lo que ocurre con la densidad de carga, véase § 28). Por lo tanto, el tensor energía-impulso de un sistema de partículas que no están en interacción entre sí es:

$$T^{ik} = \mu c \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{dt} = \mu \, c \, u^i u^k \frac{ds}{dt}. \tag{33.5}$$

Como era de esperar, este tensor es simétrico.

Un cálculo directo permite comprobar que la energía y el impulso del sistema, definidos como suma de las energías y de los impulsos del campo y de las partículas,

† El hecho de que la reducción de un tensor simétrico a sus ejes principales pueda ser imposible, está ligado con el carácter pseudoeuclídeo del espacio-tiempo (cf. también el problem del § 94).

efectivamente se conservan. Dicho de otro modo, se trata de comprobar las ecuaciones.

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(T^{(f)k}_i + T^{(p)k}_i) = 0, \tag{33.6}$$

que expresan dichas leyes de conservación.

En virtud de (33.1), se puede escribir para el tensor energía-impulso del campo electromagnético

$$\frac{\partial T^{(f)k}_i}{\partial x^k} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F^{lm}}{\partial x_i}F^{lm} - \frac{\partial F_{il}}{\partial x_k}F^{kl} - \frac{\partial F^{kl}}{\partial x_k}F_{il}\right)$$

Substituyendo las ecuaciones de Maxwell (26.5) y (30.2)

$$\frac{\partial F^{lk}}{\partial x^k} = \frac{4\pi}{c}j^l, \qquad \frac{\partial F_{lm}}{\partial x^i} = -\frac{\partial F_{mi}}{\partial x^l} - \frac{\partial F_{il}}{\partial x^m}$$

y teniendo en cuenta el hecho de que el tensor F_{ik} es antisimétrico, se tendrá:

$$\frac{\partial T^{(f)k}_i}{\partial x^k} = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial F_{mi}}{\partial x^l}F^{lm} - \frac{1}{2}\frac{\partial F_{il}}{\partial x^m}F^{lm} - \frac{\partial F_{il}}{\partial x^k}F^{kl} - \frac{4\pi}{c}F_{il}j^l\right).$$

Permutando los índices, se demuestra fácilmente que los tres primeros términos del segundo miembro se reducen entre sí y se llega al resultado siguiente:

$$\frac{\partial T^{(f)k}_i}{\partial x^k} = -\frac{1}{c}F_{ik}j^k. \tag{33.7}$$

Ahora bien, derivando la expresión (33.5) del tensor energía-impulso de las partículas se obtiene:

$$\frac{\partial T^{(p)k}_i}{\partial x^k} = cu_i\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\mu\frac{dx^k}{dt}\right) + \mu c\frac{dx^k}{dt}\frac{\partial u_i}{\partial x^k}.$$

El primer término de esta expresión es nulo a causa de la conservación de la masa de las partículas que no interactúan entre sí. En efecto, las magnitudes $\mu\dfrac{dx^k}{dt}$ representan el cuadrivector « corriente de masa », análogo al cuadrivector corriente de carga (28.2); pero la conservación de la masa se expresa igualando a cero la divergencia de este cuadrivector; luego,

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\mu\frac{dx^k}{dt}\right) = 0, \tag{33.8}$$

al igual que la conservación de la carga se expresa mediante la ecuación (29.4).

Tenemos así:

$$\frac{\partial T_i^{(p)k}}{\partial x^k} = \mu c \frac{dx^k}{dt} \frac{\partial u_i}{\partial x^k} = \mu c \frac{du_i}{dt}.$$

Apliquemos ahora la ecuación del movimiento de las cargas en el campo, expresada en la forma cuadridimensional (23.4),

$$mc \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} u^k.$$

Pasando a distribuciones continuas de carga y de masa, se tiene, teniendo en cuenta las definiciones de las densidades μ y ϱ : $\mu/m = \varrho/e$. Podemos escribir, por lo tanto, la ecuación del movimiento en la forma:

$$\mu c \frac{du_i}{ds} = \frac{\varrho}{c} F_{ik} u^k$$

o bien,

$$\mu c \frac{du_i}{dt} = \frac{1}{c} F_{ik} \varrho u^k \frac{ds}{dt} = \frac{1}{c} F_{ik} j^k.$$

Por consiguiente:

$$\frac{\partial T_i^{(p)k}}{\partial x^k} = \frac{1}{c} F_{ik} j^k. \tag{33.9}$$

Sumando esta ecuación con la (33.7), se obtiene efectivamente el valor cero, es decir, se llega a la ecuación (33.6).

§ 34. **Teorema del virial**

Dado que la suma de los términos diagonales del tensor energía-impulso del campo electromagnético es igual a cero, la suma T_i^i para un sistema cualquiera de partículas en interacción se reduce a la traza del tensor energía-impulso que corresponde únicamente a las partículas. Teniendo en cuenta (33.5), resulta, por consiguiente:

$$T_i^i = T_i^{(p)i} = \mu c u_i u^i \frac{ds}{dt} = \mu c \frac{ds}{dt} = \mu c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Escribamos este resultado de otra forma pasando a una suma extendida a las par-

tículas, es decir, substituyendo en vez de μ la suma (33.4). Se obtiene entonces finalmente,

$$T_i^{\ i} = \sum_a m_a c^2 \sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a). \tag{34.1}$$

Obsérvese que, según esta fórmula, se tiene para todo sistema:

$$T_i^{\ i} \geqslant 0, \tag{34.2}$$

donde el signo de igualdad vale solamente para el campo electromagnético sin cargas.

Consideremos un sistema aislado de partículas cargadas que efectúan un movimiento finito, es decir, un movimiento en el que todas las cantidades (coordenadas, impulsos) que caracterizan al sistema varían en intervalos finitos †.

Promediemos la ecuación

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial t}+\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}=0$$

[véase (32.10)] respecto del tiempo. El valor medio de la derivada $\partial T^{\alpha 0}/\partial t$, al igual que el promedio de la derivada de cualquier variable acotada, es igual a cero††. Se obtiene por esto,

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\overline{T_\alpha^{\ \beta}}=0.$$

---

† Suponemos aquí que también el campo electromagnético del sistema se anula en el infinito. Esto significa que, si existe radiación de ondas electromagnéticas por parte del sistema, se postula la existencia de « paredes reflectoras » especiales que evitan que estas ondas se propaguen hasta el infinito.

†† Sea $f(t)$ una función acotada. El valor medio de la derivada df/dt en un cierto intervalo T es:

$$\overline{\frac{df}{dt}}=\frac{1}{T}\int_0^T \frac{df}{dt}\,dt=\frac{f(T)-f(0)}{T}.$$

Dado que $f(t)$ varía sólo entre límites finitos, el límite para T tendiendo a infinito del valor medio de df/dt es, evidentemente, igual a cero.

Multipliquemos esta ecuación por x^α e integremos en todo el espacio. Aplicando el teorema de Gauss y teniendo en cuenta que en el infinito $T_a^\beta = 0$, se ve que se anula la integral de superficie:

$$\int x^\alpha \frac{\partial \overline{T_\alpha}^\beta}{\partial x^\beta} dV = -\int \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} \overline{T_\alpha}^\beta dV = -\int \delta^\alpha_\beta \overline{T_\alpha}^\beta dV = 0,$$

o finalmente,

$$\int \overline{T_\alpha}^\alpha dV = 0. \tag{34.3}$$

Partiendo de esta igualdad podemos escribir para la integral de $\overline{T_i}^i = \overline{T_a}^\alpha + \overline{T_0}^0$:

$$\int \overline{T_i}^i dV = \int \overline{T_0}^0 dV = \mathcal{E},$$

donde $\mathcal{E}$ es la energía total del sistema.

Finalmente, substituyendo (34.1), se encuentra:

$$\mathcal{E} = \sum_a m_a c^2 \overline{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}. \tag{34.4}$$

Esta relación es la generalización relativista del *teorema del virial* de la mecánica clásica †. Para pequeñas velocidades, se transforma en

$$\mathcal{E} - \sum_a m_a c^2 = -\sum_a \overline{\frac{m_a v_a^2}{2}},$$

esto es, la energía total del sistema, excluida la energía en reposo de las partículas, es igual al valor medio cambiado de signo de la energía cinética, de acuerdo con el resultado a que conduce el teorema clásico del virial para un sistema de partículas cargadas (en interacción de acuerdo con la ley de Coulomb).

§ 35. El tensor energía-impulso de los cuerpos macroscópicos

Además del tensor energía-impulso de un sistema de partículas puntuales (33.5) necesitaremos también la expresión de este tensor que corresponde a los cuerpos macroscópicos, considerados como continuos.

El flujo de impulso a través del elemento $d\mathbf{f}$ de superficie del cuerpo no es sino la fuerza que actúa sobre este elemento. Por consiguiente, $\sigma_{\alpha\beta}\, df_\beta$ es la componente-α de la fuerza que actúa sobre el elemento $d\mathbf{f}$. Introduzcamos ahora un sistema de referencia en el que un elemento de volumen dado del cuerpo se encuentra en re-

† Véase *Mecánica*, § 10.

poso. En este sistema de referencia vale la ley de Pascal, esto es, la presión aplicada a una porción dada del cuerpo se transmite por igual en todas direcciones y es siempre perpendicular a la superficie sobre la que actúa †. Por lo tanto, podemos escribir $\sigma_{\alpha\beta}\, df_\beta = p\, df_\alpha$, de forma que

$$\sigma_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta},$$

donde p es la presión. En cuanto a las componentes $T^{\alpha 0}$, que representan la densidad de impulso, son iguales a cero para el elemento de volumen en cuestión en el sistema de referencia considerado. La componente T^{00} es, como siempre, la densidad de energía del cuerpo, que representamos aquí por ε; ε/c^2 es entonces la densidad de masa del cuerpo, esto es, la masa por unidad de volumen. Hay que subrayar que se trata aquí de la unidad de volumen « propio », esto es, del volumen en el sistema de referencia en el que la porción dada del cuerpo está en reposo.

En el sistema de referencia considerado, el tensor energía-impulso (para la porción dada del cuerpo) tiene así la forma:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{35.1}$$

Es ahora fácil hallar la expresión del tensor energía-impulso en un sistema de referencia arbitrario. Para ello introduzcamos la cuadrivelocidad u^i del movimiento macroscópico de un elemento de volumen del cuerpo. En el sistema de referencia en que el elemento considerado se encuentra en reposo, las componentes de su cuadrivelocidad son $u^i = (1, 0)$. La expresión de T^{ik} debe elegirse de manera que en este sistema de referencia tome la forma (35.1). Es fácil comprobar que aquélla es precisamente

$$T^{ik} = (p+\epsilon)u^i u^k - p g^{ik} \tag{35.2}$$

o para las componentes mixtas

$$T_i^k = (p + \varepsilon)u_i u^k - p\delta_i^k$$

Con esto queda determinado el tensor de energía impulso de un cuerpo macroscópico. Las correspondientes expresiones para la densidad de energía ϵ, la densidad de flujo de energía S y el tensor de tensiones $\sigma_{\alpha\beta}$ son:

† En rigor, la ley de Pascal vale únicamente para líquidos y gases. Sin embargo, para cuerpos sólidos las máximas diferencias posibles de la tensión en direcciones distintas es despreciable frente a las tensiones que pueden representar un papel en teoría de la relatividad, de forma que carece de interés tenerlas en cuenta.

$$W = \frac{\varepsilon + p\dfrac{v^2}{c^2}}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}, \quad \mathbf{S} = \frac{(p+\varepsilon)\,\mathbf{v}}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}},$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{(p+\varepsilon)\,v_\alpha v_\beta}{c^2\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)} + p\delta_{\alpha\beta}. \tag{35.3}$$

Si la velocidad v del movimiento macroscópico es pequeña comparada con la velocidad de la luz, se tendrá aproximadamente,

$$S = (p+\epsilon)\mathbf{v}\,.$$

Dado que $\frac{1}{c^2}\,\mathcal{T}$ es la densidad de impulso, vemos que en este caso la suma $\frac{1}{c^2}\,(p+\varepsilon)$ representa el papel de densidad de masa del cuerpo.

La expresión de T^{ik} se simplifica cuando las velocidades de todas las partículas que constituyen el cuerpo son pequeñas respecto de la velocidad de la luz (la velocidad del movimiento macroscópico en sí puede, en cambio, ser cualquiera). En este caso podemos prescindir, en la expresión ε de la densidad de energía, de todos los términos que son pequeños comparados con la energía en reposo, esto es, podemos escribir $\mu_0 c^2$ en lugar de ε, donde μ_0 es la suma de las masas de las partículas que se encuentran en la unidad de volumen (propio) del cuerpo (hay que subrayar que en el caso general es necesario distinguir entre μ_0 y la densidad de masa real del cuerpo ε/c^2, que incluye también la masa asociada a la energía del movimiento microscópico de las partículas en el mismo y la energía de interacción de éstas). En cuanto a la presión, determinada por la energía del movimiento microscópico de las moléculas, en el caso que estamos considerando es, evidentemente, también pequeña comparada con la densidad de energía en reposo $\mu_0 c^2$. Encontramos así para T^{ik} la expresión:

$$T^{ik} = \mu_0 c^2 u^i u^k. \tag{35.4}$$

De (34.2) se deduce,

$$T_i^{\ i} = \epsilon - 3p. \tag{35.5}$$

La propiedad general (34.2) del tensor energía-impulso de un sistema cualquiera prueba ahora que la siguiente desigualdad es siempre válida para la presión y la densidad de un cuerpo macroscópico:

$$p < \frac{\epsilon}{3}. \tag{35.6}$$

Comparemos la relación (35.5) con la fórmula general (34.1) que, conforme vimos, es válida para un sistema cualquiera. Dado que se trata ahora de un cuerpo macroscópico, la expresión (34.1) debe promediarse con relación a todos los valores de $\mathbf{r}$ en la unidad de volumen. El resultado que se obtiene es:

$$\epsilon - 3p = \sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} \tag{35.7}$$

(la suma se extiende a todas las partículas que se encuentran en la unidad de volumen).

Apliquemos las fórmulas obtenidas a un gas perfecto, que suponemos constituido por partículas idénticas. Dado que las partículas de un gas perfecto no interactúan entre sí, podemos utilizar la fórmula (33.5) después de promediarla.

Se tiene así para un gas perfecto:

$$T^{ik} = nmc \overline{\frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{ds}},$$

donde n es el número de partículas por unidad de volumen y el trazo significa el valor promedio relativo a todas las partículas. Si no existe movimiento macroscópico del gas, para T^{ik} se tiene, por otra parte, la expresión (35.1). Comparando las dos fórmulas, se llega a las ecuaciones:

$$\epsilon = nm \overline{\left(\frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)}, \quad p = \frac{nm}{3} \overline{\left(\frac{v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)}. \tag{35.8}$$

Estas ecuaciones determinan la densidad y la presión de un gas perfecto relativista en función de la velocidad de sus partículas; la segunda substituye la conocida fórmula $p = nm\overline{v^2}/3$ de la teoría cinética de los gases no relativista.

CAPÍTULO 5

CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS CONSTANTES

§ 36. La ley de Coulomb

Para un campo eléctrico constante o, como suele decirse, para un campo *electrostático*, las ecuaciones de Maxwell toman la forma:

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\varrho, \tag{36.1}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0. \tag{36.2}$$

El campo eléctrico $\mathbf{E}$ se expresa en función sólo del potencial escalar mediante la relación

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\,\phi. \tag{36.3}$$

Substituyendo (36.3) en (36.1), se obtiene la ecuación a que satisface el potencial de un campo eléctrico constante:

$$\Delta\phi = -4\pi\varrho. \tag{36.4}$$

Esta ecuación se llama *ecuación de Poisson*. En particular, en el vacío, es decir, para $\varrho = 0$, el potencial satisface la *ecuación de Laplace*

$$\Delta\phi = 0. \tag{36.5}$$

De esta última ecuación se sigue, en particular, que el potencial de un campo eléctrico no puede presentar ni máximo ni mínimo. En efecto, para que ϕ alcance un valor extremo, sería necesario que las primeras derivadas de ϕ respecto de las coordenadas fuesen nulas y que las segundas derivadas $\partial^2\phi/\partial x^2$, $\partial^2\phi/\partial y^2$, $\partial^2\phi/\partial z^2$ tuvieran todas el mismo signo. Esto último es imposible, ya que en tal caso no se podría satisfacer la ecuación (36.5).

Determinemos ahora el campo producido por una carga puntual. Por razones de simetría, es claro que este campo estará dirigido a lo largo de radios que parten del punto en el que se encuentra la carga e. Por las mismas razones es también claro

que el módulo E del campo depende sólo de la distancia R de la carga al punto. Para determinar este módulo, apliquemos la ecuación (36.1) en su forma integral (30.5). El flujo del campo eléctrico a través de una superficie esférica de radio R con centro en la carga e es igual a $4\pi R^2 E$; este flujo debe ser igual a $4\pi e$. De ahí se sigue que

$$E = \frac{e}{R^2}.$$

Con notación vectorial:

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3}. \tag{36.6}$$

El campo producido por una carga puntual es, pues, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la carga. Esta ley es la llamada *ley de Coulomb*. El potencial de este campo es, evidentemente,

$$\phi = \frac{e}{R}. \tag{36.7}$$

Si se tiene un sistema de cargas, el campo producido por el mismo es igual, según el principio de superposición, a la suma de los campos producidos por cada una de las partículas individualmente. En particular, el potencial de dicho campo es igual a

$$\phi = \sum_a \frac{e_a}{R_a},$$

donde R_a es la distancia desde la carga e_a al punto al que se refiere el potencial. Si introducimos la densidad de carga ϱ, esta fórmula pasa a ser

$$\phi = \int \frac{\varrho}{R} dV, \tag{36.8}$$

donde R es la distancia desde el elemento de volumen dV al punto dado del campo (punto de observación).

De la ecuación (36.4) se deduce una relación matemática interesante al substituir los valores de ϱ y ϕ que corresponden a una carga puntual, es decir, $\varrho = e\delta(\mathbf{R})$ y $\phi = e/R$. Se encuentra así,

$$\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\,\delta(\mathbf{R}). \tag{36.9}$$

§ 37. Energía electrostática de las cargas

Determinemos la energía de un sistema de cargas. Partiremos para ello de la energía del campo, esto es, de la expresión (31.5) para la densidad de energía. La energía del sistema de cargas debe ser igual a

$$U = \frac{1}{8\pi}\int E^2\, dV,$$

donde E es el campo producido por dichas cargas y la integral se extiende a todo el espacio. Substituyendo en vez de $\mathbf{E}$, $\mathbf{E} = -\text{grad}\,\phi$, U puede expresarse de la siguiente manera:

$$U = -\frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}\cdot\text{grad}\,\phi\, dV = -\frac{1}{8\pi}\int \text{div}\,(\mathbf{E}\phi)\, dV + \frac{1}{8\pi}\int \phi\,\text{div}\mathbf{E}\, dV.$$

Según el teorema de Gauss, la primera integral es igual a la integral de $\mathbf{E}\phi$ extendida a la superficie que limite el volumen de integración; pero dado que la integral se extiende a todo el espacio y puesto que el campo es nulo en el infinito, esta integral es igual a cero. Substituyendo en la segunda integral $\text{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\varrho$, se encuentra la siguiente expresión de la energía de un sistema de cargas:

$$U = \tfrac{1}{2}\int \varrho\phi\, dV. \tag{37.1}$$

Para un sistema de cargas puntuales, e_a, podemos escribir, en vez de la integral, una suma extendida a las cargas

$$U = \tfrac{1}{2}\sum_a e_a\phi_a, \tag{37.2}$$

donde ϕ_a es el potencial del campo producido por todas las cargas en el punto en que se encuentra la carga e_a.

Si aplicamos la fórmula obtenida a una sola partícula elemental cargada (por ejemplo, un electrón) y al campo que produce ella misma, llegamos a la conclusión de que la carga debe poseer una cierta « autoenergía » potencial igual a $e\phi/2$, donde ϕ es el potencial del campo producido por la carga en el punto en que se encuentra. Ahora bien, sabemos que en teoría de la relatividad toda partícula elemental debe considerarse como un punto. Pero el potencial $\phi = e/R$ de su campo se hace infinito en el punto $R = 0$. Según la electrodinámica, el electrón debería, pues, poseer una « autoenergía » infinita y, por lo tanto, también una masa infinita (igual a la energía dividida por c^2). El absurdo físico que constituye este resultado muestra que los principios fundamentales de la propia electrodinámica conducen a la consecuencia de que debe ajustarse su aplicación a determinados límites.

Obsérvese que al conducir la electrodinámica a un valor infinito de la masa y de la autoenergía, es imposible dentro de los límites de la propia electrodinámica clásica plantearnos la cuestión de si la masa total del electrón es o no de carácter electrodinámico (esto es, asociada o no a la autoenergía electromagnética de la partícula) †.

Dado que el valor infinito, físicamente sin sentido, de la autoenergía de una partícula elemental está ligado con el hecho de que dicha partícula debe ser considerada como un punto, llegamos a la conclusión de que la electrodinámica, como teoría física lógicamente cerrada, presenta contradicciones internas cuando pasamos a distancias suficientemente pequeñas. Cabe entonces plantearse la cuestión de cuál es el orden de magnitud de tales distancias. Se puede llegar a una respuesta observando que para la autoenergía electromagnética del electrón se debería obtener un valor del orden de la energía en reposo mc^2. Si, por otra parte, consideramos que el electrón posee un cierto radio R_0, su autoenergía potencial sería del orden de e^2/R_0. De la condición de que estas dos cantidades sean del mismo orden, $e^2/R_0 \sim \sim mc^2$, se sigue que

$$R_0 \sim \frac{e^2}{mc^2}. \tag{37.3}$$

Esta dimensión (el « radio » del electrón) determina el límite de aplicación de la electrodinámica al electrón y se deduce de sus propios principios fundamentales. Sin embargo, no hay que perder de vista que, en realidad, los límites de aplicación de la electrodinámica clásica que se presentan aquí se encuentran mucho más allá de lo que debe ser, y ello debido precisamente a la existencia de fenómenos cuánticos††.

Volvamos de nuevo a la fórmula (37.2). Los potenciales ϕ_a que figuran en ella son iguales, según la ley de Coulomb, a

$$\phi_a = \sum \frac{e_b}{R_{ab}}, \tag{37.4}$$

† Desde un punto de vista puramente formal, la finitud de la masa del electrón se puede conseguir introduciendo una masa negativa infinita de origen no electromagnético que compense el valor infinito de la masa electromagnética (« renormalización » de la masa). Sin embargo, veremos más adelante (§ 75) que este recurso no elimina todas las contradicciones internas de la electrodinámica clásica.

†† Los efectos cuánticos cobran ya importancia para longitudes del orden de h/mc, donde h es la constante de Planck.

donde R_{ab} es la distancia entre las cargas e_a, e_b. La expresión (37.2) para la energía consta de dos partes. En primer lugar, contiene una constante infinita — la autoenergía de las cargas — que no depende de sus distancias mutuas. En segundo lugar, existe la energía de interacción de las cargas que depende de las distancias que las separan. Únicamente esta parte es interesante desde el punto de vista físico. Su valor es:

$$U' = \tfrac{1}{2} \sum e_a \phi'_a, \tag{37.5}$$

donde,

$$\phi'_a = \sum_{b \neq a} \frac{e_b}{R_{ab}} \tag{37.6}$$

es el potencial en el punto en que se encuentra la carga e_a producido por todas las demás cargas. Con otras palabras, se puede escribir:

$$U' = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}. \tag{37.7}$$

En particular, la energía de interacción de dos cargas es:

$$U' = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}. \tag{37.8}$$

§ 38. Campo de una carga en movimiento uniforme

Determinemos el campo producido por una carga e que se mueve uniformemente con velocidad V. Llamemos K al sistema de referencia del laboratorio; el sistema de referencia que se mueve con la carga lo llamaremos K'. Supongamos que la carga se encuentra en el origen de coordenadas del sistema K'; el sistema K' se mueve respecto de K a lo largo del eje X, los ejes Y y Z son paralelos a los ejes Y' y Z'. En el instante $t = 0$ los orígenes de coordenadas de los sistemas coinciden. Las coordenadas de la carga en el sistema K son, por consiguiente, $x = Vt$, $y = z = 0$. En el sistema K' se tiene un campo eléctrico constante con un potencial vector $\mathbf{A}' = 0$, y un potencial escalar igual a $\phi' = e/R'$, donde $R'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. En el sistema K, de acuerdo con (24.1) y para $\mathbf{A}' = 0$,

$$\phi = \frac{\phi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{e}{R' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{38.1}$$

Hemos de expresar ahora R' en función de las coordenadas x, y, z, en el sistema K. Según las fórmulas de transformación de Lorentz,

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

de las que se sigue

$$R'^2 = \frac{(x-Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \tag{38.2}$$

Substituyendo este resultado en (38.1), se encuentra:

$$\phi = \frac{e}{R^*} \tag{38.3}$$

donde hemos introducido la notación

$$R^{*2} = (x-Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2). \tag{38.4}$$

El potencial vector en el sistema K es igual a

$$\mathbf{A} = \phi\frac{\mathbf{V}}{c} = \frac{e\mathbf{V}}{cR^*}. \tag{38.5}$$

En el sistema K' el campo magnético $\mathbf{H}'$ es nulo y el campo eléctrico viene dado por

$$\mathbf{E}' = \frac{e\mathbf{R}'}{R'^3}.$$

De la fórmula (24.2) se deduce:

$$E_x = E'_x = \frac{ex'}{R'^3}, \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{ey'}{R'^3\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$E_z = \frac{ez'}{R'^3\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Substituyendo en vez de R', x', y', z' sus expresiones en función de x, y, z, se obtiene:

$$\mathbf{E} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\frac{e\mathbf{R}}{R^{*3}}, \tag{38.6}$$

donde **R** es el vector de origen en la carga e y extremo en el punto de observación del campo, de coordenadas x, y, z, (sus componentes son $x-Vt$, y, z).

Esta expresión de **E** se puede escribir de otra manera introduciendo el ángulo θ formado por la dirección del movimiento y el vector posición **R**. Es claro que $y^2+z^2 = R^2 \operatorname{sen}^2\theta$ y, por consiguiente, R^{*2} se puede escribir en la forma:

$$R^{*2} = R^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\operatorname{sen}^2\theta\right). \tag{38.7}$$

Se tiene entonces para **E**,

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3}\frac{1-\dfrac{V^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\operatorname{sen}^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{38.8}$$

Para una distancia fija R a partir de la carga, el valor del campo E aumenta cuando θ aumenta de 0 a $\pi/2$ (o cuando θ disminuye de π a $\pi/2$). El campo alcanza su valor mínimo en la dirección del movimiento ($\theta = 0$, π); es igual a

$$E_{\parallel} = \frac{e}{R^2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right).$$

El valor máximo lo alcanza en la dirección perpendicular a la velocidad ($\theta = \pi/2$) y es entonces igual a

$$E_{\perp} = \frac{e}{R^2}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}.$$

Obsérvese que a medida que aumenta la velocidad, el campo $E_{\parallel}$ disminuye, mientras que el campo $E_{\perp}$ aumenta. Podemos describir este hecho de manera intuitiva diciendo que el campo eléctrico de una carga en movimiento se « contrae » en la dirección del movimiento. Para velocidades V próximas a la velocidad de la luz, el denominador en la fórmula (38.8) es próximo a cero en un estrecho intervalo de valores de θ en torno del valor $\theta = \pi/2$. La « anchura » de este intervalo es del orden de

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

Tenemos así que el campo eléctrico de una carga que se mueve rápidamente, a una distancia dada de la misma, es apreciable únicamente en un pequeño intervalo

angular en el entorno del plano ecuatorial, y la anchura de este intervalo disminuye cuando V aumenta como $\sqrt{1-(V^2/c^2)}$.

El campo magnético en el sistema K es:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{E} \tag{38.9}$$

[véase (24.5)]. En particular, para $V \ll c$ el campo eléctrico viene dado aproximadamente por la fórmula ordinaria de Coulomb, $\mathbf{E}=e\mathbf{R}/R^3$, y el campo magnético es entonces,

$$\mathbf{H} = \frac{e}{c}\frac{\mathbf{V}\times\mathbf{R}}{R^3}, \tag{38.10}$$

PROBLEMA

Determinar la fuerza (en el sistema K) entre dos cargas que se mueven con la misma velocidad V.

Solución. Determinaremos la fuerza F calculando la fuerza que actúa sobre una de las cargas (e_1) en el campo producido por la otra (e_2). Teniendo en cuenta (38.9), se tiene:

$$\mathbf{F} = e_1\mathbf{E}_2 + \frac{e_1}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{H}_2 = e_1\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\mathbf{E}_2 + \frac{e_1}{c^2}\mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{E}_2).$$

Substituyendo el valor de E_2 que resulta de (38.8), se obtiene para las componentes de la fuerza en la dirección del movimiento (F_x) y en una dirección perpendicular al mismo (F_y) los valores siguientes:

$$F_x = \frac{e_1e_2}{R^2}\frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\cos\theta}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\operatorname{sen}^2\theta\right)^{3/2}}, \qquad F_y = \frac{e_1e_2}{R^2}\frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^2\operatorname{sen}\theta}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\operatorname{sen}^2\theta\right)^{3/2}},$$

donde **R** es el vector de origen en e_2 y extremo en e_1 y θ es el ángulo formado por **R** y **V**.

§ 39. Movimiento en un campo de Coulomb

Consideremos el movimiento de una partícula de masa m y carga e en el campo producido por una segunda carga e'; supondremos que la masa de esta segunda carga es tan grande que es posible considerarla fija. Nuestro problema queda entonces reducido a estudiar el movimiento de una carga e en un campo eléctrico central cuyo potencial es $\phi = e'/r$.

La energía total de la partícula $\mathcal{E}$ es igual a

$$\mathcal{E} = c\sqrt{p^2+m^2c^2} + \frac{a}{r},$$

donde $a = ee'$. Utilizando coordenadas polares en el plano del movimiento de la partícula, la mecánica nos dice que

$$p^2 = (M^2/r^2)+p_r^2,$$

donde p_r es la componente radial del impulso y M es el valor constante del momento cinético de la partícula. En estas condiciones,

$$\mathcal{E} = c\sqrt{p_r^2+\frac{M^2}{r^2}+m^2c^2}+\frac{a}{r}. \tag{39.1}$$

Veamos ahora si durante su movimiento la partícula puede acercarse al centro cuanto se quiera. En primer lugar, es claro que esto nunca ocurrirá si las cargas e y e' se repelen entre sí, esto es, si e y e' tienen el mismo signo. Además, en el caso de atracción (e y e' de signos opuestos) no es posible acercarse más y más al centro si $Mc>|a|$; en efecto, en este caso el primer término de (39.1) es siempre mayor que el segundo y para $r\to 0$ el segundo miembro de la igualdad tendería a infinito. Por el contrario, si $Mc<|a|$, cuando $r\to 0$ esta expresión puede conservarse finita (se sobreentiende que, en este caso, p_r tiende a infinito). Por lo tanto, si

$$cM < |a|, \tag{39.2}$$

la partícula « cae » en su movimiento hacia la carga que la atrae — en contraposición a la mecánica no relativista, según la cual este colapso es en general imposible para el campo de Coulomb (con la única excepción del caso en que $M = 0$, es decir, cuando la partícula e se mueve en línea recta hacia la partícula e').

La manera más cómoda de llegar a la determinación completa del movimiento de una carga en un campo de Coulomb, consiste en partir de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Elijamos coordenadas polares r, ϕ en el plano del movimiento. La ecuación de Hamilton-Jacobi (16.11) es de la forma:

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{a}{r}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2+m^2c^2 = 0.$$

Busquemos S de la forma

$$S = -\mathcal{E}t+M\phi+f(r),$$

donde $\mathcal{E}$ y M son los valores constantes de la energía y del momento cinético de la partícula móvil. El resultado es:

$$S = -\mathcal{E}t+M\phi+\int\sqrt{\frac{1}{c^2}\left(\mathcal{E}-\frac{a}{r}\right)^2-\frac{M^2}{r^2}-m^2c^2}\,dr. \tag{39.3}$$

La trayectoria se determina mediante la ecuación $\partial S/\partial M = \text{const}$. La integración de (39.3) conduce a los siguientes resultados para la trayectoria:

(a) si $Mc > |\alpha|$,

$$(c^2M^2-\alpha^2)\frac{1}{r} = c\sqrt{(M\mathcal{E})^2-m^2c^2(M^2c^2-\alpha^2)}\cos\left(\phi\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{c^2M^2}}\right)-\mathcal{E}\alpha. \quad (39.4)$$

(b) si $Mc < |\alpha|$,

$$(\alpha^2-M^2c^2)\frac{1}{r} = \pm c\sqrt{(M\mathcal{E})^2+m^2c^2(\alpha^2-M^2c^2)}\cosh\left(\phi\sqrt{\frac{\alpha^2}{c^2M^2}-1}\right)+\mathcal{E}\alpha. \quad (39.5)$$

(c) si $Mc = |\alpha|$,

$$\frac{2\mathcal{E}\alpha}{r} = \mathcal{E}^2-m^2c^4-\phi^2\left(\frac{\mathcal{E}\alpha}{cM}\right)^2. \quad (39.6)$$

La constante de integración está contenida en la elección arbitraria del origen para la medida del ángulo ϕ.

En (39.4) la ambigüedad del signo ante la raíz cuadrada carece de importancia, dado que está vinculado también a la elección del origen de referencia para el ángulo ϕ en la función cos. En el caso de atracción ($\alpha<0$), la trayectoria representada por esta ecuación es tal que los valores de r están acotados (movimiento finito), si $\mathcal{E}<mc^2$. Si, en cambio, $\mathcal{E}>mc^2$, r puede tender a infinito (movimiento infinito). Al movimiento finito corresponde el movimiento en una órbita cerrada (elipse) en mecánica no relativista. De (39.4) se sigue fácilmente que en mecánica relativista la trayectoria no puede nunca ser cerrada; cuando el ángulo ϕ aumenta en 2π, la distancia r a partir del centro no vuelve a su valor inicial. En lugar de elipses obtenemos ahora órbitas en forma de « rosetas » abiertas. Así, pues, mientras en mecánica no relativista el movimiento finito en un campo de Coulomb conduce a una órbita cerrada, en mecánica relativista el campo de Coulomb pierde esta propiedad.

En (39.5) hemos de elegir el signo positivo para la raíz en el caso $\alpha<0$ y el signo negativo si $\alpha>0$ [la elección de signo opuesta correspondería a cambiar el signo de la raíz que aparece en (39.1)].

Para $\alpha<0$ las trayectorias (39.5) y (39.6) son espirales en las que la distancia r tiende a cero cuando $\phi\to\infty$. En cambio, el tiempo requerido para la « caída » de la carga al origen de coordenadas es finito. Esto se puede comprobar observando que la dependencia de la coordenada r con relación al tiempo está determinada por la ecuación $\partial S/\partial\mathcal{E} = \text{const}$; substituyendo (39.3), se ve que el tiempo está determinado por una integral que converge para $r\to 0$.

PROBLEMAS

1. Determinar el ángulo de desviación de una carga que atraviesa un campo de Coulomb repulsivo ($\alpha>0$).

Solución. El ángulo de desviación χ es igual a $\chi=\pi-2\phi_0$, donde ϕ_0 es el ángulo formado por las dos asintotas de la trayectoria (39.4). Se encuentra:

$$\chi=\pi-\frac{2cM}{\sqrt{c^2M^2-\alpha^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{v\sqrt{c^2M^2-\alpha^2}}{c\alpha}\right),$$

donde v es la velocidad de la carga en el infinito.

2. Determinar la sección eficaz de dispersión, para ángulos pequeños, en la dispersión de partículas por un campo de Coulomb.

Solución. La sección eficaz $d\sigma$ es la razón del número de partículas dispersadas por segundo en un elemento dado do de ángulo sólido al flujo de partículas incidentes (es decir, al número de partículas que atraviesan por segundo 1 cm^2 de superficie perpendicular al haz de partículas) †.

Dado que el ángulo de desviación χ de la partícula en su paso a través del campo está determinado por el *parámetro de impacto* (es decir, por la distancia desde el centro a la recta a lo largo de la cual se movería la carga si no existiera el campo), será:

$$d\sigma=2\pi\varrho\,d\varrho=2\pi\varrho\frac{d\varrho}{d\chi}d\chi=\varrho\frac{d\varrho}{d\chi}\frac{do}{\operatorname{sen}\chi},$$

donde $do=2\pi$ sen $\chi\,d\chi$. El ángulo de desviación (para ángulos pequeños) se puede tomar igual a la razón de la variación de impulso a su valor inicial. Aquélla es igual a la integral respecto del tiempo de la fuerza que actúa sobre la carga en la dirección perpendicular a la dirección del movimiento, y es igual aproximadamente a $\frac{\alpha}{r^2}\frac{\varrho}{r}$. Tenemos así,

$$\chi=\frac{1}{p}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a\varrho\,dt}{(\varrho^2+v^2t^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\alpha}{p\varrho v}$$

(v es la velocidad de las partículas). De aquí se sigue que la sección eficaz para ángulos pequeños es igual a

$$d\sigma=4\left(\frac{\alpha}{pv}\right)^2\frac{do}{\chi^4}.$$

En el caso no relativista, $p\cong mv$ y esta expresión coincide con la obtenida mediante la fórmula de Rutherford ††para χ pequeño.

---

† Véase *Mecánica*, § 18.

†† Véase *Mecánica*, § 19.

§ 40. Momento dipolar

Consideremos el campo producido por un sistema de cargas a grandes distancias, esto es, a distancias grandes comparadas con las dimensiones del sistema.

Introduzcamos un sistema de coordenadas cuyo origen sea un punto cualquiera interior al sistema de cargas. Sean $\mathbf{r}_a$ los vectores posición de las diferentes cargas. El potencial del campo producido por todas las cargas en el punto determinado por el vector posición $\mathbf{R}_0$ es:

$$\phi = \sum_a \frac{e_a}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a|}$$

(la suma se extiende a todas las cargas); $\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a$ son los vectores de orígenes en las cargas e_a y extremo en el punto en que se quiere determinar el potencial.

Se trata de estudiar esta expresión para valores grandes de $R_0 (R_0 \gg r_a)$. Para ello desarrollémosla en serie de potencia de $\mathbf{r}_a/R_0$ mediante la fórmula:

$$f(\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}) = f(\mathbf{R}_0) - \mathbf{r} \cdot \operatorname{grad} f(\mathbf{R}_0)$$

(el operador grad se refiere a la derivación respecto de las componentes del vector $\mathbf{R}_0$). Salvo términos de orden superior al primero,

$$\phi = \frac{\sum e_a}{R_0} - \sum e_a \mathbf{r}_a \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{R_0}. \tag{40.2}$$

La suma

$$\mathbf{d} = \sum e_a \mathbf{r}_a \tag{40.3}$$

se llama *momento dipolar* del sistema de cargas. Importa observar que si la suma de todas las cargas, $\sum e_a$, es cero, el momento dipolar no depende de la elección del origen de coordenadas, ya que los vectores posición $\mathbf{r}_a$ y $\mathbf{r}'_a$ de una misma carga, cualquiera, en dos sistemas de coordenadas diferentes están relacionados entre sí por

$$\mathbf{r}'_a = \mathbf{r}_a + \mathbf{a},$$

donde $\mathbf{a}$ es un vector constante. Por lo tanto, si $\sum e_a = 0$, el momento dipolar es el mismo en ambos sistemas:

$$\mathbf{d}' = \sum e_a \mathbf{r}'_a = \sum e_a \mathbf{r}_a + \mathbf{a} \sum e_a = \mathbf{d}.$$

Si representamos por $e_a^+, \mathbf{r}_a^+$ y $-e_a^-, \mathbf{r}_a^-$ las cargas positivas y negativas del sistema y sus correspondientes vectores posición, podemos escribir el momento dipolar en la forma:

$$\mathbf{d} = \sum e_a^+ \mathbf{r}_a^+ - \sum e_a^- \mathbf{r}_a^- + \mathbf{R}_a^+ \sum e_a^+ - \mathbf{R}^- \sum e_a^- \tag{40.4}$$

donde,

$$\mathbf{R}^+ = \frac{\sum e_a^+ \mathbf{r}_a^+}{\sum e_a^+}, \qquad \mathbf{R}^- = \frac{\sum e_a^- \mathbf{r}_a^-}{\sum e_a^-} \tag{40.5}$$

son los vectores posición de los « centros de carga » para las cargas positivas y negativas. Si $\sum e_a^+ = \sum e_a^- = e$, se tendrá:

$$\mathbf{d} = e\mathbf{R}_{+-}, \tag{40.6}$$

donde $\mathbf{R}_{+-} = \mathbf{R}^+ - \mathbf{R}^-$ es el vector de origen en el centro de cargas negativas y extremo en el centro de cargas positivas. En particular, si sólo existen dos cargas, $\mathbf{R}_{+-}$ es el vector que las une.

Si la carga total del sistema es nula, el potencial del campo creado por el sistema a grandes distancias es:

$$\phi = -\mathbf{d} \cdot \nabla \frac{1}{\mathbf{R}_0} = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}_0}{R_0^3}. \tag{40.7}$$

La intensidad del campo es:

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}_0}{R_0^3} = -\frac{1}{R_0^3} \text{ grad } (\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}_0) - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}_0) \text{ grad } \frac{1}{R_0^3},$$

o, finalmente,

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{R_0^3}, \tag{40.8}$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario correspondiente a $\mathbf{R}_0$. Otra expresión útil para el campo es:

$$\mathbf{E} = (\mathbf{d} \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{R_0}. \tag{40.9}$$

Así pues, el potencial del campo producido por un sistema de cargas cuya carga total es igual a cero, a grandes distancias es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, y su intensidad es inversamente proporcional al cubo de la misma.

Este campo presenta simetría axil respecto de la dirección del vector **d**. En un plano que pase por él (y en cuya dirección se toma el eje Z), las componentes del vector **E** son

$$E_z = d\frac{3\cos^2\theta - 1}{R_0^3}, \quad E_x = d\frac{3\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{R_0^3}. \tag{40.10}$$

Las componentes radial y tangencial en este plano son

$$E_R = d\frac{2\cos\theta}{R_0^3}, \quad E_\theta = -d\frac{\operatorname{sen}\theta}{R_0^3}. \tag{40.11}$$

§ 41. Momentos multipolares

En el desarrollo del potencial en potencias de $1/R_0$,

$$\phi = \phi^{(0)} + \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \ldots, \tag{41.1}$$

el término $\phi^{(n)}$ es proporcional a $1/R_0^{n+1}$. Vimos que el primer término, $\phi^{(0)}$, está determinado por la suma de todas las cargas; el segundo término $\phi^{(1)}$, llamado potencial dipolar del sistema, está determinado por el momento dipolar del mismo.

El tercer término en el desarrollo, $\phi^{(2)}$, es igual a

$$\phi^{(2)} = \frac{1}{2}\sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\left(\frac{1}{R_0}\right), \tag{41.2}$$

donde la suma se extiende a todas las cargas; se ha prescindido del índice que fija el número de la carga; x_α son las componentes del vector **r**, y X_α las del vector $\mathbf{R}_0$.

Esta parte del potencial se suele llamar *potencial cuadripolar*. Si la suma de las cargas y el momento dipolar del sistema son ambos iguales a cero, el desarrollo empieza con el término $\phi^{(2)}$.

En la expresión (41.2) aparecen las seis cantidades $\sum e x_\alpha x_\beta$. Sin embargo, es fácil ver que el campo depende, en realidad, no de seis cantidades independientes, sino tan sólo de cinco. Este resultado se sigue del hecho que la función $1/R_0$ satisface la ecuación de Laplace, esto es,

$$\Delta\left(\frac{1}{R_0}\right)\equiv\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\,\partial X_\beta}\left(\frac{1}{R_0}\right)=0.$$

Podemos, por consiguiente, escribir $\phi^{(2)}$ en la forma:

$$\phi^{(2)}=\frac{1}{2}\sum e\left(x_\alpha x_\beta-\frac{1}{3}r^2\delta_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\,\partial X_\beta}\left(\frac{1}{R_0}\right).$$

El tensor

$$D_{\alpha\beta}=\sum e(3x_\alpha x_\beta-r^2\delta_{\alpha\beta}) \tag{41.3}$$

se llama *momento cuadripolar* del sistema. De la definición de $D_{\alpha\beta}$ resulta, evidentemente, que la suma de sus elementos diagonales es igual a cero:

$$D_{\alpha\alpha}=0. \tag{41.4}$$

Por lo tanto, el tensor simétrico $D_{\alpha\beta}$ tiene en total cinco componentes independientes. Mediante el tensor $D_{\alpha\beta}$, podemos escribir:

$$\phi^{(2)}=\frac{D_{\alpha\beta}}{6}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\,\partial X_\beta}\left(\frac{1}{R_0}\right), \tag{41.5}$$

o bien, derivando

$$\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\,\partial X_\beta}\frac{1}{R_0}=\frac{3X_\alpha X_\beta}{R_0^5}-\frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_0^3},$$

y teniendo en cuenta que, $\delta_{\alpha\beta}\,D_{\alpha\beta}=D_{\alpha\alpha}=0$,

$$\phi^{(2)}=\frac{D_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta}{2R_0^3}. \tag{41.6}$$

Como todo tensor simétrico de tres dimensiones, el tensor $D_{\alpha\beta}$ se puede reducir a sus ejes principales. Debido a (41.4), en general sólo dos de los tres valores principales serán independientes. Si el sistema de cargas es simétrico respecto de un cierto eje (el eje z)†, este eje es también uno de los ejes principales del tensor $D_{\alpha\beta}$, la posición de los otros dos ejes en el plano x, y es arbitraria y los tres valores principales están ligados entre sí por la relación:

$$D_{xx}=D_{yy}=-\tfrac{1}{2}D_{zz}. \tag{41.7}$$

Representando por D la componente D_{zz} (que en este caso se llama simplemente momento cuadripolar), obtenemos para el potencial

$$\phi^{(2)}=\frac{D}{4R_0^3}(3\cos^2\theta-1)=\frac{D}{2R_0^3}P_2(\cos\theta), \tag{41.8}$$

† Suponemos que el eje de simetría es de orden superior al segundo.

donde θ es el ángulo formado por $\mathbf{R}_0$ y el eje z y P_2 es un polinomio de Legendre.

Al igual que se hizo en el caso del momento dipolar en el párrafo precedente, es fácil demostrar que el momento cuadripolar de un sistema no depende de la elección del origen de coordenadas, con tal que la carga total y el momento dipolar del sistema sean ambos iguales a cero.

De manera análoga se podrían escribir los términos siguientes del desarrollo (41.1). El término l-ésimo del desarrollo se define por un tensor (llamado tensor momento 2^l-polar) de orden l, simétrico respecto de todos sus índices, y cuya contracción respecto de un par cualquiera de ellos es nula ; se puede demostrar que dicho tensor consta de $2l+1$ componentes independientes. †

Partiendo de la conocida fórmula de la teoría de los armónicos esféricos,

$$\frac{1}{|\mathbf{R}_0-\mathbf{r}|} = \frac{1}{\sqrt{R_0^2+r^2-2rR_0\cos\chi}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R_0^{l+1}} P_l(\cos\chi), \tag{41.9}$$

en la que χ es el ángulo tormado por $\mathbf{R}_0$ y $\mathbf{r}$, podemos, sin embargo, expresar el término general del desarrollo del potencial en otra forma. Para ello introduzcamos las coordenadas esféricas Θ, Φ y θ, ϕ de los vectores $\mathbf{R}_0$ y $\mathbf{r}$, respectivamente, relativas al sistema fijo de coordenadas y apliquemos el teorema de adición de los armónicos esféricos

$$P_l(\cos\chi) = \sum_{m=-l}^{l} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} P_l^{|m|}(\cos\Theta) P_l^{|m|}(\cos\theta)\, e^{-im(\Phi-\phi)}, \tag{41.10}$$

donde los P_l^m son los polinomios de Legendre asociados. Introduzcamos también los armónicos esféricos ††

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = (-1)^m i^l \sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\phi},\ m \geqslant 0,$$

$$Y_{l,-|m|}(\theta,\phi) = (-1)^{l-m}\, Y^*_{l\,|m|}. \tag{41.11}$$

Entonces el desarrollo (41.9) toma la forma:

$$\frac{1}{|\mathbf{R}_0-\mathbf{r}|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{r^l}{R_0^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} Y^*_{lm}(\Theta,\Phi)\, Y_{lm}(\theta,\phi).$$

† De un tensor de estas características se dice que es irreducible. El hecho de que se anule en la contracción significa que a partir de sus componentes es imposible construir las componentes de un tensor de orden inferior.

†† De acuerdo con la definición adoptada en mecánica cuántica.

Aplicando este desarrollo a cada término de la suma (40.1), obtendremos finalmente la siguiente expresión del término l-ésimo del desarrollo del potencial:

(41.12)

donde,

$$Q_m^{(l)} = \sum_a e_a r_a{}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Y_{lm}(\theta_a, \phi_a), \tag{41.13}$$

El conjunto de las $2l+1$ cantidades $Q_m^{(l)}$ constituye el momento 2^l-polar del sistema de cargas.

Las magnitudes $Q_m^{(1)}$ así definidas están ligadas con las componentes del vector momento dipolar **d** por las fórmulas

$$Q_0^{(1)} = id_z, \quad Q_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(d_x \pm id_y). \tag{41.14}$$

Las magnitudes $Q_m^{(2)}$, en cambio, lo están con las componentes del tensor $D_{\alpha\beta}$ por las relaciones

$$\begin{gathered} Q_0^{(2)} = -\frac{1}{2} D_{zz}, \quad Q_{\pm 1}^{(2)} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}(D_{xz} \pm iD_{yz}), \\ Q_{\pm 2}^{(2)} = -\frac{1}{2\sqrt{6}}(D_{xx} - D_{yy} \pm 2iD_{xy}). \end{gathered} \tag{41.15}$$

PROBLEMA

Determinar el momento cuadripolar de un elipsoide, cargado uniformemente, respecto de su centro.

Solución. Reemplazando la suma en (41.3) por una integración extendida al volumen del elipsoide, se tiene:

$$D_{xx} = \varrho \int\int (2x^2 - y^2 - z^2)\, dx\, dy\, dz, \quad \text{etc.}$$

Elijamos los ejes de coordenadas de manera que coincidan con los ejes del elipsoide y el origen coincida con su centro; por razones de simetría, es evidente que estos mismos ejes son los ejes principales del tensor $D_{\alpha\beta}$. Mediante la transformación

$$x = x'a, \quad y = y'b, \quad z = z'c$$

la integración extendida al volumen del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

se reduce a una integración extendida al volumen de la esfera unidad

$$x'^2+y'^2+z'^2=1.$$

Se obtiene así,

$$D_{xx}=\frac{e}{5}(2a^2-b^2-c^2),\quad D_{yy}=\frac{e}{5}(2b^2-a^2-c^2),$$

$$D_{zz}=\frac{e}{5}(2c^2-a^2-b^2),$$

donde $e=\frac{4\pi}{3}\,abc\,\varrho$ es la carga total del elipsoide.

§ 42. Sistema de cargas en un campo exterior

Consideremos un sistema de cargas situado en un campo eléctrico exterior. Llamemos ahora ϕ (**r**) el potencial de este campo. La energía potencial de cada una de las cargas es $e_a\phi(\mathbf{r}_a)$ y la energía potencial total del sistema vale

$$U=\sum_a e_a\phi(\mathbf{r}_a). \tag{42.1}$$

Introduzcamos de nuevo un sistema de coordenadas con origen en un punto cualquiera interior al sistema de cargas; sea $\mathbf{r}_a$ el vector posición de la carga e_a en este sistema de coordenadas.

Supongamos que el campo exterior cambia lentamente en la región ocupada por el sistema de cargas, es decir, que dicho campo es casi uniforme respecto del mismo. Podemos entonces desarrollar la energía U en serie de potencias de $\mathbf{r}_a$. En este desarrollo,

$$U=U^{(0)}+U^{(1)}+U^{(2)}+\cdots, \tag{42.2}$$

el primer término es:

$$U^{(0)}=\phi_0\sum e_a, \tag{42.3}$$

donde ϕ_0 es el valor del potencial en el origen. En esta aproximación, la energía del sistema es la misma que si todas las cargas se encontraran en un mismo punto (el origen de coordenadas).

El segundo término del desarrollo es

$$U^{(1)}=\operatorname{grad}\phi_0\cdot\sum e_a\mathbf{r}_a,$$

donde grad ϕ_0 es el valor del gradiente del potencial en el origen; dado que grad $\phi=-\mathbf{E}$, dicho gradiente es la intensidad del campo $\mathbf{E}_0$ en aquel punto. Introduciendo

el momento dipolar **d** del sistema, se tiene:

$$U^{(1)} = -\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}_0. \tag{42.4}$$

La fuerza total que actúa sobre el sistema situado en el campo exterior cuasi-uniforme es, dentro del orden de aproximación que consideramos,

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}_0 \sum e_a + [\text{grad } (\mathbf{d}\cdot\mathbf{E})]_0$$

Si la carga total es nula, el primer término es igual a cero y

$$\mathbf{F} = (\mathbf{d}\cdot\nabla)\mathbf{E}, \tag{42.5}$$

es decir, la fuerza está determinada por las derivadas de la intensidad del campo (tomadas en el origen de coordenadas). El primer momento de las fuerzas que actúan sobre el sistema es, en cambio,

$$\mathbf{K} = \sum (\mathbf{r}_a \times e_a \mathbf{E}_0) = \mathbf{d}\times\mathbf{E}_0, \tag{42.6}$$

es decir, está determinado por la propia intensidad del campo.

Consideremos dos sistemas, cada uno de carga total igual a cero, cuyos momentos dipolares son $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$, respectivamente, y supongamos que la distancia que los separa es grande comparada con sus propias dimensiones. Veamos cuál es su energía potencial de interacción, U. Para ello consideremos que uno de los sistemas se encuentra en el campo del otro. Se tiene entonces

$$U = -\mathbf{d}_2\cdot\mathbf{E}_1,$$

donde $\mathbf{E}_1$ es el campo del primer sistema. Substituyendo en vez de $\mathbf{E}_1$ (40.8), se encuentra

$$U = \frac{(\mathbf{d}_1\cdot\mathbf{d}_2)R^2 - 3(\mathbf{d}_1\cdot\mathbf{R})\,(\mathbf{d}_2\cdot\mathbf{R})}{R^5}, \tag{42.7}$$

donde **R** es el vector distancia de los dos sistemas.

Cuando uno de los sistemas tiene una carga total diferente de cero (e igual a e), se obtiene de manera análoga

$$U = e\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{R}}{R^3}, \tag{42.8}$$

donde **R** es el vector de origen en el dipolo y extremo en la carga.

El término siguiente en el desarrollo (42.1) es igual a

$$U^{(2)} = \frac{1}{2} \sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}.$$

También aquí, como en § 41, prescindimos de los índices que numeran las cargas; el valor de la derivada segunda del potencial se toma en el origen; pero el potencial ϕ satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\alpha^2} = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0.$$

Por consiguiente, podemos escribir:

$$U^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \sum e \left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} r^2 \right)$$

o, finalmente,

$$U^{(2)} = \frac{D_{\alpha\beta}}{6} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \tag{42.9}$$

El término general de la serie (42.2) se puede expresar en función de los momentos 2^l-polares $Q_m^{(l)}$ definidos en el párrafo anterior. Para ello, desarrollemos primero el potencial ϕ (**r**) en serie de armónicos esféricos; la forma general de este desarrollo es:

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} r^l \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm} \quad (\theta, \phi) \tag{42.10}$$

donde r, θ, ϕ son las coordenadas esféricas de un punto. Formando la suma (42.1). y teniendo en cuenta la definición (41.13), se obtiene

$$U^{(l)} = \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Q_m^{(l)}. \tag{42.11}$$

§ 43. Campo magnético constante

Consideremos el campo magnético producido por cargas que efectúan un movimiento finito, movimiento en el cual las partículas se encuentran en todo tiempo dentro de una región finita del espacio y los impulsos se conservan siempre acotados. Un movimiento de este tipo tiene carácter « estacionario » y es interesante considerar el valor medio, respecto del tiempo, del campo magnético $\overline{\mathbf{H}}$ creado por las cargas; este campo será ahora función sólo de las coordenadas y no del tiempo, esto es, será constante.

Para hallar las ecuaciones que determinan el valor medio del campo magnético $\overline{\mathbf{H}}$, calculemos el promedio temporal de las ecuaciones de Maxwell

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.$$

La primera de ellas da simplemente

$$\operatorname{div} \overline{\mathbf{H}} = 0. \tag{43.1}$$

En la segunda ecuación, el valor medio de la derivada $\partial \mathbf{E}/\partial t$, como el de la derivada de cualquier cantidad que varía en un intervalo finito, es igual a cero (cf. la nota en la pág. 119). Por consiguiente, la segunda ecuación de Maxwell pasa a ser

$$\operatorname{rot} \overline{\mathbf{H}} = \frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}. \tag{43.2}$$

Estas dos ecuaciones determinan el campo constante $\overline{\mathbf{H}}$.

Introduzcamos el valor medio del potencial vector de acuerdo con

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{H}}.$$

Substituyendo este resultado en la ecuación (43.2) se obtiene:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{\mathbf{A}} - \Delta \bar{\mathbf{A}} = \frac{4\pi}{c}\bar{\mathbf{j}}.$$

Pero sabemos que el potencial vector de un campo no está definido unívocamente, por lo que podemos imponerle una condición suplementaria arbitraria. Apoyándonos en esto, eligiremos el potencial $\bar{\mathbf{A}}$ de forma que

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{A}} = 0. \tag{43.3}$$

La ecuación que define el potencial vector en un campo magnético constante toma entonces la forma

$$\Delta \bar{\mathbf{A}} = -\frac{4\pi}{c}\bar{\mathbf{j}}. \tag{43.4}$$

Es fácil encontrar la solución de esta ecuación observando que (43.4) es completamente análoga a la ecuación de Poisson (36.4) para el potencial escalar de un campo eléctrico constante, salvo que en vez de la densidad de carga ϱ tenemos aquí la densidad de corriente $\bar{\mathbf{j}}/c$. Por analogía con la solución (36.8) de la ecuación de Poisson, podemos escribir:

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c}\int \frac{\bar{\mathbf{j}}}{R}\, dV, \tag{43.5}$$

donde R es la distancia del punto de observación al elemento de volumen dV.

En la fórmula (43.5) se puede pasar de la integral a una suma sobre las cargas sin más que substituir en vez de $\mathbf{j}$ el producto $\varrho\mathbf{v}$ y recordar que todas las cargas son puntuales. Debe tenerse en cuenta, sin embargo, que en la integral (43.5) R es simplemente una variable de integración y que, por lo tanto, no está sujeta, claro, al proceso de promedio. Si, en cambio, en vez de la integral $\int \frac{\mathbf{j}}{R}\,dV$ escribimos la suma $\sum \frac{e_a \mathbf{v}_a}{R_a}$, los R_a se refieren entonces a las diferentes partículas y cambian con el movimiento de las cargas. Debemos escribir, por consiguiente,

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \sum \overline{\frac{e_a \mathbf{v}_a}{R_a}}, \tag{43.6}$$

donde el valor medio afecta a toda la expresión que se encuentra debajo del trazo.

Conocido $\bar{\mathbf{A}}$, podemos encontrar la intensidad del campo magnético

$$\overline{\mathbf{H}} = \text{rot}\ \bar{\mathbf{A}} = \text{rot}\ \frac{1}{c} \int \frac{\bar{\mathbf{j}}}{R}\,dV.$$

El operador rot se refiere a las coordenadas del punto de observación. Se puede, pues, permutar el operador rotacional con el signo de integración y tratar $\bar{\mathbf{j}}$ como constante en la derivación. Aplicando la conocida fórmula

$$\text{rot}\, f\mathbf{a} = f\ \text{rot}\ \mathbf{a} + \text{grad}\, f \times \mathbf{a},$$

donde f y $\mathbf{a}$ son un escalar y un vector arbitrarios, al producto $\bar{\mathbf{j}} \cdot 1/R$, se encuentra:

$$\text{rot}\ \frac{\bar{\mathbf{j}}}{R} = \text{grad}\ \frac{1}{R} \times \bar{\mathbf{j}} =$$

y, en consecuencia,

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{1}{c} \int \frac{\bar{\mathbf{j}} \times \mathbf{R}}{R^3}\,dV \tag{43.7}$$

(el vector $\mathbf{R}$ tiene por origen dV y por extremo el punto de observación). Esta es la *ley de Biot y Savart.*

§ 44. Momentos magnéticos

Consideremos ahora el campo magnético medio producido por un sistema de cargas en movimiento estacionario, a grandes distancias del sistema.

Introduzcamos un sistema de coordenadas cuyo origen coincida con un punto cualquiera interior al sistema de cargas, al igual que hicimos en el § 40. Como allí, representaremos los vectores posición de las diferentes cargas por $\mathbf{r}_a$ y el vector posición del punto en que se calcula el campo por $\mathbf{R}_0$. La diferencia $\mathbf{R}_0-\mathbf{r}_a$ es el vector con origen en la carga e_a y extremo en el punto de observación. Según (43.6), se tiene para el potencial vector

$$\bar{\mathbf{A}}=\frac{1}{c}\sum\overline{\frac{e_a\mathbf{v}_a}{|\mathbf{R}_0-\mathbf{r}_a|}}. \tag{44.1}$$

Como en el párrafo 40, desarrollemos esta expresión en potencias de $\mathbf{r}_a$. Salvo términos de orden superior al primero (prescindimos del índice a para simplificar), se tiene:

$$\bar{\mathbf{A}}=\frac{1}{cR_0}\sum e\bar{\mathbf{v}}-\frac{1}{c}\sum\overline{e\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\cdot\nabla\frac{1}{R_0}\right)}.$$

En el primer término podemos hacer

$$\sum e\bar{\mathbf{v}}=\overline{\frac{d}{dt}\sum e\mathbf{r}}.$$

Pero el valor medio de la derivada de $\sum e\mathbf{r}$, que varía en un intervalo finito, es igual a cero. Queda, pues, para $\bar{\mathbf{A}}$ la expresión

$$\bar{\mathbf{A}}=-\frac{1}{c}\sum\overline{e\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\cdot\nabla\frac{1}{R_0}\right)}=\frac{1}{cR_0^3}\sum\overline{e\mathbf{v}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}_0)}.$$

Transformemos esta expresión de la siguiente manera. Observando que $\mathbf{v}=\mathbf{r}$, podemos escribir (recordando que $\mathbf{R}_0$ es un vector constante):

$$\sum e(\mathbf{R}_0\cdot\mathbf{r})\mathbf{v}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum e\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}_0)+\frac{1}{2}\sum e[\mathbf{v}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}_0)-\mathbf{r}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}_0)].$$

Al substituir esta expresión en la de $\bar{\mathbf{A}}$, el valor medio del primer término (que contiene la derivada respecto del tiempo) es también igual a cero y se obtiene:

$$\bar{\mathbf{A}}=\frac{1}{2cR_0^3}\sum\overline{e[\mathbf{v}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}_0)-\mathbf{r}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}_0)]}.$$

Introduzcamos el vector

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c} \sum e\mathbf{r} \times \mathbf{v}, \tag{44.2}$$

llamado *momento magnético* del sistema. Obtenemos entonces:

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{\overline{\mathfrak{m}} \times \mathbf{R}_0}{R_0^3} = \nabla \frac{1}{R_0} \times \overline{\mathfrak{m}} \tag{44.3}$$

Conocido el potencial vector, es fácil determinar la intensidad del campo magnético. Mediante la fórmula

$$\text{rot}\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}\ \text{div}\ \mathbf{b} - \mathbf{b}\ \text{div}\ \mathbf{a},$$

se encuentra

$$\overline{\mathbf{H}} = \text{rot}\ \bar{\mathbf{A}} = \text{rot} \left(\frac{\overline{\mathfrak{m}} \times \mathbf{R}_0}{R_0^3} \right) = \overline{\mathfrak{m}}\ \text{div} \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} - (\overline{\mathfrak{m}} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}.$$

Además,

$$\text{div} \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} = \mathbf{R}_0 \cdot \text{grad} \frac{1}{R_0^3} + \frac{1}{R_0^3}\ \text{div}\, \mathbf{R}_0 = 0$$

y

$$(\overline{\mathfrak{m}} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} = \frac{1}{R_0^3} (\overline{\mathfrak{m}} \cdot \nabla)\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_0 (\overline{\mathfrak{m}} \cdot \nabla) \frac{1}{R_0^3} = \frac{\overline{\mathfrak{m}}}{R_0^3} - \frac{3\mathbf{R}_0 (\overline{\mathfrak{m}} \cdot \mathbf{R}_0)}{R_0^5}.$$

De esta manera,

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{3\mathbf{n}(\overline{\mathfrak{m}} \cdot \mathbf{n}) - \overline{\mathfrak{m}}}{R_0^3}, \tag{44.4}$$

donde $\mathbf{n}$ es, como antes, el vector unitario correspondiente a $\mathbf{R}_0$. Vemos, pues, que el campo magnético se expresa en función del momento magnético por la misma fórmula que el campo eléctrico se expresa en función del momento dipolar [véase (40.8)].

Si para todas las cargas del sistema es la misma la razón de la carga a la masa, podemos escribir:

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c} \sum e\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{e}{2mc} \sum m\mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

Si las velocidades de todas las cargas $v \ll c$, el impulso $\mathbf{p}$ se puede substituir por $m\mathbf{v}$ y obtenemos así:

$$\mathfrak{m} = \frac{e}{2mc} \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \frac{e}{2mc} \mathbf{M}, \tag{44.5}$$

donde $\mathbf{M} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ es el momento cinético mecánico del sistema. En este caso,

pues, la razón del momento magnético al momento cinético mecánico es constante e igual a $e/2mc$.

PROBLEMA

Determinar la razón del momento magnético al momento mecánico para un sistema de dos cargas (velocidades $v \ll c$).

Solución. Eligiendo el centro de masas de las dos partículas como origen de coordenadas, tendremos $m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2 = 0$ y $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$, donde $\mathbf{p}$ es el impulso del movimiento relativo. Mediante estas relaciones se encuentra:

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\left(\frac{e_1}{m_1^2}+\frac{e_2}{m_2^2}\right)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\mathbf{M}.$$

§ 45. Teorema de Larmor

Consideremos un sistema de cargas en un campo magnético exterior uniforme y constante.

El valor medio temporal de la fuerza que actúa sobre el sistema

$$\overline{\mathbf{F}} = \sum \frac{e}{c}\overline{\mathbf{v}\times\mathbf{H}} = \overline{\frac{d}{dt}\sum\frac{e}{c}\mathbf{r}\times\mathbf{H}},$$

se anula, como el valor medio respecto del tiempo de la derivada temporal de cualquier función del tiempo que varía en un intervalo finito. El valor medio del momento de las fuerzas

$$\overline{\mathbf{K}} = \sum \frac{e}{c}\overline{(\mathbf{r}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{H}))}$$

es, en cambio, diferente de cero. Podemos expresarlo en función del momento magnético del sistema sin más que desarrollar el doble producto vectorial:

$$\mathbf{K} = \sum\frac{e}{c}\{\mathbf{v}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{H})-\mathbf{H}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})\} = \sum\frac{e}{c}\left\{\mathbf{v}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{H})-\frac{1}{2}\mathbf{H}\frac{d}{dt}\mathbf{r}^2\right\}.$$

El valor medio del segundo término es cero, de forma que

$$\overline{\mathbf{K}} = \sum\frac{e}{c}\overline{\mathbf{v}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{H})} = \frac{1}{2c}\sum e\{\overline{\mathbf{v}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{H})}-\overline{\mathbf{r}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{H})}\}$$

[la última transformación es análoga a la que se aplicó al deducir (44.3)] o, finalmente,

$$\overline{\mathbf{K}} = \overline{\mathfrak{m}}\times\mathbf{H}. \tag{45.1}$$

Obsérvese la analogía que existe con la fórmula (42.6) correspondiente al caso eléctrico.

La función de Lagrange de un sistema de cargas en un campo magnético exterior uniforme y constante contiene (comparada con la función de Lagrange de un sistema aislado) el término adicional

$$L_H = \sum \frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} = \sum \frac{e}{2c}\mathbf{H}\times\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = \sum \frac{e}{2c}\,\mathbf{r}\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{H} \tag{45.2}$$

(donde hemos utilizado la expresión (19.4) para el potencial vector de un campo uniforme). Introduciendo el momento magnético del sistema, se tiene:

$$L_H = \mathfrak{m}\cdot\mathbf{H}. \tag{45.3}$$

Nótese la analogía con el campo eléctrico: en un campo eléctrico uniforme, la función de Lagrange de un sistema de cargas, cuya carga total y cuyo momento dipolar son nulos, contiene el término

$$L_E = \mathbf{d}\cdot\mathbf{E},$$

que, en este caso, es el valor de la energía potencial del sistema de cargas cambiado de signo (véase § 42).

Consideremos ahora un sistema de cargas que efectúan un movimiento finito (con velocidades $v \ll c$) en el campo eléctrico central producido por una cierta carga fija.

Pasemos del sistema de coordenadas del laboratorio a un sistema que gire con movimiento uniforme en torno de un eje que pase por la partícula fija. De acuerdo con una conocida fórmula, la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula en el nuevo sistema de coordenadas está ligada con su velocidad $\mathbf{v}'$ en el sistema primitivo por la relación

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r},$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector posición de la partícula y $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular del sistema de coordenadas en rotación. En el sistema fijo, la función de Lagrange del sistema de cargas es

$$L = \sum \frac{mv'^2}{2} - U,$$

donde U es la energía potencial de las cargas en el campo exterior más la energía de sus interacciones mútuas. La magnitud U es función de las distancias de las car-

gas a la partícula fija y de las distancias que las separan dos a dos; cuando se pasa al sistema de coordenadas en rotación, esta expresión, evidentemente, permanece inalterada. Por lo tanto, en el nuevo sistema la función de Lagrange será:

$$L = \sum \frac{m}{2} (\mathbf{v}+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r})^2 - U.$$

Supongamos que para todas las cargas es la misma la razón de la carga a la masa, e/m, y hagamos

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{e}{2mc}\mathbf{H}. \tag{45.4}$$

En estas condiciones, para H suficientemente pequeño (cuando se puede prescindir de términos del orden de H^2) la función de Lagrange se convierte en

$$L = \sum \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2c}\sum e\mathbf{H}\times\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} - U.$$

Vemos así que dicha función coincide entonces con la que describiría el movimiento de las cargas consideradas en el sistema de coordenadas del laboratorio en presencia de un campo magnético constante [véase (45.2)].

Llegamos así al resultado de que, en el caso no relativista, el comportamiento de un sistema de cargas que tienen el mismo valor de e/m y que efectúan un movimiento finito en un campo eléctrico con simetría central y en un campo magnético uniforme débil **H**, es equivalente al comportamiento de este mismo sistema de cargas, en el mismo campo eléctrico, respecto de un sistema de coordenadas que gira uniformemente con la velocidad angular (45.3). Esto es precisamente lo que afirma el llamado *teorema de Larmor*, y la velocidad angular $\Omega = eH/2mc$ se llama *frecuencia de Larmor*.

Podemos abordar el mismo problema desde un punto de vista diferente. Si el campo magnético es suficientemente débil, la frecuencia de Larmor será pequeña respecto de las frecuencias del movimiento finito del sistema dado de cargas. Podemos entonces considerar los valores medios en intervalos de tiempo pequeños comparados con el período $2\pi/\Omega$ de las magnitudes ligadas al sistema. Estos nuevos valores variarán lentamente con el tiempo (con frecuencia Ω).

Consideremos el cambio del momento mecánico medio $\overline{\mathbf{M}}$ del sistema. De acuerdo con una conocida ecuación de la mecánica, la derivada de **M** es igual al momento **K** de las fuerzas que actúan sobre el sistema. Tenemos, por consiguiente, valiéndonos de (45.1):

$$\frac{d\overline{\mathbf{M}}}{dt} = \overline{\mathbf{K}} = \overline{\mathfrak{m}}\times\mathbf{H}.$$

Si la razón e/m es la misma para todas las partículas del sistema, los momentos mecánico y magnético son proporcionales entre sí y se encuentra, teniendo en cuenta las fórmulas (44.5) y (45.4):

$$\frac{d\overline{\mathbf{M}}}{dt} = -\boldsymbol{\Omega} \times \overline{\mathbf{M}}. \tag{45.5}$$

Esta ecuación nos dice que el vector $\overline{\mathbf{M}}$ (y con él el momento magnético $\overline{\mathbf{m}}$) gira con velocidad angular $-\boldsymbol{\Omega}$ en torno de la dirección del campo, mientras que su módulo y el ángulo que forma con esta dirección se conservan constantes. (Este movimiento se llama *precesión de Larmor*.)

CAPÍTULO 6

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

§ 46. La ecuación de las ondas

El campo electromagnético en el vacío está determinado por las ecuaciones de Maxwell, en las que debemos hacer $\varrho = 0$, $\mathbf{j} = 0$. Escribámoslas una vez más:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{46.1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \tag{46.2}$$

Estas ecuaciones tienen soluciones no nulas. Esto significa que un campo electromagnético puede existir incluso cuando no existen cargas.

Los campos electromagnéticos que existen en el vacío en ausencia de cargas se llaman *ondas electromagnéticas*. Estudiaremos en lo que sigue sus propiedades.

Observemos en primer lugar que dichos campos deben necesariamente variar con el tiempo. En efecto, de no ser así $\partial \mathbf{H}/\partial t = \partial \mathbf{E}/\partial t = 0$ y las ecuaciones (46.1) y (46.2) pasarían a coincidir con las ecuaciones (36.1), (36.2) y (43.1), (43.2) de un campo constante en el que, sin embargo, se tiene ahora $\varrho = 0$, $\mathbf{j} = 0$. Pero la solución de estas ecuaciones, dada por las fórmulas (36.8) y (43.5), se anula para $\varrho = 0$, $\mathbf{j} = 0$.

Veamos cuáles son las ecuaciones que determinan los potenciales de las ondas electromagnéticas.

Conforme sabemos ya, debido a la no unicidad de los potenciales es siempre posible imponerles una condición suplementaria. En virtud de esto eligiremos los potenciales de la onda electromagnética de forma que el potencial escalar sea nulo:

$$\phi = 0. \tag{46.3}$$

En estas condiciones,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \tag{46.4}$$

Substituyendo estas dos expresiones en la primera de las ecuaciones (46.2), se obtiene:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A} + \text{grad div } \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \tag{46.5}$$

A pesar de que hayamos ya impuesto una condición suplementaria a los potenciales, el potencial **A** no está todavía determinado unívocamente. Podemos, en efecto, sumarle el gradiente de una función arbitraria que no dependa del tiempo (manteniendo así invariable ϕ). En particular, podemos elegir los potenciales de la onda electromagnética de forma que

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \tag{46.6}$$

En efecto, substituyendo la expresión (46.4) de **E** en div **E** = 0, tenemos

$$\text{div}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\text{div } \mathbf{A} = 0,$$

esto es, div **A** es función sólo de las coordenadas. Esta función se puede siempre reducir a cero sumando a **A** el gradiente de una función adecuada independiente del tiempo.

La ecuación (46.5) toma ahora la forma:

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{46.7}$$

Es esta la ecuación que determina los potenciales de las ondas electromagnéticas. Se llama *ecuación de d'Alembert*, o *ecuación de las ondas*.

Aplicando a (46.7) los operadores rot y $\partial/\partial t$, se puede comprobar que los campos eléctrico y magnético **E** y **H** satisfacen la misma ecuación de las ondas †.

Deduzcamos de nuevo la ecuación de las ondas, ahora en forma cuadridimensional. Para ello escribiremos como sigue el segundo par de ecuaciones de Maxwell del campo cuando no existen cargas:

---

†) La ecuación de las ondas se escribe a veces en la forma $\Box \mathbf{A} = 0_a$ donde

$$\Box = -\frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x^i} = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

es el llamado *operador d'Alembert*.

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = 0$$

[ecuación (30.2) con $j^i = 0$). Substituyendo aquí las expresiones de F^{ik} en función de los potenciales,

$$F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^k},$$

se obtendrá:

$$\frac{\partial^2 A^k}{\partial x_i \partial x^k} - \frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = 0. \tag{46.8}$$

Impongamos a los potenciales la condición suplementaria

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0 \tag{46.9}$$

(esta condición se llama condición de Lorentz, y de los potenciales que la satisfacen se dice que son potenciales en el *contraste de Lorentz*). Entonces, en la ecuación (46.8) desaparece el primer término y queda

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} \equiv g^{kl} \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^l} = 0. \tag{46.10}$$

Ésta es precisamente la ecuación de las ondas escritas en forma cuadridimensional †.

En forma tridimensional la condición (46.9) se escribe:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial c} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{46.11}$$

Es una condición más general que las condiciones que hemos utilizado antes $\phi = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$; los potenciales que satisfacen a estas condiciones cumplen también la condición (46.11). Sin embargo, en contraste con aquéllas, la condición de Lorentz tiene un carácter invariante relativista: los potenciales que la satisfacen en un sistema de referencia, la satisfacen también en cualquier otro sistema (mientras que las condiciones (46.3), (46.6) dejan de cumplirse, en general, al cambiar de sistema de referencia).

§ 47. Ondas planas

Consideremos el caso particular de las ondas electromagnéticas para las que el campo depende de una sola coordenada, por ejemplo, x (y del tiempo). Estas ondas

† Hay que hacer notar que la condición (46.9) no determina todavía a los potenciales de manera del todo unívoca. En efecto, a $\mathbf{A}$ es posible sumar grad f, a la vez que de ϕ se resta $\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$, si bien, sin embargo, la función f no es arbitraria, sino que debe satisfacer, como se comprueba fácilmente, la ecuación de las ondas $\Box f = 0$.

se califican de *planas*. En este caso, las ecuaciones del campo se reducen a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \tag{47.1}$$

donde f es cualquiera de las componentes de los vectores **E** o **H**.

Para resolver esta ecuación, escribámosla en la forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0,$$

e introduzcamos las nuevas variables

$$\xi = t - \frac{x}{c}, \quad \eta = t + \frac{x}{c}$$

de forma que

$$t = \frac{1}{2}(\eta + \xi), \; x = \frac{c}{2}(\eta - \xi).$$

Se tiene entonces

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

de manera que la ecuación relativa a f se convierte en

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0.$$

Integrando esta ecuación respecto de ξ, se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = F(\eta),$$

donde $F(\eta)$ es una función arbitraria. Integrando de nuevo, se encuentra $f = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, donde f_1 y f_2 son funciones arbitrarias. Se tiene así

$$f = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right). \tag{47.2}$$

Supongamos, por ejemplo, $f_2 = 0$, de manera que $f = f_1\left(t - \dfrac{x}{c}\right)$. Veamos cuál es el sentido de esta solución. En cada plano $x = \text{const}$, el campo cambia con el tiempo; en cada instante, el campo es diferente para valores diferentes de x. Es

claro que el campo toma los mismos valores para coordenadas x e instantes t que satisfacen la relación $t-\frac{x}{c}=\text{const}$, es decir,

$$x=\text{const}+ct.$$

Esto significa que si, en un cierto instante $t=0$, el campo en un cierto punto x del espacio tenía determinado valor, una vez transcurrido un tiempo t el campo tiene precisamente este mismo valor a una distancia ct a lo largo del eje X a partir del punto inicial. Podemos decir que todos los valores del campo electromagnético se propagan en el espacio a lo largo del eje X con una velocidad igual a la velocidad de la luz, c.

La expresión $f_1\left(t-\frac{x}{c}\right)$ representa, pues, una onda plana que se mueve en el sentido positivo del eje X. Es evidente que $f_2\left(t+\frac{x}{c}\right)$ representa a su vez una onda que se mueve en el sentido opuesto, el negativo, a lo largo del eje X.

En el § 46 se demostró que los potenciales de una onda electromagnética se pueden elegir de manera que $\phi=0$, y div $\mathbf{A}=0$. Elijamos los potenciales de las ondas planas que estamos considerando de manera igual. La condición div $\mathbf{A}=0$ da en este caso

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}=0,$$

ya que todas las magnitudes son independientes de y y z. De acuerdo con (47.1) tendremos entonces también $\partial^2 A_x/\partial t^2=0$, esto es, $\partial A_x/\partial t=\text{const}$. Pero la derivada $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ determina el campo eléctrico; luego, una componente no nula A_x representaría en el caso considerado la presencia de un campo eléctrico longitudinal constante. Dado que este campo no tiene relación alguna con la onda electromagnética, podemos hacer $A_x=0$.

El potencial vector de la onda plana se puede, pues, elegir siempre perpendicular al eje X, es decir, a la dirección de propagación de dicha onda.

Consideremos una onda plana que se mueve en el sentido positivo del eje X; en esta onda, todas las magnitudes, en particular también $\mathbf{A}$, son funciones solamente de $t-\frac{x}{c}$. De las fórmulas

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A},$$

se deduce, por lo tanto,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{A}', \ \mathbf{H} = \nabla\times\mathbf{A} = \nabla\left(t-\frac{x}{c}\right)\times\mathbf{A}' = -\frac{1}{c}\mathbf{n}\times\mathbf{A}', \tag{47.3}$$

donde el apóstrofo indica la derivación respecto de $t-\frac{x}{c}$ y $\mathbf{n}$ es el vector unitario que caracteriza la dirección y sentido de propagación de la onda. Substituyendo la primera ecuación en la segunda, se encuentra:

$$\mathbf{H} = \mathbf{n}\times\mathbf{E}. \tag{47.4}$$

Vemos así que los campos eléctrico y magnético $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ de una onda plana son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. Debido a este hecho, las ondas electromagnéticas se califican de *transversales*. De (47.4) se sigue además, evidentemente, que los campos eléctrico y magnético de la onda plana son perpendiculares entre sí e iguales en módulo.

El flujo de energía en la onda plana, es decir, su vector de Poynting, es:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{E}),$$

y dado que $\mathbf{E}\cdot\mathbf{n} = 0$,

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}E^2\mathbf{n} = \frac{c}{4\pi}H^2\mathbf{n}.$$

La dirección y sentido del flujo de energía coincide, pues, con la dirección y sentido de propagación de la onda. Dado que $W = \frac{1}{8\pi}(E^2+H^2) = \frac{E^2}{4\pi}$ es la densidad de energía de la onda, podemos escribir:

$$\mathbf{S} = cW\mathbf{n}, \tag{47.5}$$

de acuerdo con el hecho de que el campo se propaga con la velocidad de la luz.

El impulso por unidad de volumen del campo electromagnético es $\mathbf{S}/c^2$. Para

una onda plana esta relación da $(W/c)\mathbf{n}$. Obsérvese que la relación entre la energía W y el impulso W/c de la onda electromagnética es la misma que para una partícula que se moviese con la velocidad de la luz [véase (9.9)].

El flujo de impulso del campo viene determinado por las componentes $\sigma_{\alpha\beta}$ (33.3) del tensor energía-impulso. Eligiendo la dirección de propagación de la onda como eje X, se encuentra que la única componente no nula $\sigma_{\alpha\beta}$ es:

$$\sigma_{xx} = W. \tag{47.6}$$

Como debe ser, el flujo de impulso se produce en la dirección de propagación de la onda y es igual en módulo a la densidad de energía.

Determinemos ahora la ley de transformación de la densidad de energía de una onda plana electromagnética cuando se pasa de un sistema de referencia inercial a otro. Para ello, en la fórmula

$$W = \frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(W' + 2\frac{V}{c^2}S'_x + \frac{V^2}{c^2}\sigma'_{xx}\right)$$

(véase el problema 1, §6) hay que hacer

$$S'_x = cW'\cos\alpha',\ \sigma'_{xx} = W'\cos^2\alpha',$$

donde α' es el ángulo (en el sistema K') formado por el eje X' (que contiene la velocidad V) y la dirección de propagación de la onda. El resultado que se encuentra es:

$$W = W'\frac{\left(1+\frac{V}{c}\cos\alpha'\right)^2}{1-\frac{V^2}{c^2}}. \tag{47.7}$$

Dado que $W = \frac{E^2}{4\pi} = \frac{H^2}{4\pi}$ los módulos de las intensidades del campo de la onda se transforman como $\sqrt{W}$.

PROBLEMAS

1. Determinar la fuerza ejercida sobre una pared que refleja (con coeficiente de reflexión R) una onda electromagnética plana que incide sobre ella.

Solución. La fuerza **f** que actúa sobre la unidad de área de la pared viene dada por el flujo de impulso que la atraviesa, es decir, es el vector de componentes

$$f_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} N_\beta + \sigma'_{\alpha\beta} N_\beta,$$

donde **N** es el vector normal a la superficie de la pared, y $\sigma_{\alpha\beta}$ y $\sigma'_{\alpha\beta}$ son las componentes de los tensores energía-impulso de las ondas incidente y refiejada. Teniendo en cuenta (47.6), se obtiene:

$$\mathbf{f} = W\mathbf{n}(\mathbf{N}\cdot\mathbf{n}) + W'\mathbf{n}'(\mathbf{N}\cdot\mathbf{n}').$$

De la definición de coeficiente de reflexión se sigue: $W' = RW$. Introduciendo el ángulo de incidencia θ (que es igual al ángulo de reflexión) y escribiendo de manera explícita las componentes, se encuentra la fuerza normal (« presión de radiación »)

$$f_N = W(1+R)\cos^2\theta$$

y la fuerza tangencial

$$f_t = W(1-R)\operatorname{sen}\theta\cos\theta.$$

2. Siguiendo el método de Hamilton-Jacobi, determinar el movimiento de una carga en el campo de una onda electromagnética plana.

Solución. La ecuación de Hamilton-Jacobi, escrita en forma cuadridimensional es

$$g^{ik}\left(\frac{\partial S}{\partial x^i} + \frac{e}{c}A_i\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x^k} + \frac{e}{c}A_k\right) = m^2c^2. \tag{1}$$

El hecho de que el campo sea una onda plana significa que las A^i son funciones de una sola variable independiente, que se puede representar en la forma $\xi = k_i x^i$, donde k^i es un cuadrivector constante de cuadrado igual a cero, $k_i k^i = 0$ (cf. el párrafo siguiente). A los potenciales les impondremos la condición de Lorentz

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{dA^i}{d\xi}k_i = 0;$$

para el campo variable de una onda esta condición es equivalente a la igualdad $A^i k_i = 0$.

Busquemos la solución de la ecuación (1) entre las expresiones de la forma

$$S = -f_i x^i + F(\xi),$$

donde $f^i = (f^0, \mathbf{f})$ es un vector constante que satisface la condición $f_i f^i = m^2c^2$ ($S = -f_i x^i$ es la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula libre con cuadrimpulso $p^i = f^i$). La substitución en (1) conduce a la ecuación

$$\frac{e^2}{c^2}A_i A^i - 2\gamma\frac{dF}{d\xi} - \frac{2e}{c}f_i A^i = 0,$$

donde la constante $\gamma = k_i f^i$. Determinando a partir de aquí F, obtendremos:

$$S = -f_i x^i - \frac{e}{c\gamma}\int f_i A^i\, d\xi + \frac{e^2}{2\gamma c^2}\int A_i A^i\, d\xi. \tag{2}$$

Pasemos a la notación tridimensional con un sistema de referencia fijo, eligiendo el eje x en la dirección de propagación de la onda. Entonces $\xi = ct - x$ y la constante $\gamma = f^0 - f^1$. Designando por $\varkappa$ el vector de dos dimensiones f_y, f_z, a partir de la condición $f_i f^i = (f^0)^2 - (f^1)^2 - \varkappa^2 = m^2c^2$ se obtendrá

$$f^0 + f^1 = \frac{m^2c^2 + \varkappa^2}{\gamma}.$$

Elijamos ahora los potenciales de acuerdo con el contraste en el cual $\phi = 0$ y $\mathbf{A}(\xi)$ se encuentra en el plano yz. Con esto la expresión (2) toma la forma:

$$S = \boldsymbol{\varkappa}\cdot\mathbf{r} - \frac{\gamma}{2}(ct + x) - \frac{m^2c^2 + \varkappa^2}{2\gamma}\xi + \frac{e}{c\gamma}\int \boldsymbol{\varkappa}\cdot\mathbf{A}\, d\xi - \frac{e^2}{2\gamma c^2}\int \mathbf{A}^2\, d\xi.$$

De acuerdo con las reglas generales (véase Mecánica, § 47), para determinar el movimiento hay que igualar las derivadas $\partial S/\partial \boldsymbol{\varkappa}$, $\partial S/\partial\gamma$ a ciertas nuevas constantes, que se pueden tomar iguales a cero eligiendo convenientemente el origen de coordenadas y el origen del tiempo. De esta manera se obtienen las fórmulas paramétricas (con ξ como parámetro):

$$y = \frac{1}{\gamma}\varkappa_y\xi - \frac{e}{c\gamma}\int A_y\, d\xi, \quad z = \frac{1}{\gamma}\varkappa_z\xi - \frac{e}{c\gamma}\int A_z\, d\xi.$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2c^2 + \varkappa^2}{\gamma^2} - 1\right)\xi - \frac{e}{c\gamma^2}\int \boldsymbol{\varkappa}\cdot\mathbf{A}\, d\xi + \frac{e^2}{2\gamma^2c^2}\int \mathbf{A}^2\, d\xi, \quad ct = \xi + x.$$

El impulso generalizado $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$ y la energía $\mathcal{E}$ se determinan derivando la acción respecto de las coordenadas y del tiempo; esto da:

$$p_y = \varkappa_y - \frac{e}{c}A_y, \quad p_z = \varkappa_z - \frac{e}{c}A_z,$$

$$p_x = -\frac{\gamma}{2} + \frac{m^2c^2 + \varkappa^2}{2\gamma} - \frac{e}{c\gamma}\boldsymbol{\varkappa}\cdot\mathbf{A} + \frac{e^2}{2\gamma c^2}\mathbf{A}^2;$$

$$\mathcal{E} = (\gamma + p_x)c.$$

Si se promedian estas cantidades respecto del tiempo, los términos que contienen la primera potencia de la función periódica $\mathbf{A}(\xi)$ se anulan. Supongamos que el sistema de referencia se ha elegido de tal manera que en él la partícula se encuentra en promedio en reposo, es decir, respecto de dicho sistema el impulso medio es igual a cero. Con esto será

$$\boldsymbol{\varkappa} = 0, \quad \gamma^2 = m^2c^2 + e^2\overline{\mathbf{A}^2}.$$

Las fórmulas definitivas que determinan el movimiento tomarán entonces la forma

$$x = \frac{e^2}{2\gamma^2c^2}\int (\mathbf{A}^2 - \overline{\mathbf{A}^2})\, d\xi, \quad y = -\frac{e}{c\gamma}\int A_y\, d\xi, \quad z = -\frac{e}{c\gamma}\int A_z\, d\xi,$$

$$ct = \xi + \frac{e^2}{2\gamma^2c^2}\int (\mathbf{A}^2 - \overline{\mathbf{A}^2})\, d\xi; \tag{3}$$

$$v_x = \frac{e^2}{2\gamma c^2}(\mathbf{A}^2 - \overline{\mathbf{A}^2}), \quad p_y = -\frac{e}{c}A_y, \quad p_z = -\frac{e}{c}A_z,$$

$$\mathcal{E} = c\gamma + \frac{e^2}{2\gamma c}(\mathbf{A}^2 - \overline{\mathbf{A}^2}). \tag{4}$$

§ 48. Ondas planas monocromáticas

Un caso particular, muy importante, de onda electromagnética es el de una onda en la que el campo es una función periódica simple del tiempo. De una onda así caracterizada se dice que es *monocromática.* Todas las magnitudes (potenciales, componentes del campo) en una onda monocromática dependen del tiempo por medio de un factor de la forma $\cos(\omega t+\alpha)$. La cantidad ω se llama *pulsación* de la onda (aunque la llamaremos simplemente *frecuencia*).

En la ecuación de las ondas, la derivada segunda del campo respecto del tiempo es ahora $\partial^2 f/\partial t^2 = -\omega^2 f$, de manera que la distribución del campo en el espacio estará determinada, para una onda monocromática, por la ecuación

$$\nabla f+\frac{\omega^2}{c^2}f=0. \tag{48.1}$$

En una onda plana (que se propaga a lo largo del eje X), el campo es función sólo de $t-\frac{x}{c}$. Por lo tanto, si la onda plana es monocromática, su campo es una función periódica simple de $t-\frac{x}{c}$. Es conveniente escribir el potencial vector de una onda de este tipo como parte real de una expresión compleja:

$$\mathbf{A} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{A}_0 e^{-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}\right\} \tag{48.2}$$

En (48.2) $\mathbf{A}_0$ es un vector complejo constante. Evidentemente, los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ de esta onda tienen formas análogas con la misma frecuencia ω. La cantidad

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \tag{48.3}$$

se llama *longitud de onda;* es el período de variación del campo respecto de la coordenada x en un determinado instante t.

El vector

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n} \tag{48.4}$$

(donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario que corresponde a la dirección y sentido de propagación de la onda) se llama *vector de onda.* En función del mismo podemos escribir (48.2) en la forma

$$\mathbf{A} = \mathrm{Re}\{\mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\}, \tag{48.5}$$

que es independiente de la elección de los ejes de coordenadas. La cantidad que aparece multiplicada por i en el exponente se llama *fase* de la onda.

Mientras llevemos a cabo tan sólo operaciones lineales, podemos prescindir del símbolo Re, que corresponde a tomar la parte real, y operar con cantidades complejas, sin más†. Así, substituyendo **A** por

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

en (47.3), se obtiene la relación entre las intensidades y el potencial vector de una onda monocromática plana en la forma

$$\mathbf{E} = ik\mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = i\mathbf{k}\times\mathbf{A}. \tag{48.6}$$

Consideremos ahora más detenidamente la dirección del campo de una onda monocromática. Para concretar, nos referiremos al campo eléctrico

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\,\{\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\}$$

(todo lo que diremos a continuación vale también, claro está, para el campo magnético). La cantidad $\mathbf{E}_0$ es un cierto vector complejo. Su cuadrado $\mathbf{E}_0^2$ es, en general, también un número complejo. Si el argumento de este número es -2α (es decir, $\mathbf{E}_0^2 = |\mathbf{E}_0^2|e^{-2i\alpha}$) el cuadrado del vector **b** definido por

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{b}\, e^{-i\alpha} \tag{48.7}$$

tendrá por cuadrado un número real, $\mathbf{b}^2 = |\mathbf{E}_0|^2$. De acuerdo con esta definición, haremos

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\,\{\mathbf{b}\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t-\alpha)}\}. \tag{48.8}$$

---

† Si dos cantidades $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ se escriben en forma compleja

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t},$$

al formar su producto hay que separar primero, claro está, la parte real. Pero si, como ocurre a menudo, tan sólo nos interesa el valor medio (respecto del tiempo) del producto, éste se puede calcular mediante la fórmula

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*\}.$$

En efecto, se tiene:

$$\mathrm{Re}\,\mathbf{A}\cdot\mathrm{Re}\,\mathbf{B} = \tfrac{1}{4}(\mathbf{A}_0 e^{-i\omega t}+\mathbf{A}_0^* e^{i\omega t})\cdot(\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t}+\mathbf{B}_0^* e^{i\omega t}).$$

Al tomar valores medios, los términos que contienen factores $e^{\pm 2i\omega t}$ se anulan, de forma que queda en definitiva

$$\overline{\mathrm{Re}\,\mathbf{A}\cdot\mathrm{Re}\,\mathbf{B}} = \tfrac{1}{4}(\mathbf{A}_0\cdot\mathbf{B}_0^*+\mathbf{A}_0^*\cdot\mathbf{B}_0) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*).$$

Escribamos $\mathbf{b}$ en la forma

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2,$$

donde $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ son dos vectores reales. Dado que el cuadrado $\mathbf{b}^2 = \mathbf{b}_1^2 - \mathbf{b}_2^2 + 2i\,\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2$ debe ser una cantidad real, se tendrá $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = 0$, es decir, los vectores $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ son perpendiculares entre sí. Elijamos la dirección del vector $\mathbf{b}_1$ como eje Y (y el eje X en la dirección de propagación de la onda). De (48.8) se sigue entonces

$$\begin{aligned} E_y &= b_1 \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \alpha), \\ E_z &= \pm b_2 \operatorname{sen}(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \alpha), \end{aligned} \tag{48.9}$$

donde vale el signo más (menos) si $\mathbf{b}_2$ está dirigido en el sentido positivo (negativo) del eje Z. De (48.9) se deduce que

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1. \tag{48.10}$$

Vemos así que en cada punto del espacio el vector campo eléctrico gira en un plano perpendicular a la dirección de propagación de la onda, mientras que su extremo describe la elipse (48.10). De una onda de estas características se dice que está *polarizada elípticamente*. La rotación tiene lugar en el sentido en que gira un sacacorchos que avanza a lo largo del eje X si en (48.9) vale el signo más, y en sentido opuesto si vale el signo menos.

Si $b_1 = b_2$, la elipse (48.10) se reduce a una circunferencia, es decir, el vector $\mathbf{E}$ gira manteniendo su módulo constante. En este caso diremos que la onda está *polarizada circularmente*. La elección de las direcciones de los ejes Y y Z es entonces arbitraria, evidentemente. Obsérvese que para esta onda la razón de la componente y a la componente z de la amplitud compleja $\mathbf{E}_0$ es

$$\frac{E_{0z}}{E_{0y}} = \pm i \tag{48.11}$$

según el sentido de la rotación sea el mismo o el opuesto al de un sacacorchos (polarizaciones *levógira* y *dextrógira*) †

Finalmente, si b_1 o b_2 son iguales a cero, el campo de la onda es siempre y en todas partes paralelo (o antiparalelo) a una misma dirección. En este caso se dice que la onda está *polarizada linealmente*, o polarizada en un plano. Una onda polarizada elípticamente se puede considerar, claro está, como superposición de dos ondas polarizadas linealmente.

† Se supone que los ejes x, y, z, forman, como siempre, un sistema directo.

Pasemos ahora a la definición del vector de onda e introduzcamos el vector de onda de cuatro dimensiones definido por las componentes

$$k^i = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right) \tag{48.12}$$

Es evidente que estas cantidades forman, en efecto, un cuadrivector, ya que se obtiene un escalar — la fase de la onda — cuando se multiplica el cuadrivector por x^i:

$$k_i x^i = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t. \tag{48.13}$$

De las definiciones (48.4) y (48.2) se sigue que el cuadrado del cuadrivector de onda es igual a cero:

$$k_i k^i = 0 \tag{48.14}$$

Esta relación se sigue también directamente del hecho que la expresión

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e(-ik_i x^i)$$

debe ser solución de la ecuación de ondas (46.10)

Como en el caso de cualquier onda plana, para una onda monocromática que se propaga a lo largo del eje X únicamente las siguientes componentes del tensor energía-impulso son diferentes de cero (véase § 47):

$$T^{00} = T^{01} = T^{11} = W.$$

Mediante el cuadrivector de onda, estas ecuaciones se pueden escribir en forma tensorial:

$$T^{ik} = \frac{Wc^2}{\omega^2} k^i k^k. \tag{48.15}$$

Finalmente, teniendo en cuenta la ley de transformación del cuadrivector de onda se puede estudiar fácilmente el llamado *efecto Doppler* — es decir, el cambio que experimenta la frecuencia ω de la onda emitida por un foco, que se mueve respecto del observador, con relación a la frecuencia « propia » ω_0 del mismo foco en el sistema de referencia (K_0) en el que se encuentra en reposo.

Sea V la velocidad del foco, es decir, la velocidad del sistema K_0 respecto de K. De acuerdo con las fórmulas generales de transformación de cuadrivectores, tenemos

$$k_4^{(0)\,0} = \frac{k^0 - \dfrac{V}{c}k^1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$$

(la velocidad del sistema K respecto de K_0 es $-V$.) Haciendo $k^0 = \omega/c$, $k^1 = k\cos\alpha = \dfrac{\omega}{c}\cos\alpha$, donde α es el ángulo (en el sistema K) formado por la dirección de emisión de la onda y la del movimiento del foco, y expresando ω en función de ω_0, se obtiene:

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1-\dfrac{V}{c}\cos\alpha}. \tag{48.16}$$

Ésta es la fórmula buscada. Para $V \ll c$, y si el ángulo α no es demasiado próximo a $\pi/2$, dicha fórmula nos da

$$\omega \approx \omega_0\left(1+\frac{V}{c}\cos\alpha\right). \tag{48.17}$$

Para $\alpha = \pi/2$, se tiene

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \approx \omega_0\left(1-\frac{V^2}{2c^2}\right); \tag{48.18}$$

En este caso la variación relativa de frecuencia es proporcional al cuadrado de la razón V/c.

Problemas

1. Determinar la dirección y valor absoluto de los ejes de la elipse de polarización en función de la amplitud compleja $\mathbf{E}_0$.

Solución. El problema consiste en determinar el vector $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2$ cuyo cuadrado es real. De (48.7) se sigue

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* = b_1^2 + b_2^2, \quad \mathbf{E}_0 \times \mathbf{E}_0^* = -2i\,\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2, \tag{1}$$

o bien,

$$b_1^2 + b_2^2 = A^2 + B^2, \quad b_1 b_2 = AB\,\mathrm{sen}\,\delta,$$

donde se ha introducido la notación

$$|E_{0y}| = A, \quad |E_{0z}| = B, \quad \frac{E_{0z}}{B} = \frac{E_{0y}}{A}e^{i\delta}$$

para los valores absolutos de E_{0y} y E_{0z} y para la diferencia de fases δ entre ellas. Se tiene entonces,

$$b_{1,2} = \sqrt{A^2+B^2+2AB\,\mathrm{sen}\,\delta} \pm \sqrt{A^2+B^2-2AB\,\mathrm{sen}\,\delta}, \tag{2}$$

de donde se deducen los valores de los semiejes de la elipse de polarización.

Para determinar sus direcciones (respecto de los ejes iniciales Y y Z arbitrarios), partiremos de la igualdad

$$\mathrm{Re}\,\{(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{b}_1)(\mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{b}_2)\} = 0,$$

que se deduce fácilmente substituyendo en vez de $\mathbf{E}_0$ la expresión $\mathbf{E}_0 = (\mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2)\, e^{-i\alpha}$. Poniendo de manifiesto en esta igualdad las componentes respecto de los ejes Y, Z, se obtiene para el ángulo θ formado por $\mathbf{b}_1$ y el eje Y:

$$\mathrm{tg}\ 2\theta = \frac{2AB\cos\delta}{A^2-B^2}. \tag{3}$$

El sentido de rotación del campo está determinadp por el signo de la componente-x del vector $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$. De la expresión (1) se deduce

$$2i(\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)_x = E_{0z}E_{0y}^* - E_{0z}^* E_{0y} = |E_{0y}|^2 \left\{ \left(\frac{E_{0z}}{E_{0y}}\right) - \left(\frac{E_{0z}}{E_{0y}}\right)^* \right\},$$

lo que prueba que la dirección del vector $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$ (bien sea en el mismo sentido o en sentido opuesto al sentido positivo del eje X) y el signo de la rotación (bien sea en el mismo sentido o en sentido opuesto al de un sacacorchos que avanza a lo largo del eje X) vienen dados por el signo de la parte imaginaria de la razón E_{0z}/E_{0y} (positivo en el primer caso y negativo en el segundo). Este resultado generaliza la regla (48.11) válida para la polarización circular.

2. Determinar el movimiento de una carga en el campo de una onda plana monocromática polarizada linealmente.

Solución. Eligiendo la dirección del campo $\mathbf{E}$ de la onda como eje Y, se puede escribir

$$E_y = E = E_0 \cos\omega\xi, \quad A_y = A = -\frac{cE_0}{\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega\xi$$

($\xi = t - x/c$). De las fórmulas (3) y (4) del problema 2, § 47, se sigue (en el sistema de referencia en el que la partícula se encuentra en promedio en reposo) la siguiente representación paramétrica del movimiento (parámetro $\eta = \omega\xi$):

$$x = -\frac{e^2E_0^2c}{8\gamma^2\omega^3}\,\mathrm{sen}\,2\eta, \quad y = -\frac{eE_0c}{\gamma\omega^2}\cos\eta, \quad z = 0,$$

$$t = \frac{\eta}{\omega} - \frac{e^2E_0^2}{8\gamma^2\omega^3}\,\mathrm{sen}\,2\eta, \quad \gamma^2 = m^2c^2 + \frac{e^2E_0^2}{2\omega^2};$$

$$p_x = -\frac{e^2E_0^2}{4\gamma\omega^2}\cos 2\eta, \quad p_y = \frac{eE_0}{\omega}\,\mathrm{sen}\,\eta, \quad p_z = 0.$$

La carga se mueve en el plano X, Y siguiendo una curva simétrica en forma de 8 con su eje longitudinal paralelo al eje Y.

3. Determinar el movimiento de una carga en el campo de una onda polarizada circularmente.

Solución. Para el campo de la onda tenemos

$$E_y = E_0 \cos\omega\xi, \quad E_z = E_0 \operatorname{sen}\omega\xi,$$
$$A_y = -\frac{cE_0}{\omega}\operatorname{sen}\omega\xi, \quad A_z = \frac{cE_0}{\omega}\cos\omega\xi.$$

El movimiento se determina por las fórmulas:

$$x = 0, \quad y = -\frac{ecE_0}{\gamma\omega^2}\cos\omega t, \quad z = -\frac{ecE_0}{\gamma\omega^2}\operatorname{sen}\omega t,$$
$$p_x = 0, \quad p_y = \frac{eE_0}{\omega}\operatorname{sen}\omega t, \quad p_z = -\frac{eE_0}{\omega}\cos\omega t,$$
$$\gamma^2 = m^2c^2 + \frac{c^2E_0^2}{\omega^2}.$$

La carga se mueve, pues, en el plano Y, Z a lo largo de una circunferencia de radio $ecE_0/\gamma\omega^2$ y su impulso tiene módulo constante $p = eE_0/\omega$; en cada instante el impulso $\mathbf{p}$ es paralelo a la dirección del campo magnético $\mathbf{H}$ de la onda.

§ 49. Descomposición espectral

Toda onda se puede someter a descomposición espectral, es decir, se puede representar como superposición de ondas monocromáticas de diferentes frecuencias. El carácter de estos desarrollos varía según el carácter de la dependencia del campo con relación al tiempo.

Una primera clase está constituida por aquellos casos en que el desarrollo contiene frecuencias que forman una sucesión discreta. El más simple de este tipo se presenta en la descomposición de un campo puramente periódico (aunque no monocromático). Se trata aquí del desarrollo ordinario en serie de Fourier; éste contiene las frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia «fundamental» $\omega_0 = 2\pi/T$, donde T es el período del campo. Escribiremos el desarrollo en la forma

$$f = \operatorname{Re}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-in\omega_0 t}\right\} \tag{49.1}$$

(donde f es una cualquiera de las magnitudes que describen el campo). Las magnitudes f_n se definen en función de f por las integrales

$$f_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{in\omega_0 t}\,dt. \tag{49.2}$$

Dado que $f(t)$ se supone real, es evidente que

$$f_{-n} = f_n^* \tag{49.3}$$

En casos más complicados, el desarrollo puede contener múltiplos enteros

(y sumas de múltiplos enteros) de diferentes frecuencias fundamentales inconmensurables.

Cuando la suma (49.1) se eleva al cuadrado y se determina luego el valor medio respecto del tiempo, los productos de términos que corresponden a frecuencias diferentes se anulan, ya que contienen factores oscilantes. Quedan sólo los términos de la forma $f_n f_{-n} = |f_n|^2$. Así, el valor medio del cuadrado del campo, es decir, la intensidad media de la onda, es la suma de las intensidades de sus componentes monocromáticas.

$$\bar{f}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 \tag{49.4}$$

Otra clase de desarrollo corresponde a los campos que se pueden representar por una integral de Fourier con una sucesión continua de frecuencias diferentes. Para que ello sea posible, la función $f(t)$ debe satisfacer determinadas condiciones; generalmente, consideraremos funciones que se anulan para $t = \pm\infty$. Una representación de este tipo es de la forma

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \tag{49.5}$$

donde las componentes de Fourier se determinan a partir de la función $f(t)$ por las integrales

$$f_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \tag{49.6}$$

Las componentes que difieren en el signo de ω satisfacen la ecuación

$$f_{-\omega} = f_\omega^*, \tag{49.7}$$

análoga a (49.3)

Expresemos la intensidad total de la onda, es decir, la integral de f^2 extendida a todo valor del tiempo, en función de la intensidad de las componentes de Fourier. Teniendo en cuenta (49.5) y (49.6), tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \right\} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f_\omega \int_{-\infty}^{\infty} f e^{-i\omega t}\, dt \right\} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega f_{-\omega}\, d\omega,$$

o bien, recordando (49.7)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = 2 \int_{0}^{\infty} |f_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \tag{49.8}$$

§ 50. Luz parcialmente polarizada

Toda onda monocromática es, por definición, necesariamente polarizada. Sin embargo, generalmente hay que considerar ondas que son monocromáticas tan sólo aproximadamente y que contienen frecuencias pertenecientes a un pequeño intervalo $\Delta\omega$. Consideremos una onda de estas características y sea ω una cierta frecuencia media asociada a ella. Su campo (para concretar, consideraremos el campo eléctrico **E**) en un punto dado del espacio se puede escribir en la forma

$$\mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega t},$$

donde la amplitud compleja $\mathbf{E}_0(t)$ es una función del tiempo lentamente variable (para una onda rigurosamente monocromática, $\mathbf{E}_0$ sería constante). Dado que $\mathbf{E}_0$ determina la polarización de la onda, esto significa que en cada punto de ella su polarización cambia con el tiempo; de una onda de estas características se dice que está *polarizada parcialmente.*

Las propiedades de polarización de las ondas electromagnéticas, en particular de la luz, se observan experimentalmente haciendo pasar la luz que se investiga a través de varios cuerpos † y observando la intensidad de la luz transmitida. Desde el punto de vista matemático, esto significa que llegamos a conclusiones acerca de las propiedades de polarización de la luz partiendo de los valores de ciertas funciones cuadráticas del campo. Claro está, se trata aquí de los valores medios temporales de dichas funciones.

Las funciones cuadráticas del campo se construyen a partir de términos proporcionales a los productos $E_\alpha E_\beta$, $E_\alpha^* E_\beta^*$, o $E_\alpha E_\beta^*$. Productos de la forma

$$E_\alpha E_\beta = E_{0\alpha}E_{0\beta}e^{-2i\omega t}, \quad E_\alpha^* E_\beta^* = E_{0\alpha}^* E_{0\beta}^* e^{2i\omega t},$$

que contienen factores rápidamente oscilantes $e^{\mp 2i\omega t}$, dan cero cuando se forma el promedio respecto del tiempo. Los productos $E_\alpha E_\beta^* = E_{0\alpha} E_{0\beta}^*$ no contienen factores de este tipo y sus valores medios no son nulos. Vemos así que las propiedades de polarización de la luz están completamente caracterizadas por el tensor

$$J_{\alpha\beta} = \overline{E_{0\alpha} E_{0\beta}^*}. \tag{50.1}$$

Dado que el vector $\mathbf{E}_0$ se encuentra constantemente en un plano perpendicular a la dirección de la onda, el tensor $J_{\alpha\beta}$ tiene en total cuatro componentes (en este párrafo se supone que los índices α, β toman sólo dos valores: $\alpha, \beta = y, z$); el eje x, está dirigido en el sentido de la propagación de la onda.

† Por ejemplo, a través de un prisma de Nicol.

La suma de las componentes diagonales del tensor $J_{\alpha\beta}$ es igual al valor medio del cuadrado del módulo del vector $\mathbf{E}_0$ (o lo que es lo mismo, del vector $\mathbf{E}$)

$$J \equiv J_{\alpha\alpha} = \overline{\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^*}. \tag{50.2}$$

Esta cantidad determina la intensidad de la onda, medida por la densidad del flujo de energía. Para eliminar esta magnitud, que no tiene relación directa con las propiedades de polarización, introduzcamos en vez de $J_{\alpha\beta}$ el tensor

$$\varrho_{\alpha\beta} = \frac{J_{\alpha\beta}}{J}, \tag{50.3}$$

para el cual $\varrho_{\alpha\alpha} = 1$; lo llamaremos *tensor polarización.*

De la definición (50.1) resulta claramente que las componentes del tensor $J_{\alpha\beta}$, y con ellas también las de $\varrho_{\alpha\beta}$, están ligadas por las relaciones

$$\varrho_{\alpha\beta} = \varrho_{\beta\alpha}^* \tag{50.4}$$

(es decir, el tensor es hermítico). En virtud de estas relaciones, las componentes diagonales ϱ_{11} y ϱ_{22} son reales (siendo, además, $\varrho_{11} + \varrho_{22} = 1$), y $\varrho_{21} = \varrho_{12}^*$. En resumen, por consiguiente, el tensor polarización se caracteriza por tres parámetros reales.

Veamos qué condiciones debe satisfacer el tensor $\rho_{\alpha\beta}$ en el caso de luz totalmente polarizada. En este caso $\mathbf{E}_0 = \text{const}$ y, por ello, tenemos simplemente

$$J_{\alpha\beta} = J\varrho_{\alpha\beta} = E_{0\alpha}E_{0\beta}^* \tag{50.5}$$

(sin promedio), es decir, las componentes del tensor pueden representarse como productos de componentes de un cierto vector constante. La condición necesaria y suficiente para que esto ocurra se expresa por la igualación a cero del determinante

$$|\varrho_{\alpha\beta}| = \varrho_{11}\varrho_{22} - \varrho_{12}\varrho_{21} = 0. \tag{50.6}$$

El caso opuesto es el de la luz no polarizada o *natural.* La ausencia total de polarización significa que todas las direcciones (en el plano yz) son por completo equivalentes. En otras palabras, el tensor polarización debe tener la forma

$$\varrho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}. \tag{50.7}$$

En estas condiciones, el determinante $|\rho_{\alpha\beta}| = 1/4$.

En el caso general de polarización arbitraria este determinante toma valores

entre 0 y 1/4 †. Llamaremos grado de polarización la cantidad positiva P definida por

$$|\varrho_{\alpha\beta}| = \frac{1}{4}(1 - P^2). \tag{50.8}$$

Esta cantidad toma valores entre cero, en el caso de luz no polarizada, y 1, para la luz polarizada.

Un tensor arbitrario $\varrho_{\alpha\beta}$ se puede descomponer en dos partes, una simétrica y la otra antisimétrica. De ellas, la primera

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\varrho_{\alpha\beta} + \varrho_{\beta\alpha})$$

es real si el tensor $\rho_{\alpha\beta}$ es hermítico. En cambio, la parte antisimétrica es imaginaria pura. Como todo tensor antisimétrico de orden igual al número de dimensiones, esta parte antisimétrica se reduce a un pseudoescalar (véase la nota de la pág. 25):

$$\frac{1}{2}(\varrho_{\alpha\beta} - \varrho_{\alpha\beta}) = -\frac{i}{2}e_{\alpha\beta}A,$$

donde A es un pseudoescalar real y $e_{\alpha\beta}$ el tensor antisimétrico unidad (con componentes $e_{12} = -e_{21} = 1$). De esta manera, el tensor polarización se representa en la forma

$$\varrho_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \frac{i}{2}e_{\alpha\beta}A, \quad S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}, \tag{50.9}$$

es decir, se reduce a un tensor simétrico real y a un pseudoescalar.

En el caso de una onda polarizada circularmente el vector $\mathbf{E}_0 = \text{const}$ es tal que

$$E_{02} = \pm iE_{01}.$$

Es fácil ver que en este caso $S_{\alpha\beta} = 0$, y $A = \pm 1$. Por el contrario, en el caso de una onda polarizada linealmente se puede elegir el vector constante $\mathbf{E}_0$ de modo que sea real, con lo cual $A = 0$. En el caso general, la magnitud A se puede llamar grado de polarización circular y toma valores entre $+1$ y -1, correspondiendo a estos valores límite ondas polarizadas circularmente en sentido positivo y negativo, respectivamente.

---

† Es fácil comprobar que cualquier tensor de la forma (50.1) tiene determinante no negativo, considerando, para simplificar, el promedio como suma extendida a diferentes valores discretos y aplicando la conocida desigualdad algebraica

$$\left|\sum_{a,b} x_a y_b\right|^2 \leqslant \sum_a |x_a|^2 \sum_b |y_b|^2.$$

El tensor real $S_{\alpha\beta}$, como cualquier tensor simétrico, puede reducirse a sus ejes principales con dos valores propios distintos que designaremos por λ_1 y λ_2. Las direcciones de los ejes principales son perpendiculares entre sí. Llamando $\mathbf{n}^{(1)}$ y $\mathbf{n}^{(2)}$ los versores (vectores unitarios) de estas direcciones orientadas, se puede representar $S_{\alpha\beta}$ en la forma

$$S_{\alpha\beta} = \lambda_1 n_\alpha^{(1)} n_\beta^{(1)} + \lambda_2 n_\alpha^{(2)} n_\beta^{(2)}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \tag{50.10}$$

Las cantidades λ_1 y λ_2 son positivas y toman valores entre 0 y 1.

Supongamos $A = 0$, de modo que $\rho_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}$. Cada uno de los dos términos en (50.10) tiene la forma de un producto de dos componentes de un vector real constante ($\sqrt{\lambda_1}\mathbf{n}^{(1)}$ ó $\sqrt{\lambda_2}\mathbf{n}^{(2)}$). En otras palabras, cada uno de estos términos corresponde a luz polarizada linealmente. Además, vemos que en (50.10) no hay ningún término que contenga productos de componentes de estas dos ondas. Esto significa que ambas partes se pueden considerar físicamente independientes una de otra o, como se suele decir, que son incoherentes. En efecto, si dos ondas son independientes entre sí, el valor medio del producto $E_\alpha^{(1)} E_\beta^{(2)}$ es igual al producto de los valores medios de cada uno de los factores, y dado que cada uno de éstos es igual a cero, también será

$$\overline{E_\alpha^{(1)} E_\beta^{(2)}} = 0.$$

Llegamos, por lo tanto, al resultado de que, en el caso que estamos considerando ($A = 0$), una onda polarizada parcialmente se puede representar como superposición de dos ondas incoherentes (con intensidades proporcionales a λ_1 y λ_2), linealmente polarizadas en direcciones perpendiculares entre sí †. (En cambio, en el caso general de un tensor complejo $\rho_{\alpha\beta}$ cabe demostrar que la luz puede representarse como superposición de dos ondas incoherentes polarizadas elípticamente, cuyas elipses de polarización son semejantes y perpendiculares entre sí, véase el problema 2).

Sea φ el ángulo entre el eje 1 (eje y) y el versor $\mathbf{n}^{(1)}$; entonces

$$\mathbf{n}^{(1)} = (\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi), \quad \mathbf{n}^{(2)} = (-\operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi).$$

Introduciendo la cantidad $l = \lambda_1 - \lambda_2$ (supongamos $\lambda_1 > \lambda_2$), representaremos las componentes del tensor (50.10) en la forma siguiente:

---

† El determinante $|S_{\alpha\beta}| = \lambda_1 \lambda_2$; supongamos $\lambda_1 > \lambda_2$, con lo cual el grado de polarización definido por (50.8) es igual a $P = 1 - 2\lambda_2$. En el presente caso ($A = 0$), como característica del grado de polarización de la luz se utiliza frecuentemente también el llamado *coeficiente de despolarización*, definido por la razón λ_2/λ_1.

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + l\cos 2\varphi & l \operatorname{sen} 2\varphi \\ l \operatorname{sen} 2\varphi & 1 - l\cos 2\varphi \end{pmatrix}. \tag{50.11}$$

Así, pues, si se eligen los ejes y, z arbitrariamente, es posible caracterizar las propiedades de polarización de una onda por los siguientes parámetros reales, en número de tres: A-grado de polarización circular, l-grado de polarización lineal máxima, φ-ángulo formado por el versor $\mathbf{n}^{(1)}$ de polarización máxima y el eje y.

En vez de estos parámetros puede tener ciertas ventajas adoptar otro juego de tres parámetros:

$$\xi_1 = l \operatorname{sen} 2\varphi, \quad \xi_2 = A, \quad \xi_3 = l\cos 2\varphi \tag{50.12}$$

(los llamados *parámetros de Stokes*). El tensor polarización se expresa en función de ellos de acuerdo con

$$\varrho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix}. \tag{50.13}$$

Estos tres parámetros toman valores entre -1 y $+1$. El parámetro ξ_3 caracteriza la polarización lineal a lo largo de los ejes y y z: al valor $\xi_3 = 1$ corresponde la polarización lineal completa a lo largo del eje y, y a valor $\xi_3 = -1$, la polarización a lo largo del eje z. El parámetro ξ_1, en cambio, caracteriza la polarización lineal a lo largo de direcciones que forman ángulos de 45° con el eje y: a valor $\xi_1 = 1$ corresponde la polarización completa según un ángulo $\varphi = \pi/4$, y al valor $\xi_1 = -1$, la polarización según un ángulo $\varphi = -\pi/4$ †.

El determinante del tensor (50.13) es igual a

$$|\varrho_{\alpha\beta}| = \frac{1}{4}(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2). \tag{50.14}$$

Comparando con (50.8), vemos que

$$P = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}. \tag{50.15}$$

---

† Para una onda polarizada por completo elípticamente, con ejes de la elipse $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ (véase § 48), los parámetros de Stokes son iguales a:

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \pm 2b_1b_2, \quad \xi_3 = b_1^2 - b_2^2.$$

Aquí, el eje y está dirigido en el sentido de $\mathbf{b}_1$ y los dos signos en ξ_2 corresponden a direcciones orientadas de $\mathbf{b}_2$ en el sentido positivo o negativo del eje z.

Por consiguiente, para un grado de polarización P dado, en general son posibles diferentes tipos de polarización caracterizados por los valores de las tres cantidades ξ_1, ξ_2, ξ_3 con un valor dado de la suma de sus cuadrados; estas cantidades forman, como si dijéramos, un vector de longitud dada.

Obsérvese que las cantidades $\xi_2 = A$ y $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_3^2} = l$ son invariantes respecto de las transformaciones de Lorentz. Esta propiedad resulta ya evidente por el propio sentido de dichas cantidades como grados de polarización circular y lineal †).

PROBLEMAS

1. Descomponer la luz con polarización parcial arbitraria en componentes «natural» y «polarizada».

Solución. Esta descomposición equivale a representar el tensor $J_{\alpha\beta}$ en la forma

$$J_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} J^{(e)} \delta_{\alpha\beta} + E_{0\alpha}^{(\pi)} E_{0\beta}^{(\pi)*}.$$

El primer término corresponde a la componente natural de la luz, y el segundo, a la polarizada. Para determinar las intensidades de estas componentes observemos que el determinante

$$\left| J_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} J^{(e)} \delta_{\alpha\beta} \right| = | E_{0\alpha}^{(\pi)} E_{0\beta}^{(\pi)*} | = 0.$$

Representando $J_{\alpha\beta} = J\rho_{\alpha\beta}$ en la forma (50.13) y resolviendo esta ecuación obtendremos

$$J^{(e)} = J(1 - P).$$

En cuanto la intensidad de la componente polarizada, se tiene $J^{(n)} = |\mathbf{E}_0^{(n)}|^2 = J - J^{(e)} = JP$.

La componente polarizada de la luz resulta ser, en general, una onda polarizada elípticamente en la que las direcciones de los ejes de la elipse coinciden con los ejes principales del tensor $S_{\alpha\beta}$. Las longitudes b_1 y b_2 de los ejes de la elipse y el ángulo φ que el eje b_1 forma con el eje y, se determinan a partir de las igualdades:

$$b_1^2 + b_2^2 = JP, \quad 2b_1 b_2 = J\xi_2, \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\xi_2}{\xi_3}.$$

2. Representar una onda con polarización parcial arbitraria como superposición de dos ondas incohorentes polarizadas elípticamente.

---

† Para demostrarlo directamente observemos que por ser transversal el campo de la onda en cualquier sistema de referencia, es evidente a priori que el tensor $\rho_{\alpha\beta}$ se conservará bidimensional también en el nuevo sistema de referencia. La transformación de $\rho_{\alpha\beta}$ en $\rho'_{\alpha\beta}$ deja invariable la suma de los cuadrados de los módulos $\rho_{\alpha\beta}\, \rho^*_{\alpha\beta}$ (en efecto, la forma de la transformación no depende de las propiedades concretas de polarización de la luz, y para una onda polarizada por completo esta suma es igual a 1 en cualquier sistema de referencia). En virtud del carácter real de dicha transformación, las partes real e imaginaria del tensor $\rho_{\alpha\beta}$ (50.9) se transforman independientemente y, por ello, tampoco varían las sumas de los cuadrados de las componentes de cada una por separado, sumas que se representan por l y A, respectivamente.

Solución. Para un tensor hermítico $\rho_{\alpha\beta}$ los «ejes principales» vienen determinados por dos versores complejos $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}\,\mathbf{n}^* = 1$) que satisfacen las ecuaciones

$$\rho_{\alpha\beta} n_\beta = \lambda n_\alpha. \tag{1}$$

Los valores propios λ_1 y λ_2 son las raices de la ecuación

$$|\varrho_{\alpha\beta} - \lambda\delta_{\alpha\beta}| = 0.$$

Multiplicando los dos miembros de la ecuación (1) por n_α^*, tenemos:

$$\lambda = \rho_{\alpha\beta} n_\alpha^* n_\beta = \frac{1}{J}\overline{|E_{0\alpha} n_\alpha|^2},$$

de donde se sigue que λ_1, λ_2 son reales y positivos. Multiplicando las ecuaciones

$$\rho_{\alpha\beta} n_\beta^{(1)} = \lambda_1 n_\alpha^{(1)}, \quad \rho_{\alpha\beta}^* n_\beta^{(2)*} = \lambda_2 n_\alpha^*$$

por $n_\alpha^{(2)*}$ la primera, por $n_\alpha^{(1)}$ la segunda, restando los productos miembro a miembro y teniendo en cuenta que el tensor $\rho_{\alpha\beta}$ es hermítico, se obtendrá:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, n_\alpha^{(1)} n_\alpha^{(2)*} = 0.$$

De aquí se sigue que $\mathbf{n}^{(1)}.\ \mathbf{n}^{(2)*} = 0$, es decir, los versores $\mathbf{n}^{(1)}$ y $\mathbf{n}^{(2)}$ son ortogonales entre sí.

La descomposición que se busca para la onda se obtiene mediante la fórmula

$$\rho_{\alpha\beta} = \lambda_1 n_\alpha^{(1)} n_\beta^{(1)*} + \lambda_2 n_\alpha^{(2)} n_\beta^{(2)*}.$$

Es siempre posible elegir la amplitud compleja de tal manera que de las dos componentes perpendiculares entre sí una sea real, y la otra, imaginaria (cf. & 48). Haciendo

$$n_1^{(1)} = b_1, \quad n_2^{(1)} = ib_2$$

(donde ahora b_1 y b_2 se suponen normalizados por la condición $b_1^2 + b_2^2 = 1$), se obtiene a partir de la ecuación $\mathbf{n}^{(1)}\,\mathbf{n}^{(2)*} = 0$:

$$n_1^{(2)} = ib_2, \quad n_2^{(2)} = b_1.$$

Vemos así que las elipses de las dos vibraciones polarizadas elípticamente son semejantes (las razones de sus ejes son las mismas), y una de ellas está girada en un ángulo recto con relación a la otra.

3. Hallar la ley de transformación de los parámetros de Stokes en una rotación de ángulo φ de los ejes y, z.

Solución. La ley que se busca viene determinada por la relación de los parámetros de Stokes con las componentes de un tensor bidimensional en el plano yz y resulta de las fórmulas

$$\xi_1' = \xi_1 \cos 2\varphi - \xi_3 \operatorname{sen} 2\varphi, \quad \xi_3' = \xi_1 \operatorname{sen} 2\varphi + \xi_3 \cos 2\varphi, \quad \xi_2' = \xi_2.$$

§ 51. Descomposición del campo electrostático

El campo producido por cargas se puede también descomponer formalmente en ondas planas (es decir, representar por una integral de Fourier). Este desarrollo, sin embargo, difiere esencialmente del desarrollo de las ondas electromagnéticas en el vacío. En efecto, el campo producido por cargas no satistace la ecuación de las ondas homogénea y, por lo tanto, ningún término de este desarrollo satistace dicha ecuación. Se sigue de aquí que las ondas planas, mediante cuya superposición se representa el campo de cargas, no cumplen la relación $k^2 = \omega^2/c^2$ que vale para las ondas electromagnéticas planas monocromáticas.

En particular, si representamos formalmente el campo electrostático como superposición de ondas planas, la « frecuencia » de estas ondas es, evidentemente, igual a cero, puesto que el campo considerado no depende del tiempo; en cambio, los vectores de onda son, claro está, diferentes de cero.

Consideremos el campo producido por una carga puntual e situada en el origen de coordenadas. El potencial ϕ de este campo está determinado por la ecuación (véase § 36).

$$\Delta\phi = -4\pi e\,\delta(\mathbf{r}). \tag{51.1}$$

Desarrollemos ϕ en integral de Fourier espacial, es decir, representémosla en la forma

$$\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,\phi_{\mathbf{k}}\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3},\quad d^3k = dk_x\,dk_y\,dk_z \tag{51.2}$$

con lo cual

$$\phi_k = \int \phi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,dV.$$

Aplicando el operador de Laplace a los dos miembros de la igualdad (51.2), obtenemos:

$$\Delta\phi = -\int_{-\infty}^{+\infty} k^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\phi_{\mathbf{k}}\,d^3k,$$

de manera que la componente de Fourier de la expresión $\Delta\phi$ es:

$$(\Delta\phi)_{\mathbf{k}} = -k^2\phi_{\mathbf{k}}.$$

Por otra parte, podemos determinar $(\Delta\phi)_{\mathbf{k}}$ aplicando la transtormación de Fourier a los dos miembros de la ecuación (51.1):

$$(\Delta\phi)_{\mathbf{k}} = -\int_{-\infty}^{+\infty} 4\pi e\,\delta(\mathbf{r})\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,dV = -4\pi e$$

Igualando las dos expresiones obtenidas para $(\Delta\phi)_{\mathbf{k}}$, se encuentra:

$$\phi_k = \frac{4\pi e}{k^2} \tag{51.3}$$

Esta fórmula resuelve el problema propuesto.

De la misma manera que el potencial ϕ, podemos desarrollar también la intensidad

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{51.4}$$

Comparado con (51.2), obtenemos:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{\mathbf{k}}\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3} = -\int i\mathbf{k}\phi_{\mathbf{k}}\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

Valiéndonos de (51.4), se tiene:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\phi_{\mathbf{k}} = -i\frac{4\pi e\mathbf{k}}{k^2} \tag{51.5}$$

Vemos así que el campo de ondas en que hemos descompuesto el campo de Coulomb es paralelo al vector de onda. Estas ondas, por consiguiente, pueden calificarse de *longitudinales*.

§ 52. **Frecuencias propias del campo**

Consideremos un campo electromagnético en un volumen finito del espacio †. Para simplificar los cálculos que siguen supondremos que el volumen tiene la forma de un paralelepípedo rectangular de lados A, B, C, respectivamente. Podemos entonces desarrollar todas las magnitudes que caracterizan el campo en este paralelepípedo en serie triple de Fourier (según las tres coordenadas). Este desarrollo

† Se trata aquí de un campo en ausencia de cargas (« radiación libre »).

se puede escribir (por ejemplo, para el potencial vector) en la forma:

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}}\, e^{i\,\mathbf{kr}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^{*}\, e^{-i\,\mathbf{kr}}), \tag{52.1}$$

que muestra explícitamente el carácter real de **A**. La suma se extiende aquí a todos los valores posibles del vector **k** cuyas componentes, como es sabido, toman los valores

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{A}, \qquad k_y = \frac{2\pi n_y}{B}, \qquad k_z = \frac{2\pi n_z}{C}, \tag{52.2}$$

donde n_x, n_y, n_z son enteros, positivos y negativos. De la ecuación div **A** = 0 se sigue que para cada **k**:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}} = 0, \tag{52.3}$$

es decir, los vectores complejos $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ son « perpendiculares » a los correspondientes vectores de onda **k**. Los vectores $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ son, claro está, funciones del tiempo; satisfacen las ecuaciones

$$\ddot{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} + c^2 k^2\, \mathbf{a}_{\mathbf{k}} = 0. \tag{52.4}$$

Si las dimensiones A, B, C del volumen son suficientemente grandes, valores próximos de k_x, k_y, k_z (para los que n_x, n_y, n_z difieren en una unidad) son muy próximos entre sí. En este caso podemos hablar del número de valores posibles de k_x, k_y, k_z en los pequeños intervalos Δk_x, Δk_y, Δk_z.

Dado que a valores próximos de, por ejemplo, k_x, corresponden valores de n_x que difieren en una unidad, el número Δn_x de valores posibles de k_x en el intervalo Δk_x es igual, simplemente, al número de valores de n_x, en el intervalo correspondiente. Obtenemos así

$$\Delta n_x = \frac{A}{2\pi}\Delta k_x, \qquad \Delta n_y = \frac{B}{2\pi}\Delta k_y, \qquad \Delta n_z = \frac{C}{2\pi}\Delta k_z.$$

El número total Δn de valores posibles del vector **k** con componentes en los intervalos Δk_x, Δk_y, Δk_z es igual al producto $\Delta n_x\, \Delta n_y\, \Delta n_z$, esto es,

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3}\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z, \tag{52.5}$$

donde $V = ABC$ es el volumen del campo.

Es fácil determinar, a partir de este resultado, el número de valores posibles del vector de onda con módulo en el intervalo Δk y con dirección contenida en el elemento de ángulo sólido Δo. Para ello basta pasar a coordenadas polares en el « espacio k » y substituir en vez de $\Delta k_x\,\Delta k_y\,\Delta k_z$ el elemento de volumen en dichas coordenadas. Se tiene así:

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3} k^2\,\Delta k \Delta o. \tag{52.6}$$

Finalmente, el número de valores posibles del vector de onda con módulo k en el intervalo Δk y que apunta en todas direcciones (en vez de Δo, tomamos 4π) es

$$\Delta n = \frac{V}{2\pi^2} k^2\,\Delta k. \tag{52.7}$$

Los vectores $\mathbf{a_k}$, como funciones del tiempo, se comportan como funciones periódicas simples con períodos $\omega_k = ck$ [véase (52.4)]. Representemos el desarrollo del campo de forma tal que aparezca como superposición de ondas planas progresivas. Para ello supondremos que cada uno de los vectores $\mathbf{a}_k$ depende del tiempo mediante el factor $e^{-iw_k t}$

$$\mathbf{a_k} \sim e^{-i\omega_k t}, \quad \omega_k = ck. \tag{52.8}$$

Cada uno de los términos de la suma (52.1) es entonces función tan sólo de la diferencia $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t$, lo que corresponde a una onda que se propaga en la dirección del vector $\mathbf{k}$.

Calculemos la energía total

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2)\, dV$$

del campo considerado en el volumen V, expresándola en función de las cantidades $\mathbf{a_k}$. Para el campo eléctrico tenemos:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} = -\frac{1}{c}\sum_{\mathbf{k}} (\dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{a}}_k^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}),$$

o bien, teniendo en cuenta (52.8),

$$\mathbf{E} = i\sum_{\mathbf{k}} k(\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}). \tag{52.9}$$

Para el campo magnético $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$, se encuentra:

$$\mathbf{H} = i\sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}}e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \mathbf{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^{*}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}). \tag{52.10}$$

Al calcular los cuadrados de esta suma, no hay que perder de vista que todos los productos de términos cuyos vectores de onda sean distintos, $\mathbf{k}\neq\mathbf{k}'$, dan cero al integrar en todo el volumen. En efecto, estos términos contienen factores de la torma $e^{\pm i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$, $\mathbf{q} = \mathbf{k}\pm\mathbf{k}'$, y la integral, por ejemplo,

$$\int_0^A e^{i\frac{2\pi}{A}n_x x}\,dx,$$

con n_x entero y diferente de cero, es igual a cero. Por la misma razón, los productos que contienen factores $e^{\pm 2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ se anulan. En cambio, aquellos términos en los que las exponenciales desaparecen, la integración respecto de dV da precisamente el volumen V.

Se obtiene así,

$$\mathcal{E} = \frac{V}{4\pi}\sum_{\mathbf{k}} \{k^2\mathbf{a}_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^{*} + (\mathbf{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}})\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^{*})\}.$$

Pero dado que $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{k} = 0$, se tiene:

$$(\mathbf{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}})\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^{*}) = k^2\mathbf{a}_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^{*},$$

y obtenemos finalmente,

$$\mathcal{E} = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}}, \quad \mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \frac{k^2V}{2\pi}\mathbf{a}_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^{*}. \tag{52.11}$$

La energía total del campo se expresa así como suma de las energías, $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$, asociadas a cada una de las ondas planas por separado.

De manera completamente análoga se puede calcular el impulso total del campo,

$$\frac{1}{c^2}\int \mathbf{S}\,dV = \frac{1}{4\pi c}\int \mathbf{E}\times\mathbf{H}\,dV,$$

para el que se obtiene:

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{k}\frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}}}{c}. \tag{52.12}$$

Este resultado era de esperar dada la conocida relación entre la energía y el impulso de una onda plana (véase § 47).

La introducción del desarrollo (52.1) nos permite expresar el campo en función de una sucesión discreta de variables (los vectores $\mathbf{a}_k$), en vez de hacerlo en función de una sucesión continua de variables, que es en esencia lo que se hace al dar el potencial $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ en todos los puntos del espacio. Efectuemos ahora una transformación de las variables $\mathbf{a}_k$ que permite escribir las ecuaciones del campo en una forma análoga a las ecuaciones canónicas (ecuaciones de Hamilton) de la mecánica.

Introduzcamos las « variables canónicas » reales $\mathbf{Q}_k$ y $\mathbf{P}_k$ mediante las relaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_k &= \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}\,(\mathbf{a}_k+\mathbf{a}_k^*), \\ \mathbf{P}_k &= -i\omega_k \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}\,(\mathbf{a}_k-\mathbf{a}_k^*) = \dot{\mathbf{Q}}_k. \end{aligned} \tag{52.13}$$

La función de Hamilton del campo se obtiene substituyendo las cantidades $\mathbf{a}_k$ en la expresión (52.11) de la energía dadas en función de $\mathbf{P}_k$ y $\mathbf{Q}_k$:

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{H}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2+\omega_k^2\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}^2). \tag{52.14}$$

Con ello las ecuaciones de Hamilton $\partial\mathcal{H}/\partial\mathbf{P}_k = \dot{\mathbf{Q}}_k$ coinciden con las igualdades $\mathbf{P}_k = \dot{\mathbf{Q}}_k$, las cuales resultan ser así efectivamente consecuencia de las ecuaciones del movimiento (lo que se ha conseguido mediante la elección impuesta para el coeficiente en la transformación (52.13)). Por otra parte, las ecuaciones $\partial\mathcal{H}/\partial\mathbf{Q}_k = -\dot{\mathbf{P}}_k$ conducen a las ecuaciones

$$\ddot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}}+\omega_k^2\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = 0, \tag{52.15}$$

es decir, coinciden idénticamente con las ecuaciones del campo.

Cada uno de los vectores $\mathbf{Q}_k$ y $\mathbf{P}_k$ es perpendicular al vector de ondas $\mathbf{k}$, es decir, tiene dos componentes independientes. La dirección de estos vectores determina la dirección de polarización de la correspondiente onda móvil. Representando por $\mathbf{Q}_{kj}$, $j = 1, 2$, las dos componentes del vector $\mathbf{Q}_k$ (en el plano perpendicular a $\mathbf{k}$), tenemos $\mathbf{Q}_k^2 = \sum_j Q_{kj}^2$, y análogamente para $\mathbf{P}_k$. En estas condiciones,

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}j} \mathcal{H}_{\mathbf{k}j}, \quad \mathcal{H}_{\mathbf{k}j} = \tfrac{1}{2}(P_{\mathbf{k}j}^2+\omega_k^2 Q_{\mathbf{k}j}^2). \tag{52.16}$$

Vemos así que el hamiltoniano se descompone en una suma de términos independientes, cada uno de los cuales contiene solamente un par de cantidades Q_{kj}, P_{kj}. Cada uno de estos términos corresponde a una onda móvil, con un vector de onda y una polarización determinados. La magnitud $\mathcal{H}_{kj}$ tiene la forma de la función de Hamilton de un « oscilador » unidimensional que efectúa vibraciones armónicas simples. Por esta razón, al referirse a este resultado se habla a veces de desarrollo del campo en osciladores armónicos.

Escribamos ahora las fórmulas que expresan el campo explícitamente en función de las variables $\mathbf{P}_k$ y $\mathbf{Q}_k$. De (52.13), se deduce

$$\mathbf{a}_k = \frac{i}{k}\sqrt{\frac{\pi}{V}}(\mathbf{P}_k - i\omega_k \mathbf{Q}_k), \quad \mathbf{a}_k^* = -\frac{i}{k}\sqrt{\frac{\pi}{V}}(\mathbf{P}_k + i\omega_k \mathbf{Q}_k). \tag{52.17}$$

Substituyendo estas expresiones en (52.1), se encuentra el potencial vector del campo:

$$\mathbf{A} = 2\sqrt{\frac{\pi}{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{k}(ck\mathbf{Q}_k \cos\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \mathbf{P}_k \operatorname{sen}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}). \tag{52.18}$$

Para los campos eléctrico y magnético se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -2\sqrt{\frac{\pi}{V}}\sum_{\mathbf{k}}(ck\mathbf{Q}_k \operatorname{sen}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{P}_k \cos\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}),\\ \mathbf{H} &= -2\sqrt{\frac{\pi}{V}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{k}\{ck(\mathbf{k}\times\mathbf{Q}_k)\operatorname{sen}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + (\mathbf{k}\times\mathbf{P}_k)\cos\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\}.\end{aligned} \tag{52.19}$$

CAPÍTULO 7

PROPAGACIÓN DE LA LUZ

§ 53. La óptica geométrica

Una onda plana se caracteriza por la propiedad de que su dirección de propagación y su amplitud son las mismas en todas partes. Una onda electromagnética cualquiera no tiene, claro está, esta propiedad.

Sin embargo, muchas ondas electromagnéticas, que no son planas, gozan de la propiedad de que en cada pequeña región del espacio se pueden considerar como planas. Para ello es necesario, evidentemente, que la amplitud y la dirección de la onda se conserven prácticamente constantes a distancias del orden de la longitud de onda.

Si esta condición se cumple, podemos introducir la llamada *superficie de onda*, es decir, una superficie tal que en todos sus puntos la fase de la onda es la misma (en un instante dado). (Las superficies de onda de una onda plana son, claro está, planos perpendiculares a la dirección de propagación de la onda). En cada pequeña región del espacio podemos hablar de una dirección de propagación de la onda, dirección que es normal a la superficie de onda. De esta manera se puede introducir el concepto de *rayos* — líneas tales que en cada uno de sus puntos la tangente coincide con la dirección de propagación de la onda.

El estudio de las leyes de propagación de las ondas en este caso constituye el objeto de la *óptica geométrica*. En consecuencia, la óptica geométrica considera la propagación de las ondas, en particular de la luz, como propagación de rayos, completamente divorciada de sus propiedades ondulatorias. Dicho de otro modo, la óptica geométrica corresponde al caso límite de pequeñas longitudes de onda, $\lambda \to 0$.

Pasemos ahora a deducir la ecuación fundamental de la óptica geométrica — la ecuación que determina la dirección de los rayos. Sea f una magnitud cualquiera que describa el campo de la onda (cualquier componente de **E** o de **H**). Para una onda plana monocromática, f es de la forma

$$f = ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\alpha)} = ae^{i(-k_i x^i+\alpha)} \tag{53.1}$$

(hemos prescindido del símbolo Re; se sobreentiende que se tomará la parte real de todas las expresiones).

Expresemos el campo en la forma

$$f = ae^{i\psi}. \tag{53.2}$$

Cuando la onda no es plana, pero es aplicable la óptica geométrica, la amplitud a es, hablando en términos generales, una función de las coordenadas y del tiempo, y la fase ψ, que se llama *iconal*, no tiene una forma tan simple como en (53.1). Es esencial, sin embargo, que el iconal ψ sea una cantidad grande. Esto se ve inmediatamente sin más que tener en cuenta el hecho de que cambia en 2π cuando nos movemos una distancia igual a una longitud de onda y que la óptica geométrica corresponde al límite $\lambda \to 0$.

En regiones pequeñas del espacio y para cortos intervalos de tiempo, el iconal ψ se puede desarrollar en serie; limitándonos a los términos de primer orden, tenemos:

$$\psi = \psi_0 + \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} + t \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

(el origen de coordenadas y el origen del tiempo se han elegido interiores a la región del espacio y al intervalo de tiempo considerados; las derivadas se toman en el origen). Comparando esta expresión con (53.1) se puede escribir:

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \equiv \operatorname{grad} \psi, \quad \omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}, \tag{53.3}$$

lo que corresponde al hecho de que en cada región pequeña del espacio (y en cada intervalo pequeño de tiempo) la onda se puede considerar como plana. En forma cuadridimensional, la relación (53.3) se escribe:

$$k_i = -\frac{\partial \psi}{\partial x^i}, \tag{53.4}$$

donde k_i es el cuadrivector de onda.

Vimos en el § 48 que las componentes del cuadrivector k_i están ligadas entre sí por la relación $k_i k^i = 0$. Substituyendo aquí (53.4), se obtiene la ecuación:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} = 0. \tag{53.5}$$

Esta ecuación, la *ecuación del iconal*, es la ecuación fundamental de la óptica geométrica.

La ecuación del iconal se puede deducir también pasando directamente al límite $\lambda \to 0$ en la ecuación de las ondas. El campo f satisface la ecuación de las ondas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x^i} = 0.$$

Substituyendo $f = ae^{i\psi}$, se encuentra:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x^i} e^{i\psi} + 2i \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} e^{i\psi} + if \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x^i} - \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} f = 0 \qquad (53.6)$$

Pero el iconal ψ, como hemos señalado antes, es una cantidad grande; por consiguiente, podemos prescindir aquí de los tres primeros términos frente al cuarto, y así llegamos de nuevo a la ecuación (53.5).

Veamos ahora ciertas relaciones, que, a decir verdad, al aplicarlas a la propagación de la luz en el vacío conducen sólo a resultados del todo obvios. Sin embargo, dichas relaciones son importantes porque, en su forma general, se aplican también a la propagación de la luz en un medio material.

La forma de la ecuación del iconal pone de manifiesto una notable analogía entre la óptica geométrica y la mecánica de las partículas materiales. El movimiento de una partícula material está determinado por la ecuación de Hamilton-Jacobi (16.11). Esta ecuación, como también la ecuación del iconal, es una ecuación de segundo grado entre derivadas parciales primeras. Conforme sabemos, la acción S está ligada al impulso y a la función de Hamilton de la partícula por las relaciones

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathcal{H} = -\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Comparando estas fórmulas con las fórmulas (53.3), se ve que el vector de onda representa el mismo papel en óptica geométrica que el impulso de la partícula en mecánica, mientras que la frecuencia representa el papel de la función de Hamilton, es decir, el de la energía de la partícula. El módulo k del vector de onda está ligado con la frecuencia por la fórmula $k = \omega/c$. Esta relación es análoga a la relación $p = \mathcal{E}/c$ entre el impulso y la energía de una partícula de masa nula y velocidad igual a la velocidad de la luz.

Para las partículas tenemos las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}}, \qquad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}.$$

Vista la analogía que hemos señalado, podemos escribir sin más las correspondientes ecuaciones para los rayos

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}, \qquad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \tag{53.7}$$

En el vacío, $\omega = ck$, de manera que $\dot{\mathbf{k}} = 0$, $\mathbf{v} = c\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ es el vector unitario que corresponde a la dirección de propagación), es decir, como debe ser, en el vacío los rayos son rectas a lo largo de las cuales la luz se propaga con velocidad c.

La analogía entre el vector de onda de una onda y el impulso de una partícula se pone de manifiesto de manera especialmente clara en el siguiente caso. Imaginemos una onda que es superposición de ondas monocromáticas con frecuencias pertenecientes a un pequeño intervalo y que ocupan una cierta región finita del espacio (el llamado *paquete de ondas*). Calculemos el cuadrimpulso del campo de esta onda mediante la fórmula (32.6) y con el tensor energía-impulso (48.15) (para cada componente monocromática). Substituyendo en esta fórmula k_i por un cierto valor medio, se obtiene una expresión de la forma

$$P^i = Ak^i, \tag{53.8}$$

donde el coeficiente de proporcionalidad A entre los dos cuadrivectores P^i y k^i es un escalar. En forma tridimensional esta relación nos da:

$$\mathbf{P} = A\mathbf{k}, \qquad \mathcal{E} = A\omega. \tag{53.9}$$

Vemos así que el impulso y la energía de un paquete de ondas se transforman, cuando pasamos de un sistema de referencia a otro, como el vector de onda y la frecuencia.

Siguiendo esta analogía, podemos establecer para la óptica geométrica un principio análogo al principio de mínima acción de la mecánica. Sin embargo, el principio en cuestión no puede escribirse en forma hamiltoniana, $\delta \int L\, dt = 0$, dado que resulta imposible introducir para los rayos una función análoga a la función de Lagrange de una partícula. En efecto, ésta está ligada con la función de Hamilton por la relación $L = \mathbf{p} \cdot \partial \mathcal{H}/\partial \mathbf{p} - \mathcal{H}$. Al substituir la función de Hamilton $\mathcal{H}$ por la frecuencia ω y el impulso por el vector de onda $\mathbf{k}$, deberíamos escribir para la función de Lagrange de la óptica $\mathbf{k} \cdot \partial\omega/\partial\mathbf{k} - \omega$. Pero esta expresión es igual a cero,

dado que $\omega = ck$. La imposibilidad de introducir una función de Lagrange para los rayos se puede ver también directamente teniendo en cuenta lo antes dicho, a saber, que la propagación de los rayos es análoga al movimiento de partículas de masa nula.

Si la onda tiene una frecuencia constante ω, la dependencia temporal de su campo viene dada por un factor de la forma $e^{-i\omega t}$. Por consiguiente, para el iconal de una de estas ondas podemos escribir

$$\psi = -\omega t + \psi_0(x, y, z), \tag{53.10}$$

donde ψ_0 es una función que depende sólo de las coordenadas. La ecuación del iconal (53.5) toma ahora la forma

$$(\operatorname{grad} \psi_0)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \tag{53.11}$$

Las superficies de onda son las superficies de iconal constante, es decir, la familia de superficies de la forma $\psi_0(x, y, z) = \text{const}$. Los rayos son en cada punto normales a la correspondiente superficie de onda; su dirección está determinada por el gradiente $\nabla\psi_0$.

Como es sabido, cuando la energía es constante, el principio de mínima acción para partículas se puede escribir también en la forma del llamado *principio de Maupertuis*:

$$\delta S = \delta \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

donde la integración se extiende a lo largo de la trayectoria de la partícula entre dos de sus puntos, dados. El impulso se supone aquí expresado en función de la energía y de las derivadas de las coordenadas. El principio análogo para rayos se llama *principio de Fermat*. En este caso podemos escribir, por analogía:

$$\delta\psi = \delta \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{l} = 0. \tag{53.12}$$

En el vacío, $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$, y obtenemos ($d\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = dl$):

$$\delta \int dl = 0, \tag{53.13}$$

que corresponde a la propagación rectilínea de los rayos.

§ 54. Intensidad

De esta manera, en óptica geométrica la onda luminosa se puede considerar como un haz de rayos. Sin embargo, los rayos por sí solos determinan únicamente

la dirección de propagación de la luz en cada punto; subsiste la cuestión de cuál es la distribución de la intensidad de la luz en el espacio.

En una superficie de onda del haz de rayos considerado, separemos un elemento infinitesimal de superficie. Es sabido que, según la geometría diferencial, toda superficie tiene, en cada uno de sus puntos, dos radios principales de curvatura, en general diferentes. Sean *ac* y *bd* (fig. 7) elementos de los círculos principales de curvatura construidos en el elemento dado de la superficie de onda. En estas condiciones, los rayos que pasan por *a* y *c* se cortan en el correspondiente centro de curvatura O_1, mientras que los rayos que pasan por *b* y *c* se cortan en el otro centro de curvatura O_2.

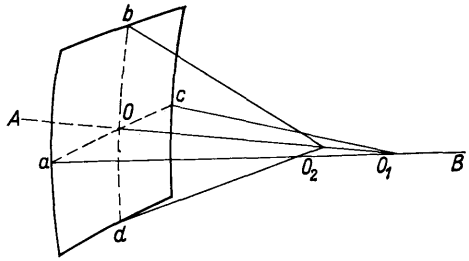

FIG. 7.

Para aberturas angulares dadas de los haces que parten de O_1 y O_2, las longitudes de los arcos *ac* y *bd*, son evidentemente, proporcionales a los correspondientes radios de curvatura R_1 y R_2 (es decir, a las longitudes O_1a y O_2b); el área del elemento de superficie es proporcional al producto de las longitudes de los segmentos *ac* y *bd*, es decir, proporcional a R_1R_2. Con otras palabras, si consideramos el elemento de superficie de onda limi ado por un conjunto de rayos determinado, cuando nos movemos a lo largo de lc s mismos el área de este elemento cambiará proporcionalmente a R_1R_2.

Por otra parte, la intensidad, es decir, la densidad de flujo de energía, es inversamente proporcional al área a través de la cual pasa una cantidad dada de energía luminosa. Llegamos así a la conclusión de que la intensidad es

$$I = \frac{\text{const}}{R_1 R_2}. \tag{54.1}$$

Esta fórmula debe entenderse como sigue. Sobre cada rayo (*AB* en la fig. 7) hay ciertos puntos O_1 y O_2 que son los centros de curvatura (correspondientes a los puntos de intersección con el rayo) de todas las superficies de onda que cortan al rayo dado. Las distancias OO_1 y OO_2 desde el punto *O* en que la superficie de onda

corta al rayo a los puntos O_1 y O_2 son los radios de curvatura R_1 y R_2 de la superficie de onda en el punto O. La fórmula (54.1) determina así el cambio de la intensidad de la luz a lo largo de un rayo dado en función de las distancias a determinados puntos sobre el mismo. Hay que subrayar que esta fórmula no se puede utilizar para comparar intensidades en puntos diferentes de una misma superficie de onda.

Dado que la intensidad está determinada por el cuadrado del módulo del campo, podemos escribir para la variación del propio campo a lo largo del rayo:

$$f = \frac{\text{const}}{\sqrt{R_1 R_2}} e^{ikR}, \tag{54.2}$$

donde en el factor de fase e^{ikR} podemos escribir o e^{ikR_1} o e^{ikR_2}; las cantidades e^{ikR_1} y e^{ikR_2} (para un rayo dado) difieren entre sí únicamente en un factor constante, dado que la diferencia $R_1 - R_2$, la distancia entre ambos centros de curvatura, es una constante.

Si los dos rayos de curvatura de la superficie de onda coinciden, las relaciones (54.1) y (54.2) toman la forma:

$$I = \frac{\text{const}}{R^2}, \quad f = \frac{\text{const}}{R} e^{ikR}. \tag{54.3}$$

Esto ocurre, en particular, siempre que la luz es emitida por un foco puntual (las superficies de onda son entonces esferas concéntricas, y R es la distancia al foco luminoso).

De (54.1) se sigue que la intensidad se hace infinita en los puntos $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, es decir, en los centros de curvatura de las superficies de onda. Aplicando este resultado a todos los rayos de un haz, se encuentra que la intensidad de la luz en el haz dado se hace infinita, generalmente, sobre dos superficies — los lugares geométricos de todos los centros de curvatura de la superficie de onda. Estas superficies se llaman *cáusticas*. En el caso particular de un haz de rayos con superficies de ondas esféricas, las dos cáusticas se reducen a un solo punto (el *foco*).

Obsérvese que, en virtud de resultados de la geometría diferencial, bien conocidos, acerca de las propiedades de los lugares geométricos de los centros de curvatura de una familia de superficies, los rayos son tangentes a las cáusticas.

Es necesario no perder de vista que (para superficies de onda convexas) puede ocurrir que los centros de curvatura de las superficies de onda no se encuentren precisamente sobre los rayos, sino sobre sus prolongaciones más allá del sistema

óptico del que proceden. En tales casos se habla de *cáusticas imaginarias* (o de focos imaginarios). La intensidad de la luz no se hace entonces infinita en ningún punto.

En cuanto al aumento de la intensidad tendiendo a infinito, en realidad debemos entender por ello que la intensidad se hace grande en los puntos de la cáustica, si bien se conserva finita (véase el problema en el § 59). El crecimiento formal hacia infinito significa que la aproximación de la óptica geométrica nunca es aplicable en la vecindad de las cáusticas. Relacionado con esto tenemos el hecho de que el cambio de fase a lo largo del rayo se puede determinar mediante la fórmula (54.2) únicamente en segmentos del rayo que no incluyen su punto de tangencia con la cáustica. Más adelante (en el § 59) demostraremos que, en realidad, al pasar por la cáustica, la fase del campo disminuye en $\pi/2$. Esto significa que si, en el segmento del rayo antes de su primer contacto con la cáustica, el campo es proporcional al factor e^{ikx} (x es la coordenada a lo largo del rayo), después del contacto el campo será proporcional a $e^{i\left(kx-\frac{\pi}{2}\right)}$. Lo mismo ocurre en la vecindad del punto de tangencia con la segunda cáustica, y más allá de este punto el campo será proporcional a $e^{i(kx-\pi)}$†.

§ 55. Iconal angular

Un rayo luminoso que avanza en el vacío e incide sobre un cuerpo transparente, poseerá al salir de él, en general, una dirección diferente de la inicial. Este cambio de dirección dependerá, claro, de las propiedades específicas del cuerpo y de su forma. Sin embargo, es posible deducir leyes generales acerca del cambio de dirección de un rayo luminoso al pasar a través de un cuerpo material arbitrario. En la deducción se supone solamente que la óptica geométrica es aplicable a los rayos que se propagan dentro del cuerpo considerado. Siguiendo la costumbre, llamaremos a estos cuerpos transparentes, a través de los cuales se propaga la luz, *sistemas ópticos.*

En virtud de la analogía mencionada en el § 53 entre la propagación de rayos y el movimiento de partículas, las mismas leyes generales son válidas para el cambio en la dirección del movimiento de una partícula que inicialmente se mueve en línea recta en el vacío, que pasa luego a través de un campo electromagnético y vuelve finalmente al vacío. Para concretar, sin embargo, en lo que sigue hablaremos siempre de propagación de rayos luminosos.

Vimos que la ecuación del iconal, que determina la propagación de los rayos, se puede escribir en la forma (53.11) (para la luz de determinada frecuencia). En lo

† Aunque la fórmula (54.2) no vale cerca de las cáusticas, los cambios de fase del campo corresponden formalmente a un cambio de signo (es decir, a la multiplicación por $e^{i\pi}$) de R_1 o R_2 en dicha fórmula.

que sigue representaremos por ψ el iconal ψ_0 dividido por la constante ω/c. La ecuación fundamental de la óptica geométrica toma entonces la forma

$$(\nabla\psi)^2 = 1. \tag{55.1}$$

Cada solución de esta ecuación representa un determinado haz de rayos en el que la dirección del rayo que pasa por un punto dado del espacio está determinada por el gradiente de ψ en dicho punto. Sin embargo, esta descripción es insuficiente para nuestros fines, ya que de lo que se trata es de hallar relaciones generales que determinen el paso a través de un sistema óptico, no de un determinado haz de rayos, sino de rayos cualesquiera. Debemos utilizar, por lo tanto, un iconal expresado de forma que represente todos los rayos de luz posibles en general, es decir, rayos que pasan por un par cualquiera de puntos del espacio. En su forma ordinaria el iconal $\psi(\mathbf{r})$ es la fase del rayo en un cierto haz que pasa por el punto $\mathbf{r}$. Debemos ahora, en cambio, introducir el iconal como función $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ de las coordenadas de dos puntos ($\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ son los vectores posición de los puntos inicial y final del rayo). Por cada par de puntos $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ es posible hacer pasar un rayo, y $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ es la diferencia de fase (o, como suele llamarse, la *longitud de camino óptico*) de este rayo entre los puntos $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$. A partir de aquí, supondremos siempre que $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ son los vectores posición de los puntos sobre el rayo antes y después de su paso a través del sistema óptico, respectivamente.

Si en $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ uno de los vectores posición, por ejemplo, $\mathbf{r}'$, se considera dado, ψ como función de $\mathbf{r}$ representa un determinado haz de rayos, a saber, el haz de rayos que pasan por el punto $\mathbf{r}'$. La función ψ debe entonces satisfacer la ecuación (55.1), donde las derivadas se refieren a las componentes de $\mathbf{r}$. Análogamente, considerando dado $\mathbf{r}$, obtenemos otra ecuación para $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, de forma que

$$(\nabla_{\mathbf{r}}\psi)^2 = 1, \quad (\nabla_{\mathbf{r}'}\psi)^2 = 1. \tag{55.2}$$

La dirección del rayo está determinada por el gradiente de su fase. Dado que $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ es la diferencia de fase en los puntos $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$, la dirección del rayo en el punto $\mathbf{r}'$ viene dada por el vector $\mathbf{n}' = \partial\psi/\partial\mathbf{r}'$, y en el punto $\mathbf{r}$ por el vector $\mathbf{n} = -\partial\psi/\partial\mathbf{r}$. De (55.2) resulta, evidentemente, que los vectores $\mathbf{n}$ y $\mathbf{n}'$ son unitarios:

$$\mathbf{n}^2 = \mathbf{n}'^2 = 1. \tag{55.3}$$

Los cuatro vectores $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ están ligados entre sí, ya que dos de ellos ($\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$) son las derivadas de una cierta función ψ respecto de los otros dos ($\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$). En cuanto a la propia función ψ, ésta satisface las condiciones suplementarias (55.2).

Para obtener las relaciones que ligan $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$, es conveniente introducir, en vez de ψ, otra magnitud a la que no se impone ninguna condición suplementaria

(es decir, no se exige de ella que satisfaga a una ecuación diferencial). Esto se puede conseguir de la siguiente manera. En la función ψ las variables independientes son $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$, de manera que para la diferencial $d\psi$ se tiene

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}'}\cdot d\mathbf{r}' = -\mathbf{n}\cdot d\mathbf{r} + \mathbf{n}'\cdot d\mathbf{r}'.$$

Apliquemos ahora una transformación de Legendre que haga pasar de $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ a las nuevas variables independientes $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$, esto es, hagamos

$$d\psi = -d(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) + \mathbf{r}\cdot d\mathbf{n} + d(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{r}') - \mathbf{r}'\cdot d\mathbf{n}',$$

de donde, introduciendo la función

$$\chi = \mathbf{n}'\cdot\mathbf{r}' - \mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - \psi, \tag{55.4}$$

se deduce

$$d\chi = -\mathbf{r}\cdot d\mathbf{n} + \mathbf{r}'\cdot d\mathbf{n}'. \tag{55.5}$$

La función χ se llama *iconal angular;* como resulta de (55.5), en ella las variables independientes son $\mathbf{n}$ y $\mathbf{n}'$. Ninguna condición suplementaria se impone a χ. En efecto, la ecuación (55.3) representa ahora tan sólo una condición relativa a las variables independientes: de las tres componentes n_x, n_y, n_z del vector $\mathbf{n}$ (y análogamente para $\mathbf{n}'$), sólo dos son independientes. Utilizaremos como variables independientes n_y, n_z, n'_y, n'_z; en estas condiciones,

$$n_x = \sqrt{1-n_y^2-n_z^2},\quad n'_x = \sqrt{1-n_y'^2-n_z'^2}.$$

Substituyendo estas expresiones en

$$d\chi = -x\,dn_x - y\,dn_y - z\,dn_z + x'\,dn'_x + y'\,dn'_y + z'\,dn'_z,$$

se encuentra para la diferencial $d\chi$:

$$d\chi = -\left(y-\frac{n_y}{n_x}x\right)dn_y - \left(z-\frac{n_z}{n_x}x\right)dn_z + \left(y'-\frac{n'_y}{n'_x}x'\right)dn'_y + \left(z'-\frac{n'_z}{n'_x}x'\right)dn'_z.$$

De aquí se siguen, finalmente, las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} y-\frac{n_y}{n_x}x &= -\frac{\partial\chi}{\partial n_y}, \quad & z-\frac{n_z}{n_x}x &= -\frac{\partial\chi}{\partial n_z},\\ y'-\frac{n'_y}{n'_x}x' &= \frac{\partial\chi}{\partial n'_y}, \quad & z'-\frac{n'_z}{n'_x}x' &= \frac{\partial\chi}{\partial n'_z}, \end{aligned} \tag{55.6}$$

que definen la relación buscada entre $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$. La función χ caracteriza las propiedades específicas del cuerpo a través del cual pasan los rayos (o las propiedades del campo, en el caso del movimiento de partículas cargadas).

Para valores dados de **n**, **n**′, cada uno de los dos pares de ecuaciones (55.6) representa una recta. Éstas no son sino los rayos antes y después del paso a través del sistema óptico. Las ecuaciones (55.6) determinan así directamente la marcha de los rayos a uno y otro lado del sistema óptico.

§ 56. Haces estrechos de rayos

Al considerar el paso de haces de rayos a través de los sistemas ópticos, presentan particular interés los haces cuyos rayos pasan todos por un punto (estos haces se califican de *homocéntricos*).

Después de atravesar un sistema óptico, los haces homocéntricos dejan en general de serlo, es decir, después de atravesar un cuerpo los rayos ya no se reunen en un mismo punto. Sólo en casos excepcionales los rayos que parten de un punto luminoso se cortan todos de nuevo en un punto después de atravesar un sistema óptico (la imagen del punto luminoso) †.

Se puede demostrar (véase § 57) que el único caso en que todos los haces homocéntricos se conservan estrictamente homocéntricos después del paso por un sistema óptico es aquel en que se da la identidad de imágenes, es decir, cuando el sistema óptico produce de todo objeto una imagen idéntica al mismo en forma y dimensiones (dicho de otra manera, cuando la imagen difiere del objeto tan sólo en su posición u orientación, o es su imagen especular).

Ningún sistema óptico puede dar así una imagen completamente definida de un objeto (que tenga dimensiones finitas) excepto en el caso trivial de identidad de imágenes††. Salvo en este caso, no es posible obtener imágenes completamente definidas de un cuerpo extenso, sino tan sólo aproximadamente.

El caso más importante de transición aproximada de haces homocéntricos a haces homocéntricos es aquél en que los haces son suficientemente estrechos (es decir, de haces con un pequeño ángulo de abertura) y pasan cerca de una línea determinada (característica del sistema óptico dado). Esta línea se llama *eje óptico* del sistema.

Sin embargo, hay que hacer notar que los haces de rayos, incluso los infinitamente estrechos (en el espacio tridimensional), no son en general homocéntricos; hemos visto (fig. 7) que, aun en un haz de este tipo, rayos diferentes se cortan en

---

† El punto de intersección puede estar situado sobre los propios rayos o sobre sus prolongaciones; en el primer caso la imagen se llama real, en el segundo virtual.

†† Este tipo de formación de imágenes se puede conseguir con un espejo plano.

puntos diferentes (este fenómeno se llama *astigmatismo*). Constituyen excepción los puntos de la superficie de onda en los que los dos rayos principales de curvatura son iguales — una pequeña región de la superficie en la vecindad de dichos puntos se puede considerar esférica y el correspondiente haz estrecho de rayos es homocéntrico.

Consideraremos sistemas ópticos que presentan simetría axil †. El eje de simetría del sistema es también su eje óptico. En efecto, la superficie de onda de un haz de rayos que marchan a lo largo de este eje posee también simetría axil; pero las superficies de rotación tienen sus radios de curvatura iguales en los puntos de intersección con el eje de simetría. Por consiguiente, un haz estrecho que marche en esta dirección se conserva homocéntrico.

Para obtener relaciones cuantitativas generales que determinen la formación de imágenes mediante haces estrechos que pasan por un sistema óptico con simetría axil, nos valdremos de las ecuaciones generales (55.6) determinando, ante todo, la forma de la función χ en el caso considerado.

Dado que los haces de rayos son estrechos y marchan cerca del eje óptico, los vectores $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ para cada haz coinciden casi con la dirección de dicho eje. Si elegimos el eje óptico como eje X, las componentes n_y, n_z, n'_y, n'_z serán pequeñas comparadas con la unidad. En cuando a las componentes n_x, n'_x, la $n_x \approx 1$ y n'_x puede ser igual aproximadamente a $+1$ o a -1. En el primer caso los rayos siguen su marcha casi en la dirección original, emergiendo en el espacio al otro lado del sistema óptico, que en este caso se llama *lente*. En el segundo caso, los rayos cambian su dirección casi hasta el punto de invertir el sentido; un sistema óptico de estas características se llama *espejo*.

Teniendo en cuenta la pequeñez de n_y, n_z, n'_y, n'_z, desarrollemos el iconal angular χ (n_y, n_z, n'_y, n'_z) en serie limitándonos a los primeros términos. Debido a la simetría axil de todo el sistema, χ debe ser invariante respecto de las rotaciones del sistema de coordenadas en torno del eje óptico. De ello se sigue, evidentemente, que en el desarrollo de χ no puede haber términos de primer orden, proporcionales a la primera potencia de las componentes y y z de los vectores $\mathbf{n}$ y $\mathbf{n}'$; dichos términos no poseerían la invariancia necesaria. Los términos de segundo orden que poseen dicha propiedad son los cuadrados $\mathbf{n}^2$ y $\mathbf{n}'^2$ y el producto escalar $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'$. Por consiguiente, hasta términos de segundo orden, el iconal angular de un sistema

† Se puede demostrar que el problema de la formación de imágenes mediante haces estrechos que pasan cerca del eje óptico en un sistema que no tenga simetría axil, se puede reducir a la formación de imágenes en un sistema con simetría axil seguida de una rotación de la imagen así obtenida con relación al objeto.

óptico con simetría axil es de la forma

$$\chi = \text{const} + \frac{g}{2}(n_y^2+n_z^2) + f(n_y n_y' + n_z n_z') + \frac{h}{2}(n_y'^2+n_z'^2), \tag{56.1}$$

donde f, g, h son constantes.

Para concretar, consideremos ahora una lente, de forma que podemos hacer $n_x' \simeq 1$; en el caso de un espejo, conforme veremos más adelante, todas las fórmulas son análogas. Substituyendo ahora la expresión (56.1) en las ecuaciones generales (55.6), se encuentra

$$\begin{aligned} n_y(x-g) - fn_y' &= y, \quad & fn_y + n_y'(x'+h) &= y', \\ n_z(x-g) - fn_z' &= z, \quad & fn_z + n_z'(x'+h) &= z'. \end{aligned} \tag{56.2}$$

Consideremos un haz homocéntrico que parte del punto x, y, z; sea x', y', z' el punto en el que se cortan todos los rayos del haz después de atravesar la lente. Si el primer par de ecuaciones (56.2) y el segundo fuesen independientes, estas cuatro ecuaciones determinarían, para valores dados de x, y, z, x', y', z', un conjunto de valores n_y, n_z, n_y', n_z', esto es, existiría sólo un rayo que partiera del punto x, y, z y que pasara luego por el punto x', y', z'. Para que todos los rayos que parten de x, y, z pasen por x', y', z' es necesario, por consiguiente, que las ecuaciones (56.2) no sean independientes, esto es, que un par de ellas sea consecuencia del otro. Condición necesaria para que así ocurra es que los coeficientes que aparecen en uno de los pares de ecuaciones sean proporcionales a los coeficientes del otro par. Debemos así tener:

$$\frac{x-g}{f} = -\frac{f}{x'+h} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}. \tag{56.3}$$

En particular,

$$(x-g)(x'+h) = -f^2. \tag{56.4}$$

Las ecuaciones que hemos obtenido proporcionan la relación buscada entre las coordenadas de la imagen y las del objeto en el caso de formación de imagen mediante haces estrechos.

Los puntos $x = g$ y $x' = -h$ del eje óptico se llaman *focos principales* del sistema óptico. Consideremos haces de rayos paralelos al eje óptico. El punto de partida de dichos rayos está, evidentemente, situado en el infinito del eje óptico, esto es, $x = \infty$. De (56.3) se sigue que en este caso $x' = -h$. Por consiguiente, un haz paralelo de rayos, después de pasar por un sistema óptico, se corta en un foco prin-

cipal. Recíprocamente, un haz de rayos que parte de un foco principal, pasa a ser un haz paralelo después de atravesar el sistema.

En las ecuaciones (56.3) las coordenadas x y x' se miden a partir del mismo origen, situado sobre el eje óptico. Sin embargo, es más cómodo medir las coordenadas del objeto y de la imagen a partir de orígenes diferentes, eligiéndo para ellos los correspondientes focos principales. Como sentido positivo de las coordenadas elegimos el sentido que va del foco correspondiente al lado determinado por la marcha del rayo. Representemos por letras mayúsculas las nuevas coordenadas del objeto y de la imagen, de forma que

$$X = x-g,\ X' = x'+h,\ Y = y,\ Y' = y',\ Z = z,\ Z' = z'.$$

Las ecuaciones de formación de la imagen (56.3) y (56.4) expresadas en las nuevas coordenadas toman la forma

$$XX' = -f^2, \tag{56.5}$$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z} = \frac{f}{X} = -\frac{X'}{f}. \tag{56.6}$$

La magnitud f se llama *longitud focal principal* del sistema.

La razón Y'/Y se llama *aumento lateral.* En cuanto al aumento longitudinal, dado que las coordenadas no son simplemente proporcionales entre sí, debe escribirse en forma diferencial, comparando la longitud de un elemento del objeto (a lo largo de la dirección del eje) con la longitud del elemento correspondiente de la imagen. De (56.5) se deduce para el *aumento longitudinal*

$$\left|\frac{dX'}{dX}\right| = \frac{f^2}{X^2} = \left(\frac{Y'}{Y}\right)^2. \tag{56.7}$$

Vemos, según esto, que incluso para un objeto infinitamente pequeño es imposible obtener una imagen geométricamente semejante. El aumento longitudinal no es nunca igual al transversal (salvo en el caso trivial de identidad de imágenes).

Un haz que pasa por el punto $X = f$ del eje óptico lo corta de nuevo en el punto $X' = -f$ del mismo eje; estos dos puntos se llaman *puntos principales.* De las ecuaciones (56.2) ($n_yX-fn'_y = Y$, $n_zX-fn'_z = Z$) se sigue que en este caso ($X = f$, $Y = Z = 0$) valen las igualdades $n_y = n'_y$, $n_z = n'_z$. Todo rayo que parte de un punto principal corta así de nuevo al eje óptico en el otro punto principal y la dirección de su marcha es paralela a su dirección inicial.

Si las coordenadas del objeto y de la imagen se miden a partir de los puntos principales (y no a partir de los focos principales), para las correspondientes coordenadas ξ y ξ' se tiene:

$$\xi' = X' + f, \quad \xi = X - f.$$

Substituyendo en (56.5), es fácil obtener las ecuaciones de formación de imagen en la forma

$$\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi'} = -\frac{1}{f}. \tag{56.8}$$

Se puede demostrar que en los sistemas ópticos de pequeño grosor (por ejemplo, un espejo o una lente delgada) los dos puntos principales casi coinciden. En este caso la ecuación (56.8) es particularmente cómoda, dado que en ella ξ y ξ' se miden prácticamente a partir del mismo punto.

Si la distancia focal es positiva, los objetos colocados delante del foco en el sentido de la marcha del rayo ($X>0$) tienen como imagen una imagen directa ($Y'/Y>0$); de estos sistemas se dice que son *convergentes*. Si, en cambio, $f<0$, para $X>0$ se tiene $Y'/Y<0$, esto es, la imagen del objeto aparece invertida; estos sistemas se califican de *divergentes*.

Existe un caso límite de formación de imágenes que no está contenido en las fórmulas (56.8); este caso se presenta cuando los tres coeficientes f, g, h son infinitos (es decir, cuando la distancia focal del sistema óptico es infinita y sus focos principales se encuentran en el infinito). Pasando al límite para f, g, h tendiendo a infinito en (56.4), se encuentra:

$$x' = \frac{h}{g}x + \frac{f^2 - gh}{g}.$$

Dado que tan sólo nos interesa el caso en que el objeto y la imagen están situados a distancia finita del sistema óptico, f, g, h deben tender a infinito de manera tal que las razones h/g, $(f^2-gh)/g$ se conserven finitas. Representando sus límites por α^2 y β, respectivamente, se tiene $x' = a^2x + \beta$. Para las otras dos coordenadas se deduce ahora de la ecuación general (56.7):

$$\frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = a.$$

Finalmente, midiendo de nuevo las coordenadas x y x' a partir de orígenes diferentes, a saber, a partir de un origen arbitrario sobre el eje y a partir de la imagen de este punto, respectivamente, obtenemos finalmente las ecuaciones de formación de imagen en la forma

$$X' = \alpha^2 X, \; Y' = \pm \alpha Y, \; Z' = \pm \alpha Z. \tag{56.9}$$

Los aumentos longitudinal y lateral son, pues, constantes (pero no iguales entre sí). Este caso de formación de imagen se llama *telescópico.*

Todas las ecuaciones, de la (56.5) a la (56.9), que hemos deducido para el caso de lentes, se aplican igualmente a los espejos, e incluso a un sistema óptico que carezca de simetría axil, con tal que la formación de la imagen se produzca mediante haces estrechos de rayos próximos al eje óptico. En este caso, las coordenadas-x del objeto y de la imagen deben contarse siempre a lo largo del eje óptico y a partir de puntos correspondientes (focos principales o puntos principales) en el sentido de propagación del rayo. Al aplicar esta norma no hay que olvidar que para un sistema óptico que no posea simetría axil, las direcciones del eje óptico delante y detrás del sistema no coinciden.

Problemas

1. Determinar la distancia focal en la formación de imágenes mediante dos sistemas ópticos con simetría axil cuyos ejes ópticos coinciden.

Solución. Sean f_1 y f_2 las distancias focales de los dos sistemas. Para cada sistema por separado tenemos:

$$X_1 X_1' = -f_1^2, \; X_2 X_2' = -f_2^2.$$

Dado que la imagen producida por el primer sistema actúa como objeto respecto del segundo, si llamamos l la distancia entre el foco principal posterior del primer sistema y el foco anterior del segundo, se tiene $X_2 = X_1' - l$; expresando X_2' en función de X_1, se obtiene

$$X_2' = \frac{X_1 f_2^2}{f_1^2 + l X_1}$$

o bien

$$\left(X_1 + \frac{f_1^2}{l}\right)\left(X_2' - \frac{f_2^2}{l}\right) = -\left(\frac{f_1 f_2}{l}\right)^2,$$

de lo que se sigue, evidentemente, que los focos principales del sistema compuesto están situados en los puntos $X_1 = -f_1^2/l$, $X_2' = f_2^2/l$ y que la distancia focal es:

$$f = -\frac{f_1 f_2}{l}$$

(para elegir el signo de esta expresión, hay que escribir la correspondiente ecuación del aumento lateral).

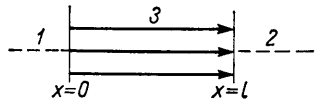

FIG. 8.

En el caso $l = 0$, la distancia focal $f = \infty$, esto es, el sistema compuesto proporciona una formación de imagen telescópica. En este caso tenemos $X_2' = X_1(f_2/f_1)^2$, es decir, el parámetro a en la fórmula general (56.9) es $a = f_2/f_1$.

2. Determinar la distancia focal, para partículas cargadas, de una « lente magnética » correspondiente a un campo uniforme longitudinal de longitud l (fig. 8) †.

Solución. La energía cinética de la partícula se conserva durante su movimiento en un campo magnético; por consiguiente, la ecuación de Hamilton-Jacobi para la acción reducida $S_0(\mathbf{r})$ (siendo la acción total $S = -\mathcal{E}t + S_0$) es:

$$\left(\nabla S_0 - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 = p^2,$$

donde

$$p^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - m^2c^2 = \text{const.}$$

Teniendo en cuenta la fórmula (19.4) para el potencial vector del campo magnético homogéneo, eligiendo el eje X en el sentido del campo y considerando este eje como eje óptico de un sistema óptico con simetría axil, obtenemos la ecuación de Hamilton-Jacobi en la forma:

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2 + \frac{e^2}{4c^2}H^2r^2 = p^2, \tag{1}$$

donde r es la distancia a partir del eje X y S_0 es una función de x y r.

Para haces estrechos de partículas que se propagan manteniéndose próximos al eje óptico, la coordenada r es pequeña, lo que nos permite intentar determinar S_0 en serie de potencias de r. Los dos primeros términos de esta serie son:

$$S_0 = px + \tfrac{1}{2}\sigma(x)r^2, \tag{2}$$

donde $\sigma(x)$ satisface la ecuación

$$p\sigma'(x) + \sigma^2 + \frac{e^2}{4c^2}H^2 = 0. \tag{3}$$

En la región 1 delante de la lente se tiene:

$$\sigma^{(1)} = \frac{p}{x - x_1},$$

† Este puede ser el campo en el interior de un solenoide largo, cuando se prescinde de la perturbación de la uniformidad del campo cerca de los extremos del mismo.

donde $x_1<0$ es una constante. Esta solución corresponde a un haz de partículas libres que parten formando rayos rectilíneos del punto $x = x_1$ situado sobre el eje óptico en la región *1*. En efecto, la función acción para el movimiento libre de una partícula con impulso p en el sentido que la aparta del punto $x = x_1$ es

$$S_0 = p\sqrt{r^2+(x-x_1)^2} \cong p(x-x_1)+\frac{pr^2}{2(x-x_1)}.$$

Análogamente, en la región *2*, detrás de la lente, se puede escribir:

$$\sigma^{(2)} = \frac{p}{x-x_2},$$

donde la constante x_2 es la coordenada de la imagen del punto x_1.

En la región *3*, dentro de la lente, la ecuación (3) se resuelve separando variables y nos da

$$\sigma^{(3)} = \frac{eH}{2c}\operatorname{ctg}\left(\frac{eH}{2cp}x+C\right),$$

donde C es una constante arbitraria.

La constante C y x_2 (para x_1 dado) están determinadas por la condición de continuidad de $\sigma(x)$ en $x = 0$ y $x = l$:

$$-\frac{p}{x_1} = \frac{eH}{2c}\operatorname{ctg} C, \quad \frac{p}{l-x_2} = \frac{eH}{2c}\operatorname{ctg}\left(\frac{eH}{2cp}l+C\right).$$

Eliminando la constante C entre estas ecuaciones, se encuentra

$$(x_1-g)(x_2+h) = -f^2,$$

donde †

$$g = \frac{2cp}{eH}\operatorname{ctg}\frac{eHl}{2cp}, \quad h = g-l,$$

$$f = \frac{2cp}{eH\operatorname{sen}\dfrac{eHl}{2cp}}.$$

§ 57. Formación de imágenes mediante haces anchos de rayos

La formación de imágenes mediante haces estrechos de rayos, que hemos examinado en el párrafo que precede, es aproximada, pero tanto más exacta (es decir, más definida) cuanto más estrechos son los haces. Pasemos ahora al problema de la formación de imágenes con haces de rayos de anchura cualquiera.

En contraste con la formación de una imagen de un objeto mediante haces estrechos, que se puede conseguir con un sistema óptico que presente simetría

† El valor de f se da con el signo correcto. Sin embargo, demostrarlo exige un análisis ulterior

axil, la formación de imágenes con haces anchos es sólo posible utilizando sistemas ópticos de estructura especial. Incluso con esta limitación, conforme se señaló en § 56, la formación de la imagen no es posible, ni de lejos, para todos los puntos del espacio.

Las conclusiones que seguirán se apoyan en la siguiente observación fundamental. Supongamos que todos los rayos que parten de un cierto punto O y que atraviesan el sistema óptico, se corten de nuevo en otro punto O'. Es fácil ver que la longitud de camino óptico ψ es la misma para todos estos rayos. En efecto, en la vecindad de cada uno de los puntos O, O' las superficies de onda correspondientes a los rayos que se cortan en ellos son esferas con centros en O y O', respectivamente, y cuando se aproximan a O y O' se reducen a estos puntos. Pero las superficies de onda son las superficies de fase constante y, por lo tanto, el cambio de fase a lo largo de rayos diferentes entre sus puntos de intersección con dos superficies de onda dadas es el mismo. De lo dicho se sigue que el cambio total de fase entre los puntos O y O' es el mismo (para los diferentes rayos).

Consideremos la condición que se debe cumplir para lograr la formación de una imagen de un pequeño segmento de recta utilizando haces anchos; la imagen es entonces también un segmento pequeño rectilíneo. Elijamos las direcciones de estos segmentos como direcciones de los ejes ξ y ξ', coincidiendo los orígenes con dos puntos correspondientes O y O' cualesquiera del objeto y de la imagen. Sea ψ la longitud de camino óptico para rayos que parten de O y llegan a O'. La longitud de camino óptico para los rayos que parten de un punto de coordenada $d\xi$ infinitamente próximo a O y llegan a un punto del espacio imagen de coordenada $d\xi'$, es $\psi+d\psi$, donde

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \psi}{\partial \xi'} d\xi'.$$

Introduzcamos el « aumento »

$$\alpha_\xi = \frac{d\xi'}{d\xi}$$

como razón de la longitud $d\xi'$ del elemento de la imagen a la longitud $d\xi$ del elemento del objeto. Debido a la pequeñez del segmento cuya imagen se forma, la cantidad α se puede considerar constante a lo largo del segmento. Haciendo, como de ordinario, $\partial\psi/\partial\xi = -n_\xi$, $\partial\psi/\partial\xi' = n'_\xi$ (n_ξ, n'_ξ son los cosenos de los ángulos formados por las direcciones del rayo y de los ejes correspondientes ξ y ξ'), se obtiene:

$$d\psi = (\alpha_\xi n'_\xi - n_\xi)\, d\xi.$$

Como para todo par de puntos correspondientes del objeto y de la imagen, la lon-

gitud de camino óptico $\psi+d\psi$ debe ser la misma para todos los rayos que parten del punto $d\xi$ y llegan al punto $d\xi'$. De aquí se sigue la condición:

$$\alpha_\xi n'_\xi - n_\xi = \text{const.} \tag{57.1}$$

Es esta la condición que buscábamos, condición que deben satisfacer los caminos de los rayos en un sistema óptico para conseguir la formación de la imagen de un pequeño segmento utilizando haces anchos. La relación (57.1) debe quedar satisfecha por todos los rayos que parten del punto O.

Apliquemos ahora esta condición a la formación de la imagen mediante un sistema óptico con simetría axil.

Consideremos primero la imagen de un segmento situado sobre el eje óptico (eje x); por razón de simetría, la imagen coincide también, claro está, con el eje. Un rayo que marcha a lo largo del eje óptico ($n_x = 1$), debido a la simetría axil del sistema no cambia su dirección después de atravesarlo, esto es, n'_x es también igual a 1. De aquí se sigue que la constante que aparece en (57.1) es igual en este caso a $\alpha_x - 1$ y podemos escribir (57.1) en la forma

$$\frac{1-n_x}{1-n'_x} = \alpha_x.$$

Llamando θ y θ' a los ángulos que forman los rayos con el eje óptico en puntos del objeto y de la imagen, se tiene:

$$1-n_x = 1-\cos\theta = 2\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}, \quad 1-n'_x = 1-\cos\theta' = 2\,\text{sen}^2\frac{\theta'}{2}.$$

Se obtiene así la condición de formación de imagen en la forma

$$\frac{\text{sen}\dfrac{\theta}{2}}{\text{sen}\dfrac{\theta'}{2}} = \text{const} = \sqrt{\alpha_x}. \tag{57.2}$$

Consideremos ahora la formación de la imagen de una pequeña parte de un plano perpendicular al eje óptico de un sistema con simetría axil; la imagen será también, evidentemente, perpendicular a este eje. Aplicando (57.1) a un segmento arbitrario situado en el plano cuya imagen se forma, se obtiene:

$$\alpha_r\,\text{sen}\theta' - \text{sen}\theta = \text{const},$$

donde θ y θ' son, como antes, los ángulos formados por el haz con el eje óptico. Para rayos que parten del punto de intersección del plano objeto con el eje óptico

y dirigidos a lo largo de este eje ($\theta = 0$), debe ser también, por simetría, $\theta' = 0$. La constante es, por consiguiente, igual a cero y obtenemos así la condición siguiente para la formación de imagen:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta'} = \text{const} = a_r. \tag{57.3}$$

En cuanto a la formación de una imagen de un objeto tridimensional valiéndose de haces anchos, es fácil ver que es imposible, incluso para volúmenes pequeños, dado que las condiciones (57.2) y (57.3) son incompatibles entre sí.

§ 58. Los límites de la óptica geométrica

De la definición de una onda plana monocromática se sigue que su amplitud es la misma en cualquier punto y en cualquier instante. Esta onda tiene una extensión infinita en todas las direcciones del espacio y existe para todo valor del tiempo, desde $-\infty$ a $+\infty$. Cualquier onda cuya amplitud no sea la misma en todo el espacio y en todo instante, sólo puede ser más o menos monocromática. Abordemos ahora la cuestión del *grado de no-monocromaticidad* de una onda.

Consideremos una onda electromagnética cuya amplitud en cada punto es una función del tiempo. Sea ω_0 una cierta frecuencia media de la onda. En estas condiciones, el campo de la onda, por ejemplo el campo eléctrico en un punto dado, es de la forma $\mathbf{E}_0(t)\, e^{-i\omega_0 t}$. Este campo, si bien no es, claro está, monocromático, se puede descomponer en ondas monocromática , esto es, se puede representar por una integral de Fourier. La amplitud de la componente en este desarrollo que corresponde a la frecuencia ω es proporcional a la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_0(t)\, e^{i(\omega-\omega_0)t}\, dt.$$

El factor $e^{i(\omega-\omega_0)t}$ es una función periódica del tiempo cuyo valor medio es igual a cero. Si $\mathbf{E}_0$ fuera exactamente constante, la integral sería rigurosamente nula para $\omega \neq \omega_0$. Si, sin embargo, $\mathbf{E}_0(t)$ es variable, pero apenas cambia en intervalos de tiempo del orden de $1/(\omega-\omega_0)$, la integral es casi igual a cero, y tanto más próxima a cero cuanto más lenta es la variación de $\mathbf{E}_0$. Para que la integral difiera apreciablemente de cero, es necesario que $\mathbf{E}_0(t)$ varíe apreciablemente en un intervalo de tiempo del orden de $1/(\omega-\omega_0)$.

Representemos por Δt el orden de magnitud del intervalo de tiempo durante el cual la amplitud de la onda en un punto dado del espacio cambia de manera apreciable. De las consideraciones que preceden se sigue ahora que las frecuencias

que más difieren de ω_0, y que aparecen con una cierta intensidad en la descomposición espectral de esta onda, están determinadas por la condición $1/(\omega-\omega_0)\sim \Delta t$. Por lo tanto, si se representa por $\Delta\omega$ el intervalo de frecuencias (en torno de la frecuencia media ω_0) en la descomposición espectral de la onda, tendremos la relación

$$\Delta\omega\,\Delta t \sim 1. \tag{58.1}$$

Vemos así que una onda es tanto más monocromática (es decir, $\Delta\omega$ es tanto más pequeña) cuanto mayor es Δt, es decir, cuanto más lenta es la variación de la amplitud en un punto dado del espacio.

Relaciones análogas a (58.1) se deducen fácilmente para el vector de onda. Sean Δx, Δy, Δz los órdenes de magnitud de las distancias a lo largo de los ejes X, Y, Z en las que la amplitud de onda cambia de manera apreciable. En un instante dado, el campo de la onda en función de las coordenadas es de la forma

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r})\,e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}},$$

donde $\mathbf{k}_0$ es un cierto valor medio del vector de onda. Siguiendo el mismo camino que condujo a (58.1), podemos hallar el intervalo $\Delta\mathbf{k}$ de valores que intervienen en la expresión de la onda como integral de Fourier:

$$\Delta k_x\,\Delta x \sim 1, \quad \Delta k_y\,\Delta y \sim 1, \quad \Delta k_z\,\Delta z \sim 1. \tag{58.2}$$

Consideremos, en particular, una onda emitida durante un intervalo finito de tiempo. Representemos por Δt el orden de magnitud de este intervalo. La amplitud en un punto dado del espacio cambia apreciablemente durante el tiempo Δt que corresponde al paso completo de la onda por este punto. Debido a las relaciones (58.1) podemos ahora decir que el « grado de no-monocromaticidad » de dicha onda, $\Delta\omega$, no puede en ningún caso ser menor que $1/\Delta t$ (puede, esto sí, ser mayor):

$$\Delta\omega \gtrsim \frac{1}{\Delta t}. \tag{58.3}$$

Análogamente, si Δx, Δy, Δz son los órdenes de magnitud de las dimensiones de la onda en el espacio, para la dispersión de los valores de las componentes del vector de onda que figuran en la descomposición de la misma se encuentra:

$$\Delta k_x \gtrsim \frac{1}{\Delta x}, \quad \Delta k_y \gtrsim \frac{1}{\Delta y}, \quad \Delta k_z \gtrsim \frac{1}{\Delta z}. \tag{58.4}$$

De estas fórmulas se sigue que si tenemos un haz de luz de anchura finita, la dirección de propagación de la luz en el mismo no puede ser rigurosamente cons-

tante. Tomando el eje X a lo largo de la dirección (media) de la luz en el haz, obtenemos

$$\theta_y \geqslant \frac{1}{k\Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y}, \tag{58.5}$$

donde θ_y es el orden de magnitud de la desviación del haz respecto de su desviación media en el plano XY, y λ es la longitud de onda.

Por otra parte, la fórmula (58.5) responde a la pregunta de cuál es el límite de definición en la formación de imágenes ópticas. Un haz de luz cuyos rayos, según la óptica geométrica, deberían cortarse en un mismo punto, proporciona en realidad una imagen, no en forma de punto, sino en forma de mancha. Para la anchura Δ de ésta se tiene, de acuerdo con (58.5),

$$\Delta \sim \frac{1}{k\theta} \sim \frac{\lambda}{\theta}, \tag{58.6}$$

donde θ es el ángulo de abertura del haz. Esta fórmula se puede aplicar no sólo a la imagen, sino también al objeto. Es decir, podemos afirmar que cuando se observa un haz de luz que parte de un punto luminoso, este punto no se puede distinguir de un cuerpo de dimensiones λ/θ. La fórmula (58.6) determina así el valor límite del *poder separador* de un microscopio. El valor mínimo de Δ, que se alcanza para $\theta \sim 1$, es λ, en completo acuerdo con el hecho de que el límite de la óptica geométrica está determinado por la longitud de onda de la luz.

PROBLEMA

Hallar el orden de magnitud de la anchura mínima de un haz luminoso producido por un haz paralelo a la distancia l de un diafragma.

Solución. Llamando d la abertura del diafragma, de (58.5) se sigue para el ángulo de desviación de los rayos (el « ángulo de difracción ») el valor $\sim \lambda/d$, de forma que la anchura del haz es del orden de $d+\frac{\lambda}{d}l$. El valor mínimo de esta cantidad es $\sim \sqrt{\lambda l}$.

§ 59. Difracción

Las leyes de la óptica geométrica son estrictamente correctas tan sólo en el caso ideal en que la longitud de onda se puede considerar infinitamente pequeña. Cuanto menos rigurosamente se cumpla esta condición, tanto mayores serán las desviaciones respecto de la óptica geométrica. Los fenómenos que son consecuencia de dichas desviaciones se llaman *fenómenos de difracción*.

Fenómenos de difracción se pueden observar, por ejemplo, si en el camino de propagación de la luz † existen obstáculos — cuerpos opacos (que llamaremos *pantallas*) de forma arbitraria — o bien, por ejemplo, si la luz pasa a través de agujeros practicados en pantallas opacas. Si las leyes de la óptica geométrica se cumplieran rigurosamente, más allá de las pantallas existirían regiones de *sombra* con límites bien definidos que las separarían de las regiones iluminadas. La difracción, en cambio, tiene como consecuencia que en vez de un límite bien definido entre luz y sombra, existe una complicada distribución de intensidad de la luz. Estos fenómenos de difracción se manifiestan tanto más cuanto menores son las dimensiones de las pantallas y de las aberturas en ellas, o cuanto mayor es la longitud de onda.

El problema que se plantea la teoría de la difracción consiste en determinar, para posiciones y formas dadas de los cuerpos (y posiciones dadas de los focos luminosos), la distribución de la luz, esto es, el campo electromagnético en todo el espacio. La solución exacta de este problema es sólo posible resolviendo la ecuación de las ondas con condiciones de contorno adecuadas en la superficie del cuerpo y dependientes, además, de las propiedades ópticas del material. Tal solución presenta de ordinario grandes dificultades matemáticas.

Sin embargo, existe un método aproximado que, en muchos casos, proporciona una solución satisfactoria del problema de la distribución de la luz cerca del límite entre luz y sombra. Este método es aplicable a los casos de pequeñas desviaciones respecto de la óptica geométrica. Con ello se supone, en primer lugar, que las dimensiones de todos los cuerpos son grandes comparadas con la longitud de onda (esta condición se aplica tanto a las dimensiones de pantallas y aberturas, como a las distancias de los cuerpos a los puntos de emisión y observación de la luz); en segundo lugar, que las desviaciones de la luz respecto de las direcciones definidas por los rayos de la óptica geométrica son pequeñas.

Consideremos una pantalla cualquiera con una abertura a través de la cual pasa la luz de focos dados. La figura 9 muestra la pantalla de perfil (línea de trazo lleno); la luz se propaga de izquierda a derecha. Representemos por u una cualquiera de las componentes de $\mathbf{E}$ o $\mathbf{H}$. Supondremos aquí que u es función sólo de las coordenadas, es decir, sin el factor $e^{-i\omega t}$ que determina la dependencia respecto del tiempo. Se trata de determinar la intensidad luminosa, esto es, el campo u, en un punto cualquiera de observación P más allá de la pantalla. Para llegar a una solución aproximada de este problema cuando las desviaciones respecto de la óptica geométrica son pequeñas, podemos suponer que en los puntos de la abertura el campo es el mismo que existiría en ausencia de la pantalla. Dicho de otra manera,

† En lo que sigue, al discutir la difracción hablaremos, para concretar, de difracción de la luz; todo lo que sigue vale también, claro está, para una onda electromagnética cualquiera.

los valores del campo son allí los que se siguen de la óptica geométrica. En todos los puntos inmediatamente detrás de la pantalla, el campo se puede suponer igual a cero. Las propiedades de la pantalla (es decir, del material que la forma) no representan en esto, evidentemente, ningún papel. Es también evidente que, en los casos considerados, para la difracción importa únicamente la forma de los bordes de la abertura, mientras carece de importancia la forma de la pantalla opaca.

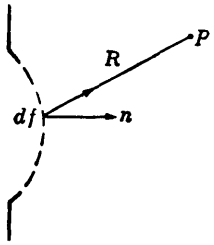

FIG. 9.

Introduzcamos una superficie que cubra la abertura de la pantalla y quede limitada por sus bordes (el perfil de una de estas superficies se indica en la fig. 9 con una línea de trazos). Descompongamos esta superficie en áreas parciales df, cuyas dimensiones sean pequeñas comparadas con el tamaño de la abertura, pero grandes comparadas con la longitud de onda de la luz. Podemos considerar entonces cada una de estas áreas a las que llega la luz como si, a su vez, fuera un foco de ondas luminosas que se propagan en todas direcciones a partir de ella. Consideraremos el campo en el punto P como resultante de la superposición de los campos producidos por todos los elementos df de la superficie que cubre la abertura *(principio de Huygens)*.

El campo producido en el punto P por el elemento df es evidentemente proporcional al valor u del campo en el propio elemento df (recordemos que el campo en df se supone igual al que existiría de no haber la pantalla). Además, es proporcional a la proyección df_n del área df sobre el plano perpendicular a la dirección **n** del rayo que va del foco luminoso a df. Esto último se deduce del hecho que cualquiera que sea la forma del elemento df, los mismos rayos pasarán por él con tal que su proyección df_n se mantenga constante, y, por consiguiente, su efecto sobre el campo en P será también el mismo.

El campo producido en el punto P por el elemento df resulta así proporcional a $u\,df_n$. Además, hemos de tener también en cuenta el cambio en la amplitud y en la fase de la onda durante su propagación desde df a P. La ley a que obedece este cambio está determinada por la fórmula (54.3). Por consiguiente, $u\,df_n$ debe multiplicarse aun por $\frac{1}{R}\,e^{ikR}$ (donde R es la distancia de df a P, y k es el módulo del

vector de onda de la luz), y se llega así a la conclusión de que el campo buscado es:

$$au\frac{e^{ikR}}{R}df_n,$$

donde a es una constante por el momento indeterminada. El campo en el punto P, en tanto que resultado de la suma de los campos producidos por todos los elementos df, es igual a

$$u_p = a\int u\frac{e^{ikR}}{R}df_n, \tag{59.1}$$

donde la integral se extiende a toda la superficie limitada por el borde de la abertura. En la aproximación que estamos considerando, esta integral no puede, naturalmente, depender de la forma de dicha superficie. La fórmula (59.1) es aplicable, claro está, no sólo a la difracción por una abertura en la pantalla, sino también a la difracción por una pantalla alrededor de la cual la luz pasa libremente. En este caso la superficie de integración en (59.1) se extiende en todas direcciones a partir del borde de la pantalla.

Para determinar la constante a, consideremos una onda plana que se propaga a lo largo del eje X; las superficies de onda son paralelas al plano YZ. Sea u el valor del campo en el plano YZ. En el punto P, que elegimos sobre el eje X, el campo es entonces igual a $u_p = ue^{ikx}$. Por otra parte, el campo en el punto P se puede determinar a partir de la fórmula (59.1), eligiendo como superficie de integración, por ejemplo, el plano YZ. Al efectuar la integración, y debido a la pequeñez del ángulo de difracción, sólo los puntos del plano YZ próximos al origen contribuyen de manera apreciable a la integral, es decir, los puntos para los que $y, z \ll x$ (x es la coordenada del punto P). Se tiene entonces

$$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \approx x + \frac{y^2+z^2}{2x},$$

y (59.1) nos da:

$$u_p = \frac{a}{x}\int_{-\infty}^{+\infty}\int ue^{ik\left(x+\frac{y^2+z^2}{2x}\right)}dy\,dz.$$

El valor de u es aquí constante (el campo en el plano YZ); en el factor $1/R$ podemos hacer $R \simeq x = \text{const}$. Por consiguiente,

$$u_p = au\frac{e^{ikx}}{x}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\,e^{ik\frac{y^2}{2x}}\int_{-\infty}^{+\infty}dz\,e^{ik\frac{z^2}{2x}}.$$

La substitución $y = \xi \sqrt{2x/k}$ reduce estas dos integrales a la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^2}\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \xi^2\, d\xi + i \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}^2 \xi\, d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i),$$

con lo que se obtiene:

$$u_p = aue^{ikx}\frac{2i\pi}{k}.$$

Por otra parte $u_p = ue^{ikx}$, y en consecuencia

$$a = \frac{k}{2\pi i}.$$

Substituyendo en (59.1), obtenemos la solución del problema propuesto en la forma

$$u_p = \int \frac{ku}{2\pi iR} e^{ikR}\, df_n. \tag{59.2}$$

Al deducir la fórmula (59.2), el foco luminoso se supuso, en esencia, puntual y se admitió que la luz era rigurosamente monocromática. Sin embargo, el caso de una fuente real, no puntual, que emite luz no monocromática, no exige un tratamiento especial. Debido a la completa independencia (incoherencia) de la luz emitida por puntos diferentes del foco y a la incoherencia de las diferentes componentes espectrales de la luz emitida, el resultado total de la difracción se reduce, simplemente, a la suma de las distribuciones de intensidad obtenidas a partir de la difracción de cada una de las componentes independientes de la luz.

Apliquemos la fórmula (59.2) a la resolución del problema del cambio de fase de un rayo al pasar por su punto de contacto con una cáustica (véase el final de § 54). Elijamos como superficie de integración en (59.2) una superficie de onda cualquiera y determinemos el campo u_p en el punto P que se encuentra sobre un rayo dado a una distancia x de su punto de intersección con la superficie de onda elegida (este punto se toma como origen de coordenadas O, y como plano YZ, el plano tangente a la superficie de onda en el punto O). Para la integral (59.2) sólo cuenta una pequeña porción de la superficie de onda en el entorno de O. Si los planos XY y XZ se eligen de forma que coincidan con los planos principales de curvatura de la superficie de onda en el punto O, cerca de este punto la ecuación de la superficie será:

$$X = \frac{y^2}{2R_1} + \frac{z^2}{2R_2},$$

donde R_1 y R_2 son los radios de curvatura. La distancia R del punto de coordenadas X,

y, z sobre la superficie de onda al punto P de coordenadas x, 0, 0 es:

$$R=\sqrt{(x-X)^2+y^2+z^2}\simeq x+\frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_1}\right)+\frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_2}\right).$$

Sobre la superficie de onda, el campo u se puede considerar constante; lo mismo vale para el factor $1/R$. Dado que sólo nos interesa el cambio de fase de la onda, prescindiremos del coeficiente y escribiremos simplemente,

$$u_p\sim\frac{1}{i}\int e^{ikR}\,df_n\simeq\frac{e^{ikx}}{i}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\,e^{ik\frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_1}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}dz\,e^{ik\frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_2}\right)}. \tag{59.3}$$

Los centros de curvatura de la superficie de onda se encuentran sobre el rayo considerado en los puntos $x=P_1$ y $x=R_2$; éstos son también los puntos de tangencia del rayo y la cáustica. Supongamos $R_2<R_1$. Para $x<R_2$, los coeficientes de i en las exponenciales que aparecen en los dos integrandos (en y y en z) son positivos y cada una de estas integrales es proporcional a $(1+i)$. Por consiguiente, en la parte del rayo anterior a la tangencia con la primera cáustica, tenemos $u_p\sim e^{ikx}$. Para $R_2<x<R_1$, esto es, en el segmento del rayo determinado por los dos puntos de tangencia, la integral relativa a y es proporcional a $1+i$, pero la integral respecto de z es proporcional a $1-i$, de manera que su producto no contiene el factor i. Tenemos así $u_p\sim -ie^{ikx}=e^{i\left(kx-\frac{\pi}{2}\right)}$, esto es, cuando el rayo pasa por la vecindad de la primera cáustica, su fase experimenta un cambio adicional de $-\pi/2$. Finalmente, para $x>R_1$, se tiene $u_p\sim -e^{ikx}=e^{i(kx-\pi)}$, esto es, al pasar por la vecindad de la segunda cáustica, la fase cambia una vez más en $-\pi/2$.

Problema

Determinar la distribución de la intensidad luminosa en la vecindad del punto en que el rayo es tangente a la cáustica.

Solución. Para resolver este problema utilizaremos la fórmula (59.2), extendiendo la integral que aparece en ella a una superficie de onda cualquiera suficientemente alejada del punto de tangencia del rayo y la cáustica. En la fig. 10, ab es una sección de esta superficie de onda, y $a'b'$ es

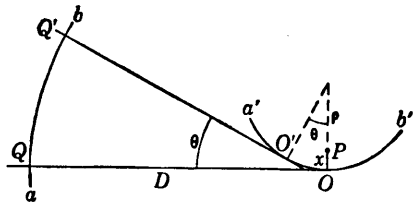

Fig. 10.

una sección de la cáustica; $a'b'$ es la evoluta de la curva ab. Se trata de hallar la distribución de intensidad en un entorno del punto O en el que el rayo QO es tangente a la cáustica; supondremos

que la longitud D del segmento QO de rayo es suficientemente grande. Llamemos x la distancia contada a partir del punto O a lo largo de la normal a la cáustica y tomemos como sentido positivo para los puntos sobre la normal el que apunta al centro de curvatura.

El integrando en (59.2) es una función de la distancia R desde el punto arbitrario Q' sobre la superficie de onda al punto P. De una conocida propiedad de la evoluta se sigue que la suma de la longitud del segmento $Q'O'$ de la tangente en el punto O' y la longitud del arco OO' es igual a la longitud QO de tangente en el punto O. Para puntos O y O' próximos entre sí, se tiene $OO' = \theta\varrho$ (ϱ es el radio de curvatura de la cáustica en el punto O). Por lo tanto, la longitud $Q'O' = D - \theta\varrho$. Pero la distancia $Q'O$ (en línea recta) es, aproximadamente (el ángulo θ se supone pequeño)

$$Q'O \cong Q'O' + \varrho \operatorname{sen}\theta = D - \theta\varrho + \varrho \operatorname{sen}\theta \cong D - \varrho\frac{\theta^3}{6}.$$

Finalmente, la distancia $R = Q'P \cong$ es igual a R $Q'O - x$ sen $\theta \cong Q'O - x\theta$, esto es,

$$R \cong D - x\theta - \tfrac{1}{6}\varrho\theta^3.$$

Substituyendo esta expresión en (59.2), se encuentra:

$$u_P \sim \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx\theta - i\frac{k\varrho}{6}\theta^3} d\theta = 2\int_0^{\infty} \cos\left(kx\theta + \frac{k\varrho}{6}\theta^3\right) d\theta$$

(el factor lentamente variable $1/R$ en el integrando carece de importancia frente al factor exponencial, por lo que lo suponemos constante). Introduciendo la nueva variable de integración $\xi = \left(\frac{k\varrho}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\theta$, obtenemos:

$$u_P \sim \Phi\left(x\sqrt[3]{\frac{2k^2}{\varrho}}\right),$$

donde $\Phi(t)$ es la función de Airy † . Para la intensidad $I \sim |u_P|^2$, haremos

$$I = 2A\left(\frac{2k^2}{\varrho}\right)^{\frac{1}{6}} \Phi^2\left(x\sqrt[3]{\frac{2k^2}{\varrho}}\right)$$

(en cuanto a la elección del factor constante, cf. más adelante).

Para valores positivos de x grandes, de la fórmula asintótica se deduce que

$$I \approx \frac{A}{2\sqrt{x}} \exp\left\{-\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3}\sqrt{\frac{2k^2}{\varrho}}\right\},$$

---

† Siguiendo a V. A. Fock (*Tablas de la función de Airy*, Moscú, 1946), definiremos la función de Airy $\Phi(t)$ por la relación

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\xi^3}{3} + \xi t\right) d\xi. \qquad (1)$$

es decir, la intensidad disminuye exponencialmente (región de « sombra »). Para grandes valores negativos de x, en cambio, tenemos,

$$I \approx \frac{2A}{\sqrt{-x}} \operatorname{sen}^2 \left\{ \frac{2(-x)^{\frac{3}{2}}}{3} \sqrt{\frac{2k^2}{\varrho}} + \frac{\pi}{4} \right\},$$

esto es, la intensidad oscila rápidamente; su valor medio en estas oscilaciones es:

$$\bar{I} = \frac{A}{\sqrt{-x}}.$$

De aquí se sigue claramente qué significa la constante A—es la intensidad que se obtendría lejos de la cáustica a partir de la óptica geométrica, sin tener en cuenta los efectos de difracción.

La función $\Phi(t)$ alcanza su máximo, 0,949, para $t = -1{,}02$; en correspondencia con ello, la máxima intensidad se alcanza en $x(2k^2/\varrho)^{\frac{1}{3}} = -1{,}02$, donde,

$$I = 2{,}03\, Ak^{\frac{1}{3}} \varrho^{-\frac{1}{6}}.$$

(en el propio punto de tangencia del rayo con la cáustica, $x = 0$, tenemos $I = 0{,}89\, Ak^{+\frac{1}{3}} \varrho^{-\frac{1}{6}}$, dado que $\Phi(0) = 0{,}629$).

En puntos próximos a la cáustica la intensidad resulta así proporcional a $k^{\frac{1}{3}}$, esto es, a $\lambda^{-\frac{1}{3}}$ (λ es la longitud de onda). Para $\lambda \to 0$, la intensidad tiende a infinito, como debe ser (véase § 54).

Véase, vol. III, Mecánica cuántica, § 6). Para grandes valores positivos del argumento, la expresión asintótica de $\Phi(t)$ es:

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{2t^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{2}{3} t^{3/2}}, \tag{2}$$

Para valores negativos de t grandes en valor absoluto, se tiene la fórmula :

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{(-t)^{\frac{1}{4}}} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}(-t)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4} \right), \tag{3}$$

esto es, $\Phi(t)$ oscila con una amplitud que es inversamente proporcional a $(-t)^{\frac{1}{4}}$.

La función de Airy está ligada con la función de MacDonald (función de Hankel modificada) de orden 1/3:

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{t}{3\pi}} K_{1/3}\left(\frac{2}{3} t^{3/2} \right) \tag{4}$$

La fórmula (2) corresponde a la expresión asintótica de las funciones $K_\nu(t)$:

$$K_\nu(t) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2t}}\, e - t$$

§ 60. Difracción de Fresnel

Si el foco luminoso y el punto P, en que determinamos la intensidad de la luz, se encuentran a distancias finitas de la pantalla, para determinar la intensidad en el punto P sólo cuentan los puntos situados en una pequeña región de la superficie de onda a la que se extiende la integral que aparece en (59.2) — la región que se encuentra cerca de la recta que une el foco y el punto P. En efecto, dado que las desviaciones respecto de la óptica geométrica son pequeñas, la intensidad de la luz que llega a P desde los diferentes puntos de la superficie de onda disminuye muy rápidamente cuando nos alejamos de dicha recta. Los fenómenos de difracción en los que tan sólo interviene una pequeña porción de la superficie de onda se llaman fenómenos de *difracción de Fresnel.*

Consideremos la difracción de Fresnel debida a una pantalla cualquiera. Conforme a lo que acabamos de indicar, en este caso tan sólo una pequeña región en el borde de la pantalla debe tenerse en cuenta (fijado P). Pero en regiones suficientemente pequeñas, el borde de la pantalla se puede siempre considerar recto. En lo que sigue, por consiguiente, entenderemos por borde de la pantalla un pequeño segmento rectilíneo.

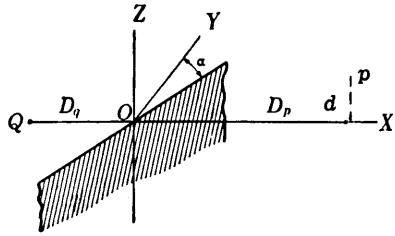

FIG. 11.

Elijamos como plano XY un plano que pase por el foco luminoso Q (fig. 11) y por la recta borde de la pantalla. El plano XZ se eligirá perpendicular a aquél y de forma que pase por el punto Q y por el punto de observación P en el que se trata de determinar la intensidad luminosa. Finalmente, eligiremos el origen de coordenadas O sobre el borde de la pantalla, con lo cual las posiciones de los tres ejes quedan completamente determinadas.

Sea D_q la distancia del foco luminoso Q al origen; llamemos D_p la coordenada-x del punto de observación P y d a su coordenada-z, es decir, su distancia al plano XY. Según la óptica geométrica, la luz sólo podría alcanzar puntos situados por encima del plano XY; la región por debajo de este plano, en cambio, es la región que, de acuerdo con la óptica geométrica, debería estar situada en la sombra (región de la sombra geométrica).

Determinemos ahora la distribución de la intensidad luminosa más allá de la pantalla y cerca del límite de la sombra geométrica, es decir, para valores pequeños de d (comparados con D_p y D_q). Un valor negativo de d significa que el punto P está situado en la región de la sombra geométrica.

Como superficie de integración eligiremos, en (59.2), el semiplano que pasa por el borde de la pantalla y es perpendicular al plano XY. Las coordenadas x, y de los puntos de esta superficie están ligadas por la ecuación $x = y \operatorname{tg} \alpha$ (α es el ángulo formado por el borde de la pantalla y el eje Y), y la coordenada z es positiva. El campo de la onda que parte del foco Q, a la distancia R_q del mismo, es proporcional al factor e^{ikR_q}. Por consiguiente, el campo u en la superficie de integración es proporcional a

$$u \sim \exp\{ik\sqrt{y^2+z^2+(D_q+y \operatorname{tg} \alpha)^2}\}.$$

En la integral (59.2) debemos ahora substituir, en vez de R,

$$R = \sqrt{y^2+(z-d)^2+(D_p-y \operatorname{tg} \alpha)^2}.$$

Los factores lentamente variables que figuran en el integrando carecen de importancia frente a la exponencial. Por consiguiente, podemos considerar $1/R$ constante, y escribir $dy\,dz$ en vez de df_n. Encontramos entonces que el campo en el punto P es:

$$u_p \sim \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} \exp\{ik(\sqrt{(D_q+y \operatorname{tg} \alpha)^2+y^2+z^2} + \sqrt{(D_p-y \operatorname{tg} \alpha)^2+(z-d)^2+y^2})\}\,dy\,dz. \qquad (60.1)$$

Conforme hemos dicho ya, la luz que llega al punto P procede principalmente de puntos del plano de integración que se encuentran en la vecindad de O. Por lo tanto, en la integral (60.1) sólo cuentan los valores de y y z que son pequeños (en comparación con D_q y D_p). Podemos escribir, pues,

$$\sqrt{(D_q+y \operatorname{tg} \alpha)^2+y^2+z^2} \simeq D+\frac{y^2 \sec^2\alpha+z^2}{2D_q}+y \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\sqrt{(D_p-y \operatorname{tg} \alpha)^2+(z-d)^2+y^2} \simeq D_p+\frac{(z-d)^2+ y^2 \sec^2\alpha}{2D_p}-y \operatorname{tg} \alpha.$$

Substituyamos este resultado en (60.1). Dado que tan sólo nos interesa el campo como función de la distancia d, podemos prescindir del factor $\exp\{ik(D_p+D_q)\}$; la integral respecto de y conduce también a una expresión que no contiene d, de manera que podemos prescindir también de ella. Se encuentra entonces:

$$u_p \sim \int_0^\infty \exp\left\{ik\left(\frac{1}{2D_q}z^2+\frac{1}{2D_p}(z-d)^2\right)\right\}dz.$$

Esta expresión se puede escribir también en la forma

$$u_p \sim \exp\left\{ik\frac{d^2}{2(D_p+D_q)}\right\}\int_0^\infty \exp\left\{ik\frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{D_p}+\frac{1}{D_q}\right)z-\frac{d}{D_p}\right]^2}{\frac{1}{D_p}+\frac{1}{D_q}}\right\}dz. \tag{60.2}$$

La intensidad luminosa está determinada por el cuadrado del campo, esto es, por el cuadrado del módulo $|u_p|^2$. Por consiguiente, al calcular la intensidad, el factor delante de la integral desaparece, ya que al multiplicarlo por la expresión conjugada compleja resulta como producto la unidad. Una substitución obvia reduce la integral a

$$u_p \sim \int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2}\,d\eta, \tag{60.3}$$

donde,

$$w = d\sqrt{\frac{kD_q}{2D_p(D_q+D_p)}}. \tag{60.4}$$

La intensidad I en el punto P es, pues,

$$I = \frac{I_0}{2}\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2}\,d\eta\right|^2 = \frac{I_0}{2}\left\{\left(C(w)+\frac{1}{2}\right)^2+\left(S(w)+\frac{1}{2}\right)^2\right\}, \tag{60.5}$$

donde,

$$C(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^w \cos\eta^2\,d\eta,\quad S(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^w \operatorname{sen}\,\eta^2\,d\eta$$

son las llamadas *integrales de Fresnel*. La fórmula (60.5) resuelve el problema de determinar la intensidad luminosa en función de d; la cantidad I_0 es la intensidad en la región iluminada en puntos suficientemente alejados del límite de la sombra, es decir, para $w \gg 1$ ($C(\infty) = S(\infty) = {}^1/_2$ en el límite para $w \to \infty$).

La región de sombra geométrica corresponde a valores negativos de w. Es fácil encontrar la forma asintótica de la función $I(w)$ para valores negativos de w grandes en valor absoluto. Para ello procederemos como sigue. Integrando por partes, tenemos

$$\int_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2}\,d\eta = -\frac{1}{2i\,|w|}e^{iw^2}+\frac{1}{2i}\int_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2}\frac{d\eta}{\eta^2}.$$

Integrando por partes una vez más el segundo miembro de la ecuación y repitiendo este proceso se obtiene un desarrollo en potencias de $1/|w|$:

$$\int_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2}\, d\eta = e^{iw^2}\left[-\frac{1}{2i\,|w|}+\frac{1}{4\,|w|^3}-\dots\right]. \tag{60.6}$$

Aunque una serie de este tipo no converge, sin embargo, y dado que los términos sucesivos disminuyen muy rápidamente para grandes valores de $|w|$, el primer término proporciona ya una buena representación de la función que aparece en el primer miembro para valores suficientemente grandes de $|w|$ (tales series se califican de *asintóticas)*. Para la intensidad $I(w)$, (60.5), obtenemos así la siguiente fórmula asintótica, válida para grandes valores negativos de w:

$$I=\frac{I_0}{4\pi w^2}. \tag{60.7}$$

Vemos, pues, que en la región de sombra geométrica, lejos de su límite, la intensidad tiende a cero en proporción inversa al cuadrado de la distancia a dicho límite.

Consideremos ahora valores positivos de w, esto es, la región por encima del plano XY. Hagamos

$$\int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2}\, d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta^2}\, d\eta - \int_{-\infty}^{-w} e^{i\eta^2}\, d\eta = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_{w}^{\infty} e^{i\eta^2}\, d\eta.$$

Para valores suficientemente grandes de w, podemos utilizar una representación asintótica de la integral que aparece en el segundo miembro de la ecuación, y tendremos:

$$\int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2}\, d\eta \cong (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2iw}\,e^{iw^2}. \tag{60.8}$$

Substituyendo esta expresión en (60.5), se obtiene:

$$I=I_0\left(1+\sqrt{\frac{1}{\pi}}\,\frac{\operatorname{sen}\left(w^2-\frac{\pi}{4}\right)}{w}\right). \tag{60.9}$$

En la región iluminada, lejos del límite de la sombra, la intensidad presenta así una sucesión infinita de máximos y mínimos, de manera que la razón I/I_0 oscila en torno de la unidad. A medida que aumenta w, la amplitud de estas oscilaciones disminuye en razón inversa de la distancia al borde de la sombra geométrica, y las posiciones de los máximos y mínimos tienden a acercarse entre sí con monotonía.

Para valores de w pequeños, la función $I(w)$ presenta cualitativamente el mismo carácter (fig. 12). En la región de sombra geométrica, la intensidad es función monótona decreciente de la distancia al límite de la sombra (sobre el propio límite, $I/I_0 = {}^1/_4$). Para w positivo, la intensidad presenta máximos y mínimos alternados. En el primer máximo, el mayor de todos, $I/I_0 = 1{,}37$.

§ 61. Difracción de Fraunhofer

De interés especial para las aplicaciones físicas son los fenómenos de difracción que ocurren cuando un haz plano paralelo de rayos incide sobre una pantalla. A consecuencia de la difracción, el haz deja de ser paralelo y parte de la luz se propaga en direcciones distintas de la inicial. Consideremos el problema de determinar la distribución, en las distintas direcciones, de la intensidad de la luz difractada a grandes distancias más allá de la pantalla (el problema así formulado corresponde a la *difracción de Fraunhofer*). Nos limitaremos aquí de nuevo al caso de pequeñas desviaciones respecto de la óptica geométrica, es decir, supondremos que los ángulos de desviación de los rayos respecto de la dirección inicial (los ángulos de difracción) son pequeños.

Este problema se podría resolver a partir de la fórmula general (59.2) pasando al límite cuando el foco luminoso y el punto de observación se encuentran a distancias infinitas de la pantalla. Un rasgo característico del caso que estamos considerando es que, en la integral que determina la intensidad de la luz difractada, interviene toda la superficie de onda a que se extiende la integral (en contraposición al caso de la difracción de Fresnel, en la que sólo cuentan las regiones de la superficie de onda situadas cerca del borde de las pantallas) †.

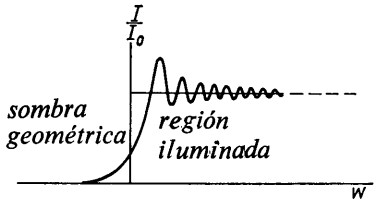

FIG. 12.

† Es fácil obtener los criterios correspondientes a las difracciones de Fresnel y Fraunhofer volviendo a la fórmula (60.2) y aplicándola, por ejemplo, a una rendija de anchura a (en vez de aplicarla al borde de una pantalla aislada). La integración respecto de z en (60.2) debe entonces extenderse entre los límites 0 y a. La difracción de Fresnel corresponde a la situación en que predomina el término que contiene z^2 en el exponente del integrando y el límite superior de la integral se puede substituir por ∞. Para que así ocurra, debemos tener

$$ka^2\left(\frac{1}{D_p}+\frac{1}{D_q}\right) \gg 1 .$$

Por el contrario, si se invierte el sentido de esta desigualdad, es posible prescindir del término z^2: a este caso corresponde la difracción de Fraunhofer.

Sin embargo, es más sencillo abordar de nuevo el problema, sin acudir a la fórmula general (59.2).

Representemos por u_0 el campo que existiría más allá de las pantallas si la óptica geométrica fuera rigurosamente válida. Este campo es una onda plana, pero su sección recta presenta ciertas regiones (correspondientes a la « sombra » de pantallas opacas) en las que el campo es igual a cero. Llamemos S la parte de la sección recta plana en la que el campo u_0 es diferente de cero; dado que cada uno de estos planos es una superficie de onda de la onda plana, $u_0 = \text{const}$ sobre toda la superficie S.

En realidad, sin embargo, una onda de sección recta limitada no puede ser rigurosamente plana (véase el § 58). En su desarrollo espacial de Fourier aparecen componentes con vectores de onda que tienen diferentes direcciones, y es éste precisamente el origen de la difracción.

Desarrollemos el campo u_0 en integral de Fourier de dos dimensiones respecto de las coordenadas y, z en el plano de la sección recta de la onda. Para las componentes de Fourier, se tiene:

$$u_{\mathbf{q}} = \int\int_S u_0 e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\, dy\, dz, \tag{61.1}$$

donde los vectores $\mathbf{q}$ son vectores constantes en el plano YZ; la integración se extiende en realidad tan sólo a aquella región S del plano YZ en la que u_0 es diferente de cero. Si $\mathbf{k}$ es el vector de onda de la onda incidente, a la componente del campo $u_{\mathbf{q}}\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ corresponde el vector de onda $\mathbf{k}' = \mathbf{k}+\mathbf{q}$. El vector $\mathbf{q} = \mathbf{k}'-\mathbf{k}$ determina así el cambio que experimenta el vector de onda de la luz en la difracción. Dado que los valores absolutos $k = k' = \omega/c$, los ángulos pequeños de difracción θ_y, θ_z en los planos XY y XZ están ligados con las componentes del vector $\mathbf{q}$ por las ecuaciones

$$q_y = \frac{\omega}{c}\theta_y, \qquad q_z = \frac{\omega}{c}\theta_z. \tag{61.2}$$

Para pequeñas desviaciones respecto de la óptica geométrica, las componentes del desarrollo del campo u_0 se pueden considerar coincidentes con las componentes del campo real de la luz difractada, de manera que la fórmula (61.1) resuelve el problema.

La distribución de intensidad de la luz difractada viene dada por el cuadrado $|u_{\mathbf{q}}|^2$ en función del vector $\mathbf{q}$. La relación cuantitativa con la intensidad de la luz

incidente se traduce en la fórmula

$$\int\int u_0^2\, dy\, dz = \int\int |u_{\mathbf{q}}|^2 \frac{dq_y\, dq_z}{(2\pi)^2} \tag{61.3}$$

[cf. (49.8)]; el coeficiente $(2\pi)^2$ aparece aquí en vez del factor 2π en (49.8) dado que se trata de un desarrollo bidimensional. Vemos así que la intensidad relativa difractada en el ángulo sólido $do = d\theta_y\, d\theta_z$ es:

$$\frac{|u_{\mathbf{q}}|^2}{u_0^2} \frac{dq_y\, dq_z}{(2\pi)^2} = \left(\frac{\omega}{2\pi c}\right)^2 \left|\frac{u_{\mathbf{q}}}{u_0}\right|^2 do. \tag{61.4}$$

Consideremos la difracción de Fraunhofer provocada por dos pantallas « complementarias »: la primera pantalla presenta aberturas donde la segunda es opaca, y recíprocamente. Representemos por $u^{(1)}$ y $u^{(2)}$ el campo de la luz que se difracta en estas pantallas (para igual luz incidente en ambos casos). Dado que $u_{\mathbf{q}}^{(1)}$ y $u_{\mathbf{q}}^{(2)}$ se expresan por las integrales (61.1) extendidas a las superficies de las aberturas en las pantallas, y dado que dichas superficies se complementan entre sí, de manera que entre las dos equivalen a todo el plano, la suma $u_{\mathbf{q}}^{(1)} + u_{\mathbf{q}}^{(2)}$ es la componente de Fourier del campo obtenida en ausencia de las pantallas, es decir, no es sino la luz incidente. Pero la luz incidente es una onda rigurosamente plana con dirección de propagación bien definida, de manera que $u_{\mathbf{q}}^{(1)} + u_{\mathbf{q}}^{(2)} = 0$ para todo valor no nulo de $\mathbf{q}$. Tenemos así $u_{\mathbf{q}}^{(1)} = -u_{\mathbf{q}}^{(2)}$, o bien, para las correspondientes intensidades,

$$|u_{\mathbf{q}}^{(1)}|^2 = |u_{\mathbf{q}}^{(2)}|^2 \text{ para } \mathbf{q} \neq 0. \tag{61.5}$$

Esto significa que dos pantallas complementarias dan la misma distribución de intensidad de la luz difractada (éste es el llamado *principio de Babinet*).

Hay que recordar aquí una consecuencia interesante del principio de Babinet. Consideremos un cuerpo negro cualquiera, es decir, un cuerpo que absorbe completamente la luz que cae sobre él. De acuerdo con la óptica geométrica, cuando se ilumina un cuerpo de estas características, se produce tras él una región de sombra geométrica, cuya sección transversal tiene una área igual al área del cuerpo en la orientación perpendicular a la dirección de incidencia de la luz. Sin embargo, la presencia de difracción hace que la luz que pasa cerca del cuerpo se vea en parte desviada de su dirección inicial. En consecuencia, a grandes distancias detrás del cuerpo no existirá sombra completa, sino que, además de la luz que se propaga en la dirección original, habrá también una cierta cantidad de luz que se propaga formando pequeños ángulos con dicha dirección. Es fácil determinar la intensidad de esta luz dispersada. Para ello, nótese que, de acuerdo con el principio de Babinet, la cantidad de luz desviada a causa de la difracción por el cuerpo considerado, es igual a la cantidad de luz que hubiera sido desviada por difracción debida a una abertura practicada en una pantalla opaca, abertura cuya forma y tamaño fueran

iguales a la sección recta del cuerpo. Pero en la difracción de Fraunhofer debida a una abertura, toda la luz que pasa por ella se ve desviada. De aquí se sigue que la cantidad total de luz dispersada por un cuerpo negro es igual a la cantidad de luz que cae sobre su superficie y es absorbida por ella.

PROBLEMAS

1. Determinar la difracción de Fraunhofer de una onda plana que incide normalmente sobre una rendija infinita de lados paralelos (de anchura $2a$) practicada en una pantalla opaca.

Solución. Elijamos el plano de la rendija como plano YZ, con el eje Z a lo largo de la misma (la fig. 13 representa un corte de la pantalla). Para la luz que incide normalmente, el plano de la rendija es una de las superficies de onda y lo eligiremos como superficie de integración en (61.1). Dado que la rendija es infinitamente larga, la luz se desvía solamente en el plano XY (la integral (61.1) se anula para $q_z \neq 0$).

Por consiguiente, el campo u_0 debe desarrollarse tan sólo respecto de la coordenada y:

$$u_q = u_0 \int_{-a}^{a} e^{-iqy}\, dy = \frac{2u_0}{q} \operatorname{sen} qa.$$

La intensidad de la luz difractada en el intervalo angular $d\theta$ es:

$$dI = \frac{I_0}{2a} \left| \frac{u_q}{u_0} \right|^2 \frac{dq}{2\pi} = \frac{I_0}{\pi ak} \frac{\operatorname{sen}^2 ka\theta}{\theta^2}\, d\theta,$$

donde $k = \omega/c$, e I_0 es la intensidad total de la luz incidente sobre la rendija.

Como función del ángulo de difracción, $dI/d\theta$ tiene la forma indicada en la fig. 14. Cuando θ aumenta, en uno u otro sentido, a partir de $\theta = 0$, la intensidsd pasa por una serie de máximos de altura rápidamente decreciente. Los máximos sucesivos están separados por mínimos en los puntos $\theta = n\pi/ka$ (donde n es un entero), mínimos en los que la intensidad se reduce a cero.

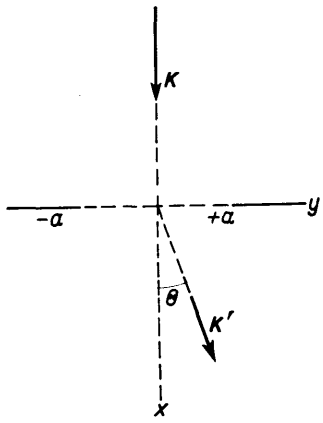

FIG. 13.

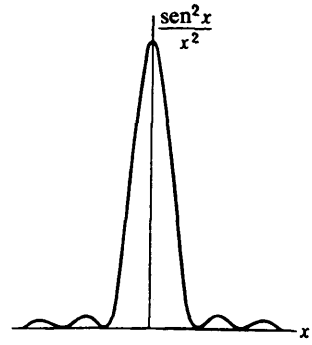

FIG. 14.

2. Calcular la difracción de Fraunhofer por una red de difracción, es decir, por una pantalla plana en la que se ha practicado una serie de rendijas paralelas idénticas (anchura de las rendijas, $2a$; anchura de la pantalla opaca entre dos rendijas consecutivas, $2b$; número de rendijas, N).

Solución. Elijamos el plano de la red como plano YZ, con el eje Z paralelo a las rendijas. La difracción se produce sólo en el plano XY y la integración de (61.1) nos da:

$$u_q = u_q' \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2inqd} = u_q' \frac{1-e^{-2iNqd}}{1-e^{-2iqd}},$$

donde $d = a+b$ y u_q' es el resultado de la integración en una sola rendija. Teniendo en cuenta los resultados del problema 1, se obtiene:

$$dI = \frac{I_0 a}{N\pi}\left(\frac{\operatorname{sen} Nqd}{\operatorname{sen} qd}\right)^2\left(\frac{\operatorname{sen} qa}{qa}\right)^2 dq = \frac{I_0}{N\pi ak}\left(\frac{\operatorname{sen} Nk\theta d}{\operatorname{sen} k\theta d}\right)^2 \frac{\operatorname{sen}^2 ka\theta}{\theta^2}\, d\theta$$

(I_0 es la intensidad total de la luz que pasa a través de todas las rendijas).

En el caso de un gran número de rendijas ($N\to\infty$), esta fórmula se puede escribir en otra forma. Para valores $q = \pi n/d$ (donde n es un entero), dI/dq presenta máximos; cerca de uno de estos máximos (es decir, para $qd = n\pi+\varepsilon$, con ε pequeño),

$$dI = I_0 a\left(\frac{\operatorname{sen} qa}{qa}\right)^2 \frac{\operatorname{sen}^2 N\varepsilon}{\pi N\varepsilon^2}\, dq.$$

Pero para $N\to\infty$ tenemos la fórmula †:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 Nx}{\pi N x^2} = \delta(x).$$

En la vecindad de cada máximo se tiene, por consiguiente,

$$dI = I_0 \frac{a}{d}\left(\frac{\operatorname{sen} qa}{qa}\right)^2 \delta(\epsilon)\, d\epsilon,$$

es decir, en el límite las anchuras de los máximos son infinitamente estrechas y la intensidad total de la luz en el n-ésimo máximo es:

$$I^{(n)} = I_0 \frac{d}{\pi^2 a} \frac{\operatorname{sen}^2 (n\pi a/d)}{n^2}.$$

3. Determinar la distribución de la intensidad en las distintas direcciones para la difracción de la luz que incide normalmente sobre el plano de una abertura circular de radio a.

---

† Para $x \neq 0$ la función que aparece en el primer miembro de la igualdad se reduce a cero, mientras que de acuerdo con una conocida fórmula de la teoría de las series de Fourier,

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} f(x)\frac{\operatorname{sen}^2 Nx}{Nx^2}\, dx\right) = f(0).$$

De aquí se sigue que las propiedades de esta función coinciden, en realidad, con las de la función-δ (véase la nota en la pág. 98).

Solución. Introduzcamos coordenadas cilíndricas z, r, ϕ de modo que el eje Z pase por el centro de la abertura y sea perpendicular a su plano. Es obvio que la difracción resulta simétrica respecto del eje Z, de manera que el vector $\mathbf{q}$ tiene sólo componentes radiales $q_r = q = k\theta$. Midiendo el ángulo ϕ a partir de la dirección $\mathbf{q}$ e integrando (61.1) en el plano de la abertura, se encuentra:

$$u_q = u_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-iqr\cos\phi}\, r\, d\phi\, dr = 2\pi u_0 \int_0^a J_0(qr) r\, dr,$$

donde J_0 es la función de Bessel de orden cero. Teniendo en cuenta la conocida fórmula

$$\int_0^a J_0(qr) r\, dr = \frac{a}{q} J_1(aq),$$

se tendrá entonces;

$$u_q = \frac{2\pi u_0 a}{q} J_1(aq),$$

y de acuerdo con (61.4) se encuentra para la intensidad de la luz difractada en el elemento de ángulo sólido do:

$$dI = I_0 \frac{J_1^2(ak\theta)}{\pi\theta^2} do,$$

donde I_0 es la intensidad total de la luz que incide sobre la abertura.

CAPÍTULO 8

EL CAMPO DE CARGAS EN MOVIMIENTO

§ 62. Potenciales retardados

En el capítulo 5 se estudió el campo constante producido por cargas en reposo, y en el capítulo 6 el campo variable, pero en ausencia de cargas. Pasemos ahora al estudio de los campos variables cuando existen cargas en movimiento cualquiera.

Veamos cuáles son las ecuaciones que determinan los potenciales de un campo electromagnético arbitrario. Es conveniente deducirlas en forma cuadridimensional, repitiendo el razonamiento llevado a cabo al final del § 46, con la única diferencia que hay que utilizar las ecuaciones de Maxwell (30.2)

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i$$

con segundo miembro distinto de cero. Este mismo segundo miembro aparece también en la ecuación (46.8), y después de imponer a los potenciales la ecuación de Lorentz

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = 0, \text{ es decir, } \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \tag{62.1}$$

obtendremos

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^i. \tag{62.2}$$

Es ésta la ecuación que determina los potenciales de un campo electromagnético arbitrario. En forma tridimensional se descompone en dos ecuaciones, una para $\mathbf{A}$ y otra para ϕ:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{62.3}$$

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\varrho. \tag{62.4}$$

Para campos constantes, estas ecuaciones se reducen a las ya conocidas ecuaciones

(36.4) y (43.4), y para campos variables sin cargas, a la ecuación de las ondas homogénea.

Como es sabido, la solución de las ecuaciones lineales no homogéneas (62.3) y (62.4) se puede representar como suma de la solución de estas ecuaciones sin segundo miembro y una integral particular de las mismas con segundo miembro. Para encontrar la solución particular, dividiremos todo el espacio en regiones infinitamente pequeñas y determinaremos el campo producido por las cargas situadas en uno de estos elementos de volumen. Debido al carácter lineal de las ecuaciones del campo, el campo real será la suma de los campos producidos por todos dichos elementos.

La carga *de* en un elemento de volumen dado es, en general, una función del tiempo. Si elegimos el origen de coordenadas en el elemento de volumen considerado, la densidad de carga es $\varrho = de(t)\ \delta(\mathbf{R})$, donde $\mathbf{R}$ es el vector distancia desde el origen de coordenadas. Hay que resolver así la ecuación

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -4\pi\, de(t)\ \delta(\mathbf{R}). \tag{62.5}$$

En todo el espacio, excepto en el origen, $\delta(\mathbf{R}) = 0$, y tenemos la ecuación

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0. \tag{62.6}$$

Es claro que, en el caso que estamos considerando, ϕ presenta simetría esférica, es decir, es función sólo de R. Por consiguiente, si escribimos el operador de Laplace en coordenadas esféricas, (62.8) se transforma en

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\phi}{\partial R}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0.$$

Para resolver esta ecuación, hagamos la substitución $\phi = \chi(R, t)/R$. Se obtiene entonces para χ

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0.$$

Pero ésta es la ecuación de las ondas planas, cuya solución es de la forma (véase § 47):

$$\chi = f_1\left(t - \frac{R}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{R}{c}\right).$$

Dado que de esta ecuación queremos tan sólo una solución particular, es suficiente elegir una de las funciones f_1 y f_2. Por lo general, resulta conveniente tomar $f_2 = 0$ (en relación con esto, véase más adelante). En estas condiciones, en todo el

espacio, salvo en el origen, ϕ tiene la forma

$$\phi = \frac{\chi\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}. \tag{62.7}$$

Hasta aquí la función χ es arbitraria; elijámosla ahora de manera que se obtenga el valor correcto del potencial también en el origen. Dicho de otro modo, hemos de elegir χ de manera que, en el origen, quede satisfecha la ecuación (62.5). Esto es fácil de conseguir observando que cuando $R \to 0$, el propio potencial tiende a infinito y, por lo tanto, sus derivadas respecto de las coordenadas aumentan más rápidamente que su derivada respecto del tiempo. En consecuencia, cuando $R \to 0$ podemos prescindir del término $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$ frente a $\Delta\phi$ en la ecuación (62.5). Ésta se transforma entonces en la ecuación ya conocida (36.7), que conduce a la ley de Coulomb. Por lo tanto, cerca del origen (62.9) debe reducirse a la ley de Coulomb, de lo que se sigue que $\chi(t) = de(t)$, esto es,

$$\phi = \frac{de\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}.$$

De aquí es fácil deducir la solución de la ecuación (62.4) para una distribución arbitraria de cargas $\varrho\ (x, y, z, t)$. Para ello basta hacer $de = \varrho\, dV$ (dV es el elemento de volumen) e integrar en todo el espacio. A la solución así obtenida de la ecuación no homogénea (62.4) podemos sumar todavía la solución ϕ_0 de la misma ecuación sin segundo miembro. La solución general tiene así la forma:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{1}{R}\varrho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) dV' + \phi_0, \tag{62.8}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad dV' = dx'\, dy'\, dz',$$

donde $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}' = (x', y', z')$; R es la distancia desde el elemento de volumen dV al « punto de observación » en el que determinamos el potencial. Escribiremos esta expresión abreviadamente en la forma

$$\phi = \int \frac{\varrho_{t-(R/c)}}{R}\, dV + \phi_0, \tag{62.9}$$

donde el subíndice $t - \frac{R}{c}$ significa que la cantidad ϱ debe tomarse en el instante

$t-\frac{R}{c}$ y se ha prescindido del apóstrofo en dV.

Para el potencial vector tenemos, análogamente:

$$\mathbf{A}=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}_{t-(R/c)}}{R}\,dV+\mathbf{A}_0, \tag{62.10}$$

donde $\mathbf{A}_0$ es la solución de la ecuación (62.3) sin segundo miembro.

Los potenciales (62.9) y (62.10) (sin ϕ_0 ni $\mathbf{A}_0$) se llaman *potenciales retardados.*

En el caso de cargas en reposo (es decir, cuando la densidad ϱ es independiente del tiempo), la fórmula (62.9) se reduce a la ya conocida fórmula (36.8) correspondiente al campo electrostático; en el caso de movimiento estacionario de las cargas, la fórmula (62.10), después de tomar valores medios, se convierte en la fórmula (43.5) para el potencial vector de un campo magnético constante.

$\mathbf{A}_0$ y ϕ_0 en (62.9) y (62.10) se determinan de manera que se cumplan las condiciones del problema. Para ello basta, evidentemente, dar las condiciones iniciales, esto es, fijar los valores del campo en un instante inicial. Sin embargo, por lo general no se trata de condiciones iniciales. En vez de éstas se imponen de ordinario las condiciones a grandes distancias del sistema de cargas para todo valor del tiempo. Por ejemplo, se nos puede decir qué radiación incide sobre el sistema desde el exterior. En estas condiciones, el campo que resulta de la interacción de esta radiación con el sistema sólo puede diferir del campo exterior en la radiación originada por el propio sistema. Esta última radiación, a gran distancia, debe tener la forma de ondas que se propagan a partir del sistema, esto es, en el sentido de los valores crecientes de R. Pero esta condición queda satisfecha precisamente por los potenciales retardados. Estas soluciones, pues, representan el campo producido por el sistema, mientras que ϕ_0 y $\mathbf{A}_0$ deben igualarse al campo exterior que actúa sobre el mismo.

§ 63. Los potenciales de Lienard-Wiechert

Determinemos los potenciales del campo creado por una carga puntual que efectúa un movimiento dado según la trayectoria $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0(t)$.

De acuerdo con las fórmulas de los potenciales retardados, el campo en el punto de observación $P(x, y, z)$ en el instante t viene determinado por el estado de movimiento de la carga en un instante anterior t', tal que el tiempo de propagación de una señal luminosa desde el punto en que se encuentra la carga $\mathbf{r}_0(t')$ al punto de observación P coincide precisamente con la diferencia $t-t'$. Sea $\mathbf{R}(t)=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)$ el

vector posición de origen en la carga e y extremo en el punto P; junto con $\mathbf{r}_0(t)$ es una función dada del tiempo. En estas condiciones, el instante t' viene determinado por la ecuación

$$t' + \frac{R(t')}{c} = t, \tag{63.1}$$

Para cada valor de t esta ecuación tiene una sola raíz t' †.

En el sistema de referencia en el cual la partícula se encuentra en reposo en el instante t', el campo en el punto de observación en el instante t viene dado simplemente por el potencial de Coulomb, es decir

$$\phi = \frac{e}{R(t')}, \qquad \mathbf{A} = 0, \tag{63.2}$$

Las expresiones de los potenciales en un sistema de referencia arbitrario, se pueden obtener directamente determinando un cuadrivector que para $\mathbf{v} = 0$ coincida con las expresiones que acabamos de dar para ϕ y $\mathbf{A}$. Observando que ϕ, (63.2), se puede escribir también en la forma

$$\phi = \frac{e}{c(t-t')}$$

[de acuerdo con (63.1)], se encuentra que el cuadrivector buscado es:

$$A^i = e\frac{u^i}{R_k u^k}, \tag{63.3}$$

donde u^i es la cuadrivelocidad de la carga y R^k es el cuadrivector $R^k = [c(t - t'), \mathbf{r} - \mathbf{r}']$, donde x', y', z', t', están ligadas entre sí por la ecuación (63.1), que en forma cuadridimensional se escribe

$$R_k R^k = 0 \tag{63.4}$$

---

† Esta circunstancia es de suyo bastante clara, pero cabe comprobar que así ocurre también directamente. Para ello elijamos el punto de observación P y el instante de observación t como origen O de un sistema de coordenadas cuadridimensional y construyamos el cono de luz (§ 2) de vértice en O. La hoja inferior de este cono, que limita al dominio del pasado absoluto (con relación al suceso O), es el lugar geométrico de los puntos de universo tales que una señal emitida desde ellos alcanza el punto O. Por otra parte, los puntos de intersección de esta hipersuperficie con la línea de universo del movimiento de la carga corresponden a las raíces de la ecuación (63.1). Pero dado que la velocidad de una partícula es siempre menor que la velocidad de la luz, su línea de universo tiene en todos sus puntos menor inclinación respecto del eje del tiempo que la inclinación del cono de luz. De aquí se sigue precisamente que la línea de universo de la partícula puede cortar a la hoja inferior del cono de luz tan sólo en un punto.

Pasando ahora de nuevo a la notación tridimensional, para los potenciales del campo producido por una carga puntual en movimiento arbitrario se obtienen las siguientes expresiones:

$$\phi = \frac{e}{\left(R - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}}{c}\right)}, \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{c\left(R - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}}{c}\right)}, \tag{63.5}$$

donde $\mathbf{R}$ es el vector posición con origen en el punto donde se encuentra la carga y extremo en el punto de observación P, y todas las cantidades que aparecen en los segundos miembros de las ecuaciones deben calcularse para el instante t' determinado por (63.1). Los potenciales del campo, en la forma (63.5), se llaman *potenciales de Lienard-Wiechert.*

Para calcular las intensidades de los campos eléctrico y magnético a partir de las fórmulas

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\phi, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A},$$

hay que derivar ϕ y $\mathbf{A}$ respecto de las coordenadas x, y, z del punto y del tiempo t de observación. Pero las fórmulas (63.5) dan los potenciales como funciones de t', y sólo mediante la relación (63.1) como funciones implícitas de x, y, z, t. Por lo tanto, para calcular dichas derivadas hemos de calcular primero las derivadas de t'. Derivando la relación $R(t') = c(t - t')$ respecto de t, tenemos

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{R}\frac{\partial t'}{\partial t} = c\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right).$$

(el valor de $\partial R/\partial t'$ se obtiene derivando la identidad $R^2 = \mathbf{R}^2$ y substituyendo $\partial\mathbf{R}(t')\partial t' = -\mathbf{v}(t')$; el signo negativo aparece aquí debido a que $\mathbf{R}$ es el vector posición de P respecto de la carga e, y no al revés). Tenemos así,

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}}{Rc}}. \tag{63.6}$$

Análogamente, derivando la misma relación respecto de las coordenadas, se encuentra:

$$\operatorname{grad} t' = -\frac{1}{c}\operatorname{grad} R(t') = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial R}{\partial t'}\operatorname{grad} t' + \frac{\mathbf{R}}{R}\right),$$

de donde

$$\operatorname{grad} t' = -\frac{\mathbf{R}}{c\left(R-\dfrac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)}. \tag{63.7}$$

Con ayuda de estas fórmulas, no hay dificultad ninguna en calcular los campos **E** y **H**. Prescindiendo de los cálculos intermedios, he aquí los resultados finales

$$\mathbf{E} = e\frac{1-\dfrac{v^2}{c^2}}{\left(R-\dfrac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^3}\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{v}}{c}R\right)+\frac{e}{c^2\left(R-\dfrac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^3}\mathbf{R}\times\left\{\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{v}}{c}R\right)\times\dot{\mathbf{v}}\right\}, \tag{63.8}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{R}\mathbf{R}\times\mathbf{E}. \tag{63.9}$$

Se ha hecho aquí $\dot{\mathbf{v}} = \partial\mathbf{v}/\partial t'$; todas las cantidades en los segundos miembros de las igualdades se refieren al instante t'. Es interesante notar que el campo magnético resulta ser en todas partes perpendicular al campo eléctrico.

El campo eléctrico (63.8) consta de dos partes de diferente carácter. El primer término depende sólo de la velocidad de la partícula (y no de su aceleración) y varía a grandes distancias como $1/R^2$. El segundo término depende de la aceleración, y para R grande varía como $1/R$. Veremos más adelante (§ 66) que este último término está ligado con las ondas electromagnéticas radiadas por la partícula.

En cuanto al primer término, dado que es independiente de la aceleración, debe corresponder al campo producido por una carga en movimiento uniforme. En efecto, para velocidad constante, la diferencia

$$\mathbf{R}_{t'}-\frac{\mathbf{v}}{c}R_{t'} = \mathbf{R}_{t'}-\mathbf{v}(t-t')$$

es la distancia $\mathbf{R}_t$ de la carga al punto de observación precisamente en el instante de observación. Es también fácil ver directamente que

$$R_{t'}-\frac{1}{c}\mathbf{R}_{t'}\cdot\mathbf{v} = \sqrt{R_t^2-\frac{1}{c^2}(\mathbf{v}\times\mathbf{R}_t)^2} = R_t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\operatorname{sen}^2\theta_t},$$

donde θ_t es el ángulo formado por $\mathbf{R}_t$ y $\mathbf{v}$. Por consiguiente, el primer término en (63.8) coincide con la expresión (38.8).

PROBLEMA

Deducir los potenciales de Lienard-Wiechert por integración en las fórmulas (62.9-10).

Solución. Escribamos la fórmula (62.8) en la forma

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int\int \frac{\rho(\mathbf{r}', \tau)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(\tau - t + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right) d\tau \, dV'$$

(y análogamente para $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$), substituyendo en ella la función-δ suplementaria y evitando así los argumentos no explícitos en la función ρ. Para una carga puntual que se mueve según una trayectoria dada $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$, tenemos:

$$\rho(\mathbf{r}', \tau) = e\delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(\tau)].$$

Substituyendo esta expresión e integrando respecto de dV', se obtendrá

$$\phi(\mathbf{r}, t) = e \int \frac{d\tau}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)|} \delta\left[\tau - t + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)|\right].$$

La integración respecto de $d\tau$ se efectúa mediante la fórmula

$$\delta[F(\tau)] = \frac{\delta(\tau - t')}{F'(t')}$$

(donde t' es la raíz de la ecuación $F(t') = 0$) y conduce a la fórmula (63.5).

§ 64. Descomposición espectral de los potenciales retardados

El campo producido por cargas en movimiento se puede representar como superposición de ondas monocromáticas. Los potenciales de las diferentes componentes monocromáticas del campo son de la forma $\phi_\omega e^{-i\omega t}$, $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$. También la densidad de carga y de corriente del sistema que produce el campo se pueden desarrollar en serie o integral de Fourier. Es claro que cada componente de Fourier de ϱ y $\mathbf{j}$ es responsable de la creación de la correspondiente componente monocromática del campo.

Para expresar las componentes de Fourier del campo en función de las componentes de Fourier de la densidad de carga y de corriente, substituiremos en (62.9) en vez de ϕ y ϱ, $\phi_\omega e^{-i\omega t}$ y $\varrho_\omega e^{-i\omega t}$, respectivamente. Se encuentra entonces:

$$\phi_\omega e^{-i\omega t} = \int \varrho_\omega \frac{e^{-i\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)}}{R} dV.$$

Suprimiendo el factor $e^{-i\omega t}$ e introduciendo el módulo del vector de onda $k = \omega/c$, tenemos:

$$\phi_\omega = \int \varrho_\omega \frac{e^{ikR}}{R}\, dV. \tag{64.1}$$

Análogamente, para $\mathbf{A}_\omega$ se obtiene:

$$\mathbf{A}_\omega = \int \mathbf{j}\, \frac{e^{ikR}}{\mathcal{R}}\, dV. \tag{64.2}$$

Nótese que la fórmula (64.1) representa una generalización de la solución de la ecuación de Poisson, ya que es solución de la ecuación más general

$$\Delta\phi_\omega + k^2\phi_\omega = -4\pi\varrho_\omega \tag{64.3}$$

(obtenida a partir de las ecuaciones (62.4) para ϱ, ϕ funciones del tiempo a través del factor $e^{-i\omega t}$).

Al desarrollar en integral de Fourier, la componente de Fourier de la densidad de carga es:

$$\varrho_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho e^{i\omega t}\, dt.$$

Sustituyendo esta expresión en (64.1), obtenemos:

$$\phi_\omega = \int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varrho}{R}\, e^{i(\omega t + kR)}\, dV\, dt. \tag{64.4}$$

Hay que pasar todavía de la distribución continua de la densidad de carga a las cargas puntuales, de cuyo movimiento se trata en realidad. Así, si existe una sola carga puntual, haremos:

$$\varrho = e\, \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)],$$

donde $\mathbf{r}_0(t)$ es el vector posición de la carga, función dada del tiempo. Substituyendo esta expresión en (64.4) y efectuando la integración espacial [que se reduce a substituir $\mathbf{r}$ por $\mathbf{r}_0(t)$], se obtiene:

$$\phi_\omega = e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R(t)}\, e^{i\omega[t + R(t)/c]}\, dt, \tag{64.5}$$

donde ahora $R(t)$ es la distancia de la partícula en movimiento al punto de obser-

vación. Para el potencial vector se obtiene de manera análoga:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e}{c}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{v}(t)}{R(t)}\, e^{i\omega[t+R(t)/c]}\, dt, \tag{64.6}$$

donde $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_0(t)$ es la velocidad de la partícula.

Fórmulas análogas a (64.5), (64.6) pueden escribirse también cuando la descomposición espectral de las densidades de carga y corriente contiene una sucesión discreta de frecuencias. Así, para el movimiento periódico de una carga puntual (con período $T = 2\pi/\omega_0$) la descomposición espectral del campo contiene únicamente frecuencias de la forma $n\omega_0$ y las componentes correspondientes del potencial vector son

$$\mathbf{A}_n = \frac{e}{cT}\int_0^T \frac{\mathbf{v}(t)}{R(t)}\, e^{in\omega_0[t+R(t)/c]}\, dt \tag{64.7}$$

(y análogamente para ϕ_n). En ambos casos (64.6-7), las componentes de Fourier se han determinado de acuerdo con lo convenido en el § 49.

PROBLEMA

Desarrollar en ondas planas el campo de una carga en movimiento rectilíneo y uniforme.

Solución. Procederemos de manera análoga a como se procedió en el § 51. Escribamos la densidad de carga en la forma $\varrho = e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)$, donde $\mathbf{v}$ es la velocidad de la partícula. Aplicando la transformación de Fourier a la ecuación $\Box\,\phi = -4\pi e\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)$, se encuentra:

$$(\Box\,\phi)_k = -4\pi e\,.\,e^{-i(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})t}$$

Por otra parte, de

$$\phi = \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,\phi_{\mathbf{k}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

se sigue

$$(\Box\,\phi)_{\mathbf{k}} = -k^2\phi_{\mathbf{k}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2}.$$

Entonces,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2} + k^2\phi_{\mathbf{k}} = 4\pi e\, e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})t},$$

de donde, finalmente,

$$\phi_{\mathbf{k}} = 4\pi e\,\frac{e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})t}}{k^2 - \left(\dfrac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^2}.$$

Se sigue de aquí que la onda caracterizada por el vector de onda $\mathbf{k}$ tiene la frecuencia $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$. Análogamente, para el potencial vector se encuentra:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e}{c} \frac{\mathbf{v} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})t}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)^2}.$$

Finalmente, para el campo se tiene,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\phi_{\mathbf{k}} + i\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{c}\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 4\pi e\, i \frac{-\mathbf{k} + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{c^2}\mathbf{v}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)^2} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})t},$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 4\pi e\, i \frac{\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{v}}{c}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)^2} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})t}.$$

§ 65. La función de Lagrange hasta términos de segundo orden

En la mecánica clásica ordinaria, podemos describir un sistema de partículas en interacción mutua mediante una función de Lagrange que depende sólo de las coordenadas y velocidades de estas partículas (unas y otras en el mismo instante). La posibilidad de proceder así depende, en último término, del hecho que en mecánica se supone que la velocidad de propagación de las interacciones es infinita.

Sabemos ya que, debido al carácter finito de la velocidad de propagación, el campo debe considerarse como un sistema independiente, dotado de sus propios « grados de libertad ». De aquí se sigue que si tenemos un sistema de partículas (cargas) en interacción, para describirlo hemos de considerar el sistema constituido por estas partículas y el campo. Pero cuando se tiene en cuenta la velocidad finita de propagación de las interacciones, es imposible describir rigurosamente el sistema de partículas en interacción mediante una función de Lagrange que dependa sólo de las coordenadas y velocidades de las partículas y que no contenga variable alguna ligada a los « grados de libertad » del propio campo.

Sin embargo, si la velocidad v de todas las partículas es pequeña comparada con la velocidad de la luz, el sistema se puede describir por una función de Lagrange aproximada. Es posible, en efecto, introducir una función tal que represente el sistema, no sólo cuando se prescinde de todas las potencias de v/c (función de Lagrange clásica), sino también salvo términos de orden superior al segundo, v^2/c^2. Esta última circunstancia está ligada al hecho de que la radiación de ondas electromagnéticas por cargas en movimiento (y en consecuencia, la aparición de un « auto-

campo ») se presenta sólo en la tercera aproximación en v/c (véase más adelante, § 67) †.

Observemos primero que en la aproximación de orden cero, esto es, cuando prescindimos por completo del retardo de los potenciales, la función de Lagrange de un sistema de cargas tiene la forma

$$L^{(0)} = \sum_a \tfrac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 - \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} \tag{65.1}$$

(la suma se extiende a todas las cargas que constituyen el sistema). El segundo término es la energía potencial de interacción que corresponde a cargas en reposo.

Para obtener la aproximación siguiente, procederemos como sigue. La función de Lagrange para una carga e_a que se encuentra en un campo exterior es [véase (16.4)]

$$L_a = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} - e_a\phi + \frac{e_a}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_a. \tag{65.2}$$

Elegida una cualquiera de las cargas del sistema, determinemos los potenciales del campo producido por todas las restantes cargas en el punto en que se encuentra la primera, y expresémoslos en función de las coordenadas y velocidades de las cargas que producen este campo (ello es posible sólo aproximadamente — para ϕ, hasta términos del orden de v^2/c^2, y para $\mathbf{A}$, hasta términos en v/c). Substituyendo las expresiones de los potenciales, obtenidas de esta manera, en la expresión de L_a dada más arriba, obtenemos la función de Lagrange de una de las cargas del sistema (para un movimiento dado de las demás cargas). Procediendo así, es entonces fácil encontrar la función correspondiente para todo el sistema.

Partamos de las expresiones de los potenciales retardados:

$$\phi = \int \frac{\varrho_{t-\frac{R}{c}}}{R} dV, \qquad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{t-\frac{R}{c}}}{R} dV.$$

Si las velocidades de todas las cargas son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, la distribución de las cargas no cambia de manera apreciable durante el tiempo R/c. Podemos, por lo tanto, desarrollar $\varrho_{t-\frac{R}{c}}$ y $\mathbf{j}_{t-\frac{R}{c}}$ en serie de potencias

† En casos especiales, la aparición de los términos de radiación se puede retrasar hasta la quinta aproximación en v/c; en este caso existe una función de Lagrange incluso hasta términos del orden de $(v/c)^4$ (véase problema 2, § 75).

de R/c. Para el potencial escalar encontramos así, hasta términos de segundo orden,

$$\phi = \int \frac{\varrho\, dV}{R} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \varrho\, dV + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R\varrho\, dV$$

(ϱ sin índices es el valor de ϱ es el instante t; los símbolos de derivación respecto del tiempo pueden, claro está, sacarse fuera de la integral). Pero $\int \varrho\, dV$ es la carga total constante del sistema. Por lo tanto, el segundo término de la expresión obtenida es cero, de manera que

$$\phi = \int \frac{\varrho\, dV}{R} + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R\varrho\, dV. \tag{65.3}$$

De modo análogo se puede proceder en el caso de A. Pero la expresión para el potencial vector en función de la densidad de corriente contiene ya el factor $1/c$, y cuando se substituye en la función de Lagrange queda multiplicado una vez más por $1/c$. Dado que se trata de hallar una función de Lagrange correcta tan sólo hasta términos de segundo orden, podemos limitarnos al término de primer orden en el desarrollo de **A**, esto es,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\varrho \mathbf{v}}{R}\, dV \tag{65.4}$$

(hemos substituido $\mathbf{j} = \varrho\mathbf{v}$).

Supongamos primero que existe una única carga puntual e. De (65.3) y (65.4) se deduce entonces

$$\phi = \frac{e}{R} + \frac{e}{2c^2}\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \qquad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{cR}, \tag{65.5}$$

donde R es la distancia desde la carga.

Elijamos en vez de ϕ y **A** otros potenciales ϕ' y **A**', utilizando la transformación (véase § 18):

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \qquad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f,$$

en la que elegimos para f la función

$$f = \frac{e}{2c}\frac{\partial R}{\partial t}.$$

Entonces se obtiene †:

$$\phi' = \frac{e}{R}, \qquad \mathbf{A}' = \frac{e\mathbf{v}}{cR} + \frac{e}{2c}\nabla\frac{\partial R}{\partial t}.$$

† Estos potenciales ya no satisfacen (62.3) y (62.4), puesto que no cumplen la condición de Lorentz (62.1).

Para calcular $\mathbf{A}'$, observemos primero que $\nabla \dfrac{\partial R}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t} \nabla R$. El operador gradiente representa aquí la derivación respecto de las coordenadas del punto de observación, aquel en que se quiera calcular el valor de $\mathbf{A}'$. Por consiguiente ∇R es el vector unitario $\mathbf{n}$, dirigido de la carga e al punto de observación, de manera que

$$\mathbf{A}' = \frac{e\mathbf{v}}{cR} + \frac{e}{2c}\dot{\mathbf{n}}.$$

Escribamos también:

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{R}}{R}\right) = \frac{\dot{\mathbf{R}}}{R} - \frac{\mathbf{R}\dot{R}}{R^2}.$$

Pero la derivada $\dot{\mathbf{R}}$ para un punto dado de observación es igual a la velocidad $\mathbf{v}$ de la carga cambiada de signo, y la derivada $\dot{R}$ se determina fácilmente derivando la identidad $R^2 = \mathbf{R}^2$, esto es, haciendo

$$R\dot{R} = \mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{R}} = -\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}.$$

Se tiene así,

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{-\mathbf{v} + \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})}{R}.$$

Substituyendo este resultado en la expresión de $\mathbf{A}'$, se encuentra finalmente:

$$\phi' = \frac{e}{R}, \quad \mathbf{A}' = \frac{e[\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}]}{2cR}. \tag{65.6}$$

Si el campo se debe, no a una carga, sino a varias, deberemos, claro está, sumar estas expresiones para todas ellas.

Substituyéndolas en (65.2), obtenemos la función de Lagrange L_a de la carga e_a (para un movimiento dado de las demás cargas). Al efectuar la substitución, es necesario desarrollar también el primer término de (65.2) en potencias de v_a/c, conservando sólo los términos de segundo orden. Se encuentra así:

$$L_a = \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{1}{8}\frac{m_a v_a^4}{c^2} - e_a \sum_b{}' \frac{e_b}{R_{ab}} + \frac{e_a}{2c^2}\sum_b{}' \frac{e_b}{R_{ab}}[\mathbf{v}_a\cdot\mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_a\cdot\mathbf{n}_{ab})(\mathbf{v}_b\cdot\mathbf{n}_{ab})]$$

(la suma se extiende a todas las cargas excepto e_a; $\mathbf{n}_{ab}$ es el vector unitario de e_b a e_a).

A partir de aquí no presenta ya dificultad obtener la función de Lagrange de todo el sistema. Es fácil comprobar que esta función no es la suma de las L_a correspondientes a las diversas cargas, sino que tiene la forma

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + \sum_a \frac{m_a v_a^4}{8c^2} - \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{2c^2 R_{ab}}[\mathbf{v}_a\cdot\mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_a\cdot\mathbf{n}_{ab})(\mathbf{v}_b\cdot\mathbf{n}_{ab})]. \tag{65.7}$$

En efecto, para cada una de las cargas y un movimiento dado de las restantes, esta función L se reduce a la L_a obtenida más arriba. La expresión (65.7) determina la función de Lagrange de un sistema de cargas correctamente hasta términos de segundo orden (obtenida primero por Darwin en 1922).

Determinemos finalmente la función de Hamilton de un sistema de cargas en esta misma aproximación. Se podría seguir para ello la regla general de calcular $\mathcal{H}$ a partir de L; sin embargo, es más facil proceder de la siguiente manera. Los términos segundo y cuarto en (65.7) son pequeñas correcciones a $L^{(0)}$ (65.1). Por otra parte, la mecánica prueba que para pequeñas variaciones de L y $\mathcal{H}$, sus incrementos son iguales y de signos opuestos (las variaciones de L corresponden a valores constantes de las coordenadas y de las velocidades, mientras que los cambios en $\mathcal{H}$ se refieren a coordenadas e impulsos constantes) †.

Por consiguiente, podemos escribir $\mathcal{H}$, sin más, restando de

$$\mathcal{H}_0 = \sum_a \frac{p_a^2}{2m_a c^2} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}$$

los términos segundo y cuarto de (65.7), substituyendo en ellos previamente las velocidades por los impulsos dados por la primera aproximación $\mathbf{v}_a = \mathbf{p}_a/m_a$. Se tiene así,

$$\mathcal{H} = \sum_a \frac{p_a^2}{2m_a} - \sum_a \frac{p_a^4}{8c^2 m_a^3} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} - \\ - \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{2c^2 m_a m_b R_{ab}} [\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b + (\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{p}_b \cdot \mathbf{n}_{ab})] \quad (65.8)$$

PROBLEMAS

1. Determinar (correctamente hasta términos de segundo orden) el centro de masas de un sistema de partículas en interacción mutua.

Solución. La manera más simple de resolver el problema consiste en utilizar la fórmula

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_a \mathcal{E}_a \mathbf{r}_a + \int W \mathbf{r}\, dV}{\sum_a \mathcal{E}_a + \int W\, dV}$$

† Véase *Mecánica*, § 40.

[véase (14.6)] donde $\mathcal{E}_a$ es la energía cinética de la partícula (incluida su energía en reposo), y W es la densidad de energía del campo producido por las partículas. Dado que $\mathcal{E}_a$ contiene las cantidades grandes $m_a c^2$, al calcular la aproximación siguiente basta considerar únicamente aquellos términos en $\mathcal{E}_a$ y W que no contienen c, es decir, basta considerar sólo la energía cinética no relativista de las partículas y la energía del campo electrostático. Se tiene entonces:

$$\int W\mathbf{r}\,dV = \frac{1}{8\pi}\int E^2\mathbf{r}\,dV = \frac{1}{8\pi}\int (\nabla\phi)^2\mathbf{r}\,dV$$
$$= \frac{1}{8\pi}\int\left(df\cdot\nabla\frac{\phi^2}{2}\right)\mathbf{r} - \frac{1}{8\pi}\int\nabla\frac{\phi^2}{2}dV - \frac{1}{8\pi}\int\phi\Delta\phi\cdot\mathbf{r}\,dV;$$

la integral extendida a la superficie infinitamente alejada se anula; la segunda integral se transforma también en una integral de superficie, y también se anula, mientras que al substituir $\Delta\varphi = -4\pi\varrho$ en la tercera integral se obtiene:

$$\int W\mathbf{r}\,dV = \frac{1}{2}\int\varrho\varphi\,\mathbf{r}\,dV = \frac{1}{2}\sum_a e_a\phi_a\mathbf{r}_a,$$

donde ϕ_a es el potencial producido en el punto $\mathbf{r}_a$ por todas las cargas excepto e_a †.

Finalmente se encuentra:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\mathcal{E}}\sum_a \mathbf{r}_a\left(m_a c^2 + \frac{p_a^2}{2m_a} + \frac{e_a}{2}\sum_b{}' \frac{e_b}{R_{ab}}\right)$$

(donde la suma se extiende a todo b excepto $b = a$), fórmula en la que

$$\mathcal{E} = \sum_a\left(m_a c^2 + \frac{p_a^2}{2m_a} + \sum_{a>b}{}^{\cdot}\frac{e_a e_b}{R_{ab}}\right)$$

es la energía total del sistema. En esta aproximación, por consiguiente, las coordenadas del centro de masas se pueden expresar efectivamente en función de magnitudes relativas sólo a las partículas.

2. Escribir la función de Hamilton en segunda aproximación para un sistema de dos partículas, prescindiendo del movimiento del sistema como un todo.

Solución. Elijamos un sistema de referencia en el que el impulso total de las dos partículas es igual a cero. Expresando los impulsos como derivadas de la acción, tenemos

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \partial S/\partial\mathbf{r}_1 + \partial S/\partial\mathbf{r}_2 = 0.$$

De aquí se sigue, evidentemente, que en el sistema de referencia elegido la acción es una función de $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, es decir, de la diferencia de los vectores posición de las dos partículas. Por consiguiente, tenemos $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}$, donde $\mathbf{p} = \partial S/\partial\mathbf{r}$ es el impulso del movimiento relativo de las partículas.

La función de Hamilton es igual a

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)p^2 - \frac{1}{8c^2}\left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3}\right)p^4 + \frac{e_1 e_2}{r} + \frac{e_1 e_2}{2m_1 m_2 c^2 r}[p^2 + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})^2].$$

---

† La eliminación del autocampo de las partículas corresponde a la «renormalización» de la masa mencionada en la nota de la pág. 128.

CAPÍTULO 9

RADIACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

§ 66. El campo a gran distancia de un sistema de cargas

Consideremos el campo producido por un sistema de cargas móviles a distancias que son grandes comparadas con las dimensiones del sistema.

Elijamos el origen de coordenadas O en un punto cualquiera interior al sistema de cargas. Llamemos $\mathbf{R}_0$ el vector de origen en O y extremo en el punto de observación del campo, P, y sea $\mathbf{n}$ el vector unitario correspondiente. Sea $\mathbf{r}$ el vector posición del elemento de carga $de = \varrho\, dV$ y $\mathbf{R}$ el vector de origen en de y extremo en P. Evidentemente, $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$.

A grandes distancias del sistema, es $R_0 \gg r$ y se tiene aproximadamente:

$$R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}| \approx R_0 - \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}.$$

Substituyamos esta expresión en las fórmulas (62.9)) y (62.10) para los potenciales retardados. En el denominador de los integrandos podemos prescindir de $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}$ frente a R_0. En cambio, ello no es en general posible en el argumento $t - \frac{R}{c}$; el que sea o no posible prescindir de dicho término depende, no de los valores relativos de R_0/c y $\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{n}}{c}$, sino de en cuánto varían las cantidades ϱ y $\mathbf{j}$ en el tiempo $\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{n}}{c}$. Dado que R_0 es constante en la integración y, por lo tanto, se puede sacar fuera de la integral, obtenemos para los potenciales del campo a gran distancia del sistema de cargas las expresiones siguientes:

$$\phi = \frac{1}{R_0}\int \varrho_{t-\frac{R_0}{c}+\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{n}}{c}}\, dV, \tag{66.1}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{n}}{c}}\, dV. \tag{66.2}$$

A distancias suficientemente grandes del sistema, el campo se puede considerar como una onda plana en pequeñas regiones del espacio. Para ello es necesario que

la distancia sea grande comparada, no sólo con las dimensiones del sistema, sino también con la longitud de onda de las ondas electromagnéticas que el sistema radia. Llamaremos a esta región del espacio *zona de ondas* de la radiación.

En una onda plana, los campos **E** y **H** están ligados entre sí por (47.4), $\mathbf{E} = \mathbf{H}\times\mathbf{n}$. Dado que $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, para determinar por completo el campo en la zona de ondas basta calcular sólo el potencial vector. En una onda plana tenemos $\mathbf{H} = \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}\times\mathbf{n}$ [cf. (47.3)], donde el punto sobre una letra indica derivación respecto del tiempo †. Así, conocido **A**, se encuentran **H** y **E** mediante las fórmulas ††:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}\times\mathbf{n}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{c}(\dot{\mathbf{A}}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n}. \tag{66.3}$$

Obsérvese que el campo a grandes distancias resulta inversamente proporcional a la primera potencia de la distancia R_0 contada a partir del sistema radiante. Obsérvese también que el tiempo t aparece en las expresiones (66.1) a (66.3) siempre en la combinación $t - \frac{R_0}{c}$ con la distancia R_0.

En cuanto a la radiación producida por una sola carga puntual en movimiento arbitrario, es conveniente utilizar los potenciales de Lienard-Wiechert. A grandes distancias, podemos substituir el vector posición **R** en la fórmula (63.5) por el vector constante $\mathbf{R}_0$, y en la condición (63.1), que determina t', debemos hacer $R = R_0 - \mathbf{r}_0\cdot\mathbf{n}$ ($\mathbf{r}_0(t)$ es el vector posición de la carga). De esta manera, †††

$$\mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}(t')}{cR_0\left(1 - \dfrac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}(t')}{c}\right)}, \tag{66.4}$$

donde t' está determinado por la igualdad

$$t' - \frac{\mathbf{r}_0(t')}{c}\cdot\mathbf{n} = t - \frac{R_0}{c}. \tag{66.5}$$

---

† En el presente caso, también es fácil comprobar esta fórmula calculando directamente el rotacional de la expresión (66.2) y prescindiendo de los términos en $1/R_0^2$ frente al término $\sim 1/R_0$.

†† La fórmula $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}$ [véase (47.3)] no es aquí aplicable, ya que los potenciales ϕ y **A** no satisfacen la condición suplementaria que se les impuso en el § 47.

††† En la fórmula (63.8) para el campo eléctrico, a esta aproximación corresponde la supresión del primer término frente al segundo.

Las ondas electromagnéticas radiadas transportan una determinada energía. El flujo de energía viene dado por el vector de Poynting, que, para una onda plana, es igual a

$$\mathbf{S} = c\frac{H^2}{4\pi}\mathbf{n}.$$

La intensidad dI de la radiación emitida en el elemento de ángulo sólido do se define como cantidad de energía que atraviesa, por unidad de tiempo, el elemento $df = R_0^2\, do$ de la superficie esférica de centro en el origen y radio R_0. Esta cantidad es, evidentemente, igual al flujo de energía S multiplicado por df, es decir,

$$dI = c\frac{H^2}{4\pi}R_0^2\, do. \tag{66.6}$$

Dado que el campo H es inversamente proporcional a R_0, vemos que la cantidad de energía radiada por el sistema por unidad de tiempo en el elemento de ángulo sólido do es la misma cualquiera que sea la distancia (con tal que sea el mismo el valor de la diferencia $t-\frac{R_0}{c}$). Este resultado, claro está, era de prever, dado que la energía radiada por el sistema se propaga con velocidad c en el espacio en torno, sin acumularse ni desaparecer en punto alguno.

Deduzcamos las fórmulas para la descomposición espectral del campo de ondas radiadas por el sistema. Estas fórmulas se pueden obtener directamente de las deducidas en el § 64. Substituyendo en (64.2) $R = R_0 - \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}$ (donde podemos hacer $R = R_0$ en el denominador del integrando), obtenemos para las componentes de Fourier del potencial vector:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0}\int \mathbf{j}_\omega e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, dV \tag{66.7}$$

(donde $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$). Las componentes $\mathbf{H}_\omega$ y $\mathbf{E}_\omega$ se determinan mediante las fórmulas (66.3). Substituyendo en ellas en vez de $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{A}$, respectivamente, $\mathbf{H}_\omega e^{-i\omega t}$, $\mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}$, $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$, y dividiendo luego por $e^{-i\omega t}$, se obtiene:

$$\mathbf{H}_\omega = i\mathbf{k}\times\mathbf{A}_\omega, \quad \mathbf{E}_\omega = \frac{ic}{\omega}(\mathbf{k}\times\mathbf{A}_\omega)\times\mathbf{k}. \tag{66.8}$$

Al hablar de distribución espectral de la intensidad de radiación, debemos distinguir entre el desarrollo en serie de Fourier y el desarrollo (o representación) en integral de Fourier. Hay que acudir a la representación integral de Fourier en el caso de la radiación que acompaña el choque de partículas cargadas. Interesa entonces la cantidad total de energía radiada durante la colisión (cantidad que co-

rresponde a la energía perdida por las partículas que chocan). Sea $d\mathcal{E}_{n\omega}$ la energía radiada en el elemento de ángulo sólido do en forma de ondas con frecuencias que pertenecen al intervalo $d\omega$. De acuerdo con la fórmula general (49.8) la parte de la radiación total correspondiente al intervalo de frecuencias $d\omega/2\pi$ se obtiene a partir de la fórmula usual para la intensidad substituyendo el cuadrado del campo por el cuadrado del módulo de su componente de Fourier y multiplicando a la vez por 2. Tenemos, por lo tanto, en lugar de (66.6)

$$d\mathcal{E}_{n\omega} = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_\omega|^2 R_0^2 \, do \, \frac{d\omega}{2\pi} \tag{66.9}$$

Si las cargas efectúan un movimiento periódico, el campo de radiación debe desarrollarse en serie de Fourier. Según la fórmula general (49.4), la intensidad de cada componente del desarrollo en serie de Fourier se obtiene a partir de la expresión usual para la intensidad substituyendo el campo por su componente de Fourier y multiplicando luego por dos. Así, la intensidad de la radiación en el elemento de ángulo sólido dv, con frecuencia $\omega = n\omega_0$ es igual a

$$dI_n = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_n|^2 R_0^2 \, do. \tag{66.10}$$

Finalmente, escribamos las fórmulas que determinan directamente las componentes de Fourier del campo de radiación para un movimiento dado de las cargas radiantes. En la representación por una integral de Fourier tenemos:

$$\mathbf{j}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j} e^{i\omega t} \, dt.$$

Substituyendo esta expresión en (66.7) y pasando de la distribución continua de corrientes a una carga puntual que se mueve a lo largo de la trayectoria $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t)$ (véase § 64), obtenemos:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e\mathbf{v}(t) e^{i[\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0(t)]} \, dt, \tag{66.11}$$

Dado que $\mathbf{v} = d\mathbf{r}_0/dt$, se tiene $\mathbf{v}\, dt = d\mathbf{r}_0$ y esta fórmula se puede escribir también en forma de integral curvilínea a lo largo de la trayectoria de la carga:

$$\mathbf{A}_\omega = e \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int_L e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0)} d\mathbf{r}_0. \tag{66.12}$$

De acuerdo con (66.8), las componentes de Fourier del campo magnético tienen la forma:

$$\mathbf{H}_\omega = e \frac{i\omega e^{ikR_0}}{c^2 R_0} \int_L e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0)} \mathbf{n} \times d\mathbf{r}_0. \tag{66.13}$$

Si la carga efectúa un movimiento periódico a lo largo de una trayectoria cerrada, el campo se desarrolla en serie de Fourier. Las componentes del desarrollo se obtienen substituyendo en las fórmulas (66.11-13) la integración respecto de t desde $-\infty$ a $+\infty$ por el promedio respecto del período T del movimiento (véase la definición en el § 49). Para la componente de Fourier del campo magnético con frecuencia $\omega = n\omega_0 = \dfrac{2\pi n}{T}$, tenemos así:

$$\mathbf{H}_n = e\frac{2\pi i n e^{ikR_0}}{c^2T^2R_0}\int_0^T e^{i[n\omega_0 t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0(t)]}\,\mathbf{n}\times\mathbf{v}(t)\,dt$$

$$= e\frac{2\pi i n e^{ikR_0}}{c^2T^2R_0}\oint e^{i(n\omega_0 t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0)}\,\mathbf{n}\times d\mathbf{r}_0. \qquad (66.14)$$

En la segunda integral, la integración se efectúa a lo largo de la órbita cerrada de la partícula.

PROBLEMA

Obtener la expresión cuadridimensional de la descomposición espectral del cuadrimpulso radiado por una carga en movimiento a lo largo de una trayectoria dada.

Solución. Substituyendo (66.8) en (66.9) y teniendo en cuenta que, en virtud de la condición (62.1), $k\phi_\omega = \mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_\omega$, se encuentra:

$$d\mathcal{E}_{n\omega} = \frac{c}{2\pi}(k^2\,|\,\mathbf{A}_\omega\,|^2 - |\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_\omega\,|^2)R_0^2\,do\,\frac{d\omega}{2\pi} =$$

$$= \frac{c}{2\pi}k^2(|\,A_\omega\,|^2 - |\,\phi_\omega\,|^2)\,R_0^2\,do\,\frac{d\omega}{2\pi} = -\frac{c}{2\pi}k^2A_{i\omega}A^{i*}_{\omega}\,R_0^2\,do\,\frac{d\omega}{2\pi}$$

Representando el cuadripotencial $A_{i\omega}$ en una forma análoga a (66.12), obtenemos:

$$d\mathcal{E}_{n\omega} = -\frac{k^2e^2}{4\pi^2}\chi_i\chi^{i*}\,do\,dk,$$

donde χ^i designa el cuadrivector

$$\chi^i = \int \exp(-ik_lx^l)\,dx^i,$$

para el cual la integración se efectúa a lo largo de la línea de universo de la partícula. Finalmente, pasando a la notación cuadridimensional [incluyendo la del elemento de cuadrivolumen en el espacio k, cf. (10.1a)], obtendremos para el cuadriimpulso radiado la siguiente expresión:

$$dP^i = -\frac{e^2k^i}{2\pi^2c}\chi_i\chi^i\delta(k_mk^m)\,d^4k.$$

§ 67. Radiación dipolar

Se puede prescindir del tiempo $\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{n}}{c}$ en los integrandos de las expresiones (66.1) y (66.2) de los potenciales retardados cuando la distribución de las cargas cambia poco durante dicho tiempo. Es fácil encontrar las condiciones que deben cumplirse para que así ocurra. Sea T el orden de magnitud del tiempo durante el cual la distribución de las cargas en el sistema cambia de manera apreciable. La radiación de éste contendrá, evidentemente, un período del orden de T (es decir, una frecuencia del orden de $1/T$). Llamemos a el orden de magnitud de las dimensiones del sistema. En estas condiciones, el tiempo $\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{n}}{c}$ es del orden de a/c. Para que la distribución de las cargas en el sistema no varíe apreciablemente durante este tiempo, es necesario que $a/c \ll T$. Pero cT no es sino la longitud de onda λ de la radiación. Por consiguiente, la condición $a \ll cT$ se puede escribir en la forma:

$$a \ll \lambda, \tag{67.1}$$

esto es, las dimensiones del sistema deben ser pequeñas comparadas con la longitud de onda radiada.

Hay que hacer notar que esta misma condición (67.1) se puede también obtener a partir de (66.7). En el integrando, $\mathbf{r}$ toma valores en un intervalo que es del orden de las dimensiones del sistema, ya que fuera de éste $\mathbf{j}$ es cero. Por lo tanto, el exponente $i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ es pequeño, y se puede prescindir de él para aquellas ondas tales que $ka \ll 1$, lo que equivale a (67.1).

Esta condición se puede escribir todavía de otra forma observando que $T \sim a/v$, de manera que $\lambda \sim ca/v$, si v es el orden de magnitud de la velocidad de las cargas. De la condición $a \ll \lambda$ se deduce entonces:

$$v \ll c, \tag{67.2}$$

esto es, las velocidades de las cargas deben ser pequeñas comparadas con la velocidad de la luz.

Supongamos que se cumple esta condición y estudiemos la radiación a distancias del sistema radiante grandes comparadas con la longitud de onda (y, en consecuencia, en cualquier caso grandes comparadas con las dimensiones del sistema). Conforme se señaló en § 66, a tales distancias el campo se puede considerar como una onda plana y, por lo tanto, para determinar el campo basta calcular únicamente el potencial vector.

El potencial vector (66.2) tiene ahora la forma

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'}\, dV, \tag{67.3}$$

donde el tiempo $t' = t - \frac{R_0}{c}$ no depende ya de las variables de integración. Substituyendo $\mathbf{j} = \varrho\mathbf{v}$, escribiremos (67.3) en la forma

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\left(\sum e\mathbf{v}\right)$$

donde la suma se extiende a todas las cargas del sistema; para abreviar omitimos el índice t' — todas las cantidades que aparecen en el segundo miembro de la ecuación se refieren al instante t'. Pero,

$$\sum e\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\sum e\mathbf{r} = \dot{\mathbf{d}},$$

donde $\mathbf{d}$ es el momento dipolar del sistema. De esta manera,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\dot{\mathbf{d}}. \tag{67.4}$$

Mediante las fórmulas (66.3) se encuentra que el campo magnético es igual a

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2R_0}\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n}, \tag{67.5}$$

y el campo eléctrico lo es a

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2R_0}(\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n}. \tag{67.6}$$

Obsérvese que en la aproximación que consideramos la radiación está determinada por la derivada segunda del momento dipolar del sistema. La radiación de esta clase se llama *radiación dipolar.*

Dado que $\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r}$, será $\ddot{\mathbf{d}} = \sum e\dot{\mathbf{v}}$. Las cargas pueden radiar, pues, solamente si se mueven con movimiento acelerado. Las cargas en movimiento uniforme no radian. Esta consecuencia se sigue también directamente del principio de relatividad, ya que una carga en movimiento uniforme se puede considerar en reposo en un sistema inercial, y una carga en reposo no radia.

Substituyendo (67.5) en (66.6), obtenemos la intensidad de la radiación dipolar:

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3}(\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n})^2\,do = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3}\operatorname{sen}^2\theta\,do, \tag{67.7}$$

donde θ es el ángulo formado por $\mathbf{d}$ y $\mathbf{n}$. Ésta es la energía radiada por el sistema, por unidad de tiempo, en el elemento de ángulo sólido do; nótese que la distribución angular de la radiación viene dada por el factor $\operatorname{sen}^2\theta$.

Substituyendo $do = 2\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta$ e integrando respecto de θ de 0 a π, se encuentra para la radiación total

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2. \tag{67.8}$$

Si se trata de una sola carga que se mueve en un campo exterior, se tendrá $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ y $\ddot{\mathbf{d}} = e\mathbf{w}$, donde $\mathbf{w}$ es la aceleración de la carga. La radiación total de la carga en movimiento es así,

$$I = \frac{2e^2w^2}{3c^3}. \tag{67.9}$$

Obsérvese que un sistema aislado de partículas, para todas las cuales la razón de la carga a la masa es la misma, no puede radiar (por radiación dipolar). En efecto, para un sistema de estas características, el momento dipolar es

$$\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r} = \sum \frac{e}{m} m\mathbf{r} = \text{const} \sum m\mathbf{r},$$

donde const es la razón de la carga a la masa, común a todas las cargas. Pero $\sum m\mathbf{r} = \mathbf{R} \sum m$, donde $\mathbf{R}$ es el vector posición del centro de masas del sistema (recuérdese que todas las velocidades son pequeñas, $v \ll c$, de manera que es aplicable la mecánica no relativista). Por consiguiente, $\ddot{\mathbf{d}}$ es proporcional a la aceleración del centro de masa, aceleración que es nula, dado que el centro de masa se mueve con movimiento uniforme.

Finalmente, escribamos la fórmula que da la descomposición espectral de la intensidad de la radiación dipolar. Para la radiación que acompaña a una colisión, introduciremos la cantidad $d\mathcal{E}_\omega$ de energía radiada, durante todo el tiempo que dura la colisión, en forma de ondas con frecuencias comprendidas en el intervalo $\frac{d\omega}{2\pi}$ (cf. § 66). Esta cantidad se obtiene substituyendo el vector $\ddot{\mathbf{d}}$ en (67.8) por su componente de Fourier $\ddot{\mathbf{d}}_\omega$ y multiplicando por 2 :

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{4}{3c^3}(\ddot{\mathbf{d}}_\omega)^2 \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Para determinar las componentes de Fourier tenemos,

$$\ddot{\mathbf{d}}_\omega e^{-i\omega t} = \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t}) = -\omega^2 \mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t},$$

de donde $\ddot{\mathbf{d}}_\omega = -\omega^2 \mathbf{d}_\omega$. Obtenemos así,

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{4\omega^4}{3c^3} |\mathbf{d}_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \tag{67.10}$$

Cuando el movimiento de las partículas es periódico, de manera análoga se obtiene la intensidad de la radiación de frecuencia $\omega = n\omega_0$ en la forma

$$I_n = \frac{4\omega_0^4 n^4}{3c^3}|\mathbf{d}_n|^2. \tag{67.11}$$

PROBLEMAS

1. Determinar la radiación emitida por un dipolo **d** que gira en un plano con velocidad angular constante Ω †.

Solución. Eligiendo el plano de rotación como plano x, y, tenemos:

$$d_x = d_0 \cos \Omega t, \quad d_y = d_0 \operatorname{sen} \Omega t.$$

Dado que estas funciones son monocromáticas, la radiación es también monocromática, de frecuencia $\omega = \Omega$. De la fórmula (67.7) se deduce para la distribución angular de la radiación (valor medio relativo a un período):

$$\overline{dI} = \frac{d_0^2 \Omega^4}{8\pi c^3}(1 + \cos^2\theta)\, do,$$

donde θ es el ángulo formado por la dirección **n** de la radiación y el eje Z. La radiación total es:

$$\bar{I} = \frac{2d_0^2\Omega^4}{3c^3}.$$

La radiación está polarizada en el sentido del vector $\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n} = \omega^2 \mathbf{n} \times \mathbf{d}$. Descomponiéndolo en sus componentes en el plano **n**, Z y perpendicular al mismo, se encuentra que la radiación está polarizada elípticamente y que la razón de los ejes de la elipse es igual a $n_z = \cos\theta$; en particular, la radiación a lo largo del eje Z está polarizada circularmente.

2. Determinar la distribución angular de la radiación emitida por un sistema de cargas, que se mueve como un todo (con velocidad $\boldsymbol{V}$, si la distribución de la radiación se conoce en el sistema de referencia en el que el sistema en conjunto se encuentra en reposo.

Solución. Sea

$$dI' = f(\cos\theta', \phi')\, do', \quad do' = d(\cos\theta')\, d\phi'$$

la intensidad de la radiación en el sistema de referencia K' ligado al sistema de cargas en movimiento (θ', ϕ' son las coordenadas polares; el eje polar está dirigido en el sentido del movimiento del sistema). La energía $d\mathcal{E}$ radiada durante un intervalo de tiempo dt en el sistema de referencia

† La radiación emitida por un rotador y por un trompo simétrico pertenece a este tipo. En el primer caso, **d** es el momento dipolar total del rotador; en el segundo caso, **d** es la proyección del momento dipolar del trompo sobre un plano perpendicular a su eje de precesión (es decir, a la dirección del momento cinético total).

fijo K (el del laboratorio), está ligada con la energía $d\mathcal{E}'$ radiada en el sistema K' por la fórmula de transformación

$$d\mathcal{E}' = \frac{d\mathcal{E} - \mathbf{V}\cdot d\mathbf{P}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = d\mathcal{E}\,\frac{1-\frac{V}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

(el impulso de la radiación que se propaga en una dirección dada está ligado con su energía por la ecuación $|d\mathbf{P}| = d\mathcal{E}/c$). Los ángulos polares θ, θ' de la dirección de radiacion en los sistemas K y K' están ligados por las fórmulas (5.6) (acimutes $\phi = \phi'$). Finalmente, al intervalo de tiempo dt' en el sistema K' corresponde el intervalo de tiempo $dt = \dfrac{dt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ en el sistema K. Resulta así para la intensidad $dI = \dfrac{d\mathcal{E}}{dt}$ en el sistema K:

$$dI = \frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^2}{\left(1-\frac{V}{c}\cos\theta\right)^3} f\left(\frac{\cos\theta-\frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}\cos\theta}, \phi\right) do\,.$$

Por ejemplo, para un dipolo que se mueve a lo largo de su propio eje es $f = \text{const}\cdot\text{sen}^2\,\theta'$, y teniendo en cuenta la fórmula que acabamos de obtener se encuentra:

$$dI = \text{const}\cdot\frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^3 \text{sen}^2\,\theta}{\left(1-\frac{V}{c}\cos\theta\right)^5} do.$$

§ 68. Radiación dipolar en las colisiones

En problemas relativos a la radiación emitida en las colisiones (llamada *radiación de frenado*), rara vez interesa la radiación que acompaña al choque de dos partículas que se mueven a lo largo de trayectorias determinadas. Generalmente, hemos de considerar la dispersión de toda una corriente de partículas que se mueven paralelamente, y el problema consiste en determinar la radiación total por unidad de densidad de corriente de partículas.

Si la densidad de corriente es igual a la unidad (es decir, si por unidad de tiempo pasa una partícula por unidad de área normal al haz), el número de partículas en el haz cuyos « parámetros de impacto » † están comprendidos entre ϱ y $\varrho+d\varrho$, es $2\pi\,\varrho\,d\varrho$ (área de la corona circular limitada por las circunferencias de radios ϱ y $\varrho+d\varrho$). Por consiguiente, la radiación total buscada se obtiene multiplicando

† Por *parámetro de impacto* se entiende la distancia mínima a que habrían pasado las partículas que chocan si se hubieran movido a lo largo de rectas.

la radiación total $\Delta\mathcal{E}$ de una sola partícula (con parámetro de impacto dado) por $2\pi\,\varrho\,d\varrho$ e integrando respecto de ϱ de 0 a ∞. La cantidad así determinada tiene las dimensiones del producto de una energía por una área. La llamaremos *radiación eficaz* (por analogía con la sección eficaz de dispersión) y la representaremos por $\varkappa$:

$$\varkappa = \int_0^\infty \Delta\mathcal{E}\cdot 2\pi\varrho\, d\varrho. \tag{68.1}$$

De manera análoga es posible determinar la radiación eficaz en un elemento de ángulo sólido dado do, en un intervalo de frecuencias dado $d\omega$, etc. †.

Deduzcamos ahora la fórmula general que da la distribución angular de la radiación emitida en la dispersión de un haz de partículas por un campo central, suponiendo que la radiación es dipolar.

La intensidad de la radiación (en cada instante) emitida por una de las partículas del haz considerado está determinada por la fórmula (67.7), en la que $\mathbf{d}$ es el momento dipolar de la partícula respecto del centro de dispersión ††. Promediemos esta expresión respecto de todas las direcciones del vector $\ddot{\mathbf{d}}$ en el plano perpendicular al haz. Dado que $(\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n})^2 = \ddot{\mathbf{d}}^2-(\mathbf{n}\cdot\ddot{\mathbf{d}})^2$, el promedio afecta sólo a $(\mathbf{n}\cdot\ddot{\mathbf{d}})^2$. Dado que el campo dispersor es un campo central y el haz incidente es paralelo, la dispersión (y con ella también la radiación) presenta simetría axil en torno de un eje que pasa por el centro. Elijamos este eje como eje X. Por razones de simetría, es obvio que el valor medio de las primeras potencias $\ddot{d}_y$, $\ddot{d}_z$ es igual a cero, y puesto que $\ddot{d}_x$ no está sujeto a promedio, se tendrá:

$$\overline{\ddot{d}_x\ddot{d}_y} = \overline{\ddot{d}_x\ddot{d}_z} = 0.$$

Los valores medios de $\ddot{d}_y^2$ y $\ddot{d}_z^2$, en cambio, son iguales entre sí, por lo que

$$\overline{\ddot{d}_y^2} = \overline{\ddot{d}_z^2} = \tfrac{1}{2}[(\ddot{\mathbf{d}})^2-\ddot{d}_x^2].$$

Teniendo en cuenta estos resultados, se encuentra sin dificultad:

$$\overline{(\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n})^2} = \tfrac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2+\ddot{d}_x^2)+\tfrac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2-3\ddot{d}_x^2)\cos^2\theta,$$

donde θ es el ángulo formado por la dirección $\mathbf{n}$ de la radiación y el eje X.

---

† Si la expresión que hay que integrar depende de la dirección de la proyección del momento dipolar de la partícula sobre el plano normal al haz, hay que promediarla primero respecto de todas las direcciones en dicho plano y sólo después multiplicar por $2\pi\,\varrho\,d\varrho$ e integrar.

†† En realidad, de ordinario se trata del momento dipolar de dos partículas—la dispersada y la que dispersa—respecto de su centro de masas común.

Integrando la intensidad respecto del tiempo y respecto del parámetro de impacto, se obtiene la expresión final siguiente, que da la radiación eficaz en función de la dirección de radiación:

$$d\varkappa_{\mathbf{n}} = \frac{do}{4\pi c^3}\left[A + B\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right], \tag{68.2}$$

donde,

$$A = \frac{2}{3}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{\mathbf{d}}^2\, dt\, 2\pi\varrho\, d\varrho, \qquad B = \frac{1}{3}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (\ddot{\mathbf{d}}^2 - 3\ddot{d}_x^2)\, dt\, 2\pi\varrho\, d\varrho. \tag{68.3}$$

El segundo término en (68.2) se ha escrito de forma que dé cero al promediar respecto de todas las direcciones, de manera que la radiación eficaz total es $\varkappa = A/c^3$. Conviene llamar la atención sobre el hecho de que la distribución angular de la radiación es simétrica respecto del plano que pasa por el centro dispersor y es perpendicular al haz, dado que la expresión (68.2) no cambia si se substituye en ella θ por $\pi - \theta$. Esta propiedad es característica de la radiación dipolar y no vale para aproximaciones de orden superior respecto de v/c.

La intensidad de la radiación que acompaña a la dispersión se puede descomponer en dos partes: la intensidad de la radiación polarizada en el plano que pasa por el eje X y la dirección $\mathbf{n}$ (elegimos este plano como plano XY) y la intensidad de la radiación polarizada en un plano perpendicular al primero.

El vector campo eléctrico tiene la dirección del vector

$$(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{d}}) - \ddot{\mathbf{d}}$$

[véase (67.6)]. La componente de este vector en la dirección perpendicular al plano XY es $-\ddot{d}_z$, y su proyección sobre dicho plano vale $\operatorname{sen}\theta\, \ddot{d}_x - \cos\theta\, \ddot{d}_y$. Para determinar esta última cantidad lo más fácil es partir de la componente z del campo magnético, que es igual a ella y paralela a $\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}$.

Elevando $\mathbf{E}$ al cuadrado y promediando respecto de todas las direcciones del vector $\ddot{\mathbf{d}}$ en el plano YZ, se ve, ante todo, que el valor medio del producto de las proyecciones del campo sobre el plano XY y perpendicular al mismo, se anula. Esto significa que la intensidad puede representarse, en realidad, como la suma de dos partes independientes: las intensidades de la radiación polarizada en dos planos perpendiculares entre sí.

La intensidad de la radiación cuyo vector eléctrico es perpendicular al plano XY está determinada por el valor medio del cuadrado $\overline{\ddot{d}_z^2} = \frac{1}{2}\,(\overline{\ddot{\mathbf{d}}^2} - \overline{\ddot{d}_x^2})$. Para la

parte correspondiente de la radiación eficaz, obtenemos la expresión

$$d\varkappa_{\mathrm{n}}^{\perp} = \frac{do}{4\pi c^3}\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\ddot{\mathbf{d}}^2-\ddot{d}_x^2)\,dt\,2\pi\varrho\,d\varrho. \tag{68.4}$$

Obsérvese que esta parte de la radiación es isótropa. No es necesario dar la expresión para la radiación eficaz con vector eléctrico en el plano XY, dado que, evidentemente,

$$d\varkappa_{\mathrm{n}}^{\parallel}+d\varkappa_{\mathrm{n}}^{\perp} = d\varkappa_{\mathrm{n}}.$$

De manera análoga se puede obtener la expresión de la distribución angular de la radiación eficaz en un intervalo $d\omega$ de frecuencia dado. Sin repetir toda la discusión, que es por completo análoga a la que precede, daremos la expresión final:

$$d\varkappa_{\mathrm{n},\,\omega} = \frac{do}{2\pi c^3}\left[A(\omega)+B(\omega)\frac{3\cos^2\theta-1}{2}\right]\frac{d\omega}{2\pi} \tag{68.5}$$

donde

$$A(\omega) = \frac{2\omega^4}{3}\int_0^{\infty}\mathbf{d}_{\omega}^2 2\pi\varrho\,d\varrho, \qquad B(\omega) = \frac{\omega^4}{3}\int_0^{\infty}(\mathbf{d}_{\omega}^2-3\,d_{x\omega}^2)2\pi\varrho\,d\varrho. \tag{68.6}$$

§ 69. Radiación de frenado de bajas frecuencias

En la descomposición espectral de la radiación que acompaña a una colisión, la mayor parte de la intensidad corresponde a frecuencias $\omega\sim 1/\tau$, donde τ es el orden de magnitud de la duración de la colisión. Sin embargo, no consideraremos aquí esta región del espectro (para la que no es posible obtener fórmulas generales), sino más bien la « cola » de la distribución que corresponde a bajas frecuencias, es decir, cuando se satisface la condición

$$\omega\tau \ll 1. \tag{69.1}$$

En este caso no supondremos que las velocidades de las partículas que chocan son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, hipótesis que se admitió en la sección precedente; las fórmulas que siguen serán válidas para velocidades cualesquiera.

En la integral

$$\mathbf{H}_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{H}e^{i\omega t}\,dt,$$

el campo **H** de la radiación difiere esencialmente de cero sólo durante un intervalo de tiempo del orden de τ. Por consiguiente, si se cumple la condición (69.1), podemos admitir que $\omega\tau \ll 1$ en la integral, de manera que cabe substituir $e^{i\omega t}$ por la unidad; entonces,

$$\mathbf{H}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}\, dt.$$

Substituyendo $\mathbf{H} = \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}/c$ y efectuando la integración respecto del tiempo, se obtiene:

$$\mathbf{H}_\omega = \frac{1}{c}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \times \mathbf{n}, \tag{69.2}$$

donde $\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1$ es el cambio en el potencial vector del campo, creado por las partículas que chocan, durante el tiempo de la colisión.

La radiación total (de frecuencia ω) emitida durante dicho tiempo se encuentra substituyendo (69.2) en (66.9):

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{R_0^2}{4c\pi^2}[(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \times \mathbf{n}]^2\, do\, d\omega. \tag{69.3}$$

Para el potencial vector podemos utilizar la expresión de Lienard-Wiechert (66.4), con lo que se obtiene:

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{1}{4\pi^2 c^3}\left\{\sum e\left(\frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{n}}{1 - \frac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_2} - \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{n}}{1 - \frac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_1}\right)\right\}^2 do\, d\omega, \tag{69.4}$$

donde $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son las velocidades de la partícula antes y después de la colisión y la suma se refiere a las dos partículas que chocan. Obsérvese que el coeficiente de $d\omega$ resulta independiente de la frecuencia. Con otras palabras, a bajas frecuencias [condición (69.1)], la distribución espectral es independiente de la energía, es decir, $d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega}/d\omega$ se comporta como una constante para $\omega \to 0$ †.

Si las velocidades de las partículas que chocan son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, (69.4) pasa a ser

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{1}{4\pi^2 c^3}[\sum e(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times \mathbf{n}]^2\, do\, d\omega. \tag{69.5}$$

† Integrando respecto del parámetro de impacto, podemos obtener un resultado análogo para la radiación eficaz en la dispersión de un haz de partículas. Sin embargo, hay que tener presente que este resultado no es válido para la radiación eficaz cuando existe interacción de Coulomb entre las partículas que chocan, ya que entonces la integral respecto de ϱ diverge (logarítmicamente) para ϱ grande. Veremos en el párrafo siguiente que, en este caso, la radiación eficaz a bajas frecuencias depende logarítmicamente de la frecuencia y no se comporta como una constante.

Esta expresión corresponde al caso de radiación dipolar, con potencial vector dado por la fórmula (67.4).

Una aplicación interesante de las fórmulas obtenidas la ofrece la radiación que se produce en la emisión de una nueva partícula cargada (por ejemplo, la emisión de una partícula-β por un núcleo). Hay que considerar este proceso como un cambio instantáneo de la velocidad de la partícula, de cero a su valor real. (Dada la simetría de la fórmula (69.5) respecto de la permutación de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, la radiación que se origina en este proceso coincide con la radiación que se produciría en el proceso inverso — la parada instantánea de la partícula.) El punto esencial en todo esto es que, dado que el « tiempo » del proceso en cuestión es tal que $\tau \to 0$, la condición (69.1) queda efectivamente satisfecha cualquiera que sea la frecuencia †.

PROBLEMA

Determinar la distribución espectral de la radiación total producida cuando se emite una partícula cargada que se mueve con velocidad v.

Solución. De acuerdo con la fórmula (69.4) (en la que haremos $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1 = 0$), tenemos:

$$d\mathcal{E}_\omega = d\omega \frac{e^2 v^2}{4\pi^2 c^3} \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^2} 2\pi \operatorname{sen}\theta \, d\theta.$$

El cálculo de la integral conduce al resultado††:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{e^2}{\pi c}\left(\frac{c}{v}\ln\frac{c+v}{c-v} - 2\right) d\omega. \tag{1}$$

Para $v \ll c$, esta fórmula se convierte en

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2e^2 v^2}{3\pi c^3} d\omega,$$

fórmula que se puede obtener también directamente a partir de (69.5).

§ 70. Radiación en el caso de interacción coulombiana

Deduciremos en este párrafo, con carácter informativo, una serie de fórmulas relativas a la radiación dipolar de un sistema de dos partículas cargadas; se supone

† Sin embargo, la aplicabilidad de estas fórmulas viene limitada por la condición cuántica de que el producto $\hbar\omega$ sea pequeño comparado con la energía cinética total de la partícula.

†† Aunque, conforme hemos señalado ya, el carácter « instantáneo » del proceso hace que la condición (69.1) quede satisfecha para todas las frecuencias, no podemos obtener la energía radiada total integrando (1) respecto de ω, —la integral diverge para frecuencias altas. Conviene hacer notar que, aparte la violación a altas frecuencias de las condiciones que supone el comportamiento clásico, en el presente caso la divergencia procede de la incorrecta formulación del propio problema clásico, en el que la partícula posee una aceleración infinita en el instante inicial.

que las velocidades de las partículas son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz.

El movimiento uniforme del sistema en conjunto (es decir, el movimiento uniforme de su centro de masa) carece de interés, ya que no conduce a radiación; por lo tanto, basta considerar solamente el movimiento relativo de las partículas. Elijamos como origen de coordenadas el centro de masa. El momento dipolar del sistema $\mathbf{d} = e_1\mathbf{r}_1 + e_2\mathbf{r}_2$ se escribe entonces en la forma

$$\mathbf{d} = \frac{e_1 m_2 - e_2 m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r} = \mu\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)r \tag{70.1}$$

donde los índices 1 y 2 se refieren a las dos partículas, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ es el vector que determinan y $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ es la masa reducida.

Consideraremos primero la radiación que acompaña al movimiento elíptico de dos partículas que se atraen entre sí de acuerdo con la ley de Coulomb. Conforme enseña la mecánica †, este movimiento se puede representar como movimiento de una partícula de masa μ que recorre una elipse, cuya ecuación en coordenadas polares es de la forma

$$1 + \epsilon\cos\phi = \frac{a(1-\epsilon^2)}{r}, \tag{70.2}$$

donde el semieje mayor a y la excentricidad ε son iguales a

$$a = \frac{\alpha}{2|\mathcal{E}|}, \quad \epsilon = \sqrt{1 - \frac{2|\mathcal{E}|M^2}{\mu\alpha^2}}. \tag{70.3}$$

$\mathcal{E}$ es aquí la energía total de las partículas (¡prescindiendo de su energía en reposo!) y es negativa para un movimiento finito; $M = \mu r^2\dot{\phi}$ es el momento cinético; α es la constante de la ley de Coulomb:

$$\alpha = |e_1 e_2|.$$

La dependencia temporal de las coordenadas se puede expresar en forma paramétrica:

$$r = a(1 - \epsilon\cos\xi), \quad t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}(\xi - \epsilon\,\mathrm{sen}\,\xi). \tag{70.4}$$

Una revolución completa a lo largo de la elipse corresponde a un cambio del parámetro ξ de 0 a 2π; el período del movimiento es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}.$$

† Véase *Mecánica*, § 15.

Calculemos las componentes de Fourier del momento dipolar. Dado que el movimiento es periódico, se trata de un desarrollo en serie de Fourier. Además, puesto que el momento dipolar es proporcional al vector posición **r**, el problema se reduce al cálculo de las componentes de Fourier de las coordenadas $x = r\cos\phi$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\phi$. La dependencia de x, y respecto del tiempo viene dada en forma paramétrica por las ecuaciones:

$$x = a(\cos\xi - \epsilon), \qquad y = a\sqrt{1-\epsilon^2}\,\mathrm{sen}\,\xi,$$
$$\omega_0 t = \xi - \epsilon\,\mathrm{sen}\,\xi. \tag{70.5}$$

Se ha introducido aquí la frecuencia

$$\omega_0 = 2\pi/T = \sqrt{\alpha/\mu a^3} = \frac{(2|\mathcal{E}|)^{3/2}}{\alpha\mu^{1/2}}.$$

En vez de las componentes de Fourier de las coordenadas, es más conveniente calcular las componentes de Fourier de las velocidades, apoyándonos en que $\dot{x}_n = -i\omega_0 n x_n$, $\dot{y}_n = -i\omega_0 n y_n$. Tenemos:

$$x_n = \frac{\dot{x}_n}{-i\omega_0 n} = \frac{i}{\omega_0 n}\frac{1}{T}\int_0^T e^{i\omega_0 n t}\dot{x}\,dt.$$

Pero $\dot{x}\,dt = dx = -a\,\mathrm{sen}\,\xi\,d\xi$; pasando de la integración respecto de t a la integración respecto de ξ, tenemos así:

$$x_n = -\frac{ia}{2\pi n}\int_0^{2\pi} e^{in(\xi - \epsilon\,\mathrm{sen}\,\xi)}\,\mathrm{sen}\,\xi\,d\xi.$$

Análogamente se encuentra

$$y_n = \frac{ia\sqrt{1-\epsilon^2}}{2\pi n}\int_0^{2\pi} e^{in(\xi-\epsilon\,\mathrm{sen}\,\xi)}\cos\xi\,d\xi = \frac{ia\sqrt{1-\epsilon^2}}{2\pi n\epsilon}\int_0^{2\pi} e^{in(\xi-\epsilon\,\mathrm{sen}\,\xi)}\,d\xi$$

(para pasar de la primera integral a la segunda, hacemos en el integrando $\cos\xi \equiv (\cos\xi - 1/\varepsilon) + 1/\varepsilon$; se calcula entonces la integral que contiene $\cos\xi - 1/\varepsilon$, integral que resulta ser idénticamente nula). Finalmente, nos valdremos de una conocida fórmula de la teoría de funciones de Bessel,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n\xi - x\,\mathrm{sen}\,\xi)}\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\xi - x\,\mathrm{sen}\,\xi)\,d\xi = J_n(x), \tag{70.6}$$

donde $J_n(x)$ es la función de Bessel de orden entero n. Como resultado final, se obtienen las expresiones siguientes para las componentes de Fourier que buscábamos:

$$x_n = \frac{a}{n}J_n'(n\epsilon), \qquad y_n = \frac{ia\sqrt{1-\epsilon^2}}{n\epsilon}J_n(n\epsilon) \tag{70.7}$$

(el apóstrofo en la función de Bessel designa la derivación respecto de su argumento).

La expresión de la intensidad de las componentes monocromáticas de la radiación se obtiene substituyendo x_ω y y_ω en la fórmula

$$I_n = \frac{4\omega_0^4 n^4}{3c^3}\mu^2\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2(|x_\omega|^2+|y_\omega|^2)$$

[véase (67.11)]. Expresando a y ω_0 en función de las características de las partículas, obtenemos finalmente:

$$I_n = \frac{64n^2\mathcal{E}^4}{3c^3a^2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\left[J_n'^2(n\epsilon)+\frac{1-\epsilon^2}{\epsilon^2}J_n^2(n\epsilon)\right]. \tag{70.8}$$

En particular, escribamos la fórmula asintótica que da la intensidad de los armónicos muy elevados (n grande) para el movimiento en una órbita casi parabólica (ϵ próxima a 1). Para ello utilizaremos la fórmula

$$J_n(n\epsilon)\cong\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\Phi\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{2}{3}}(1-\epsilon^2)\right] \tag{70.9}$$

(Φ es la función de Airy; véase la nota en la pág. 212), que es válida para †

$$n\gg 1,\quad 1-\epsilon\ll 1.$$

La substitución en (70.8) da:

$$I_n = \frac{64\cdot 2^{2/3}}{3\pi}\frac{n^{4/3}\mathcal{E}^4}{c^3a^2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\left\{(1-\epsilon^2)\Phi^2\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{2/3}(1-\epsilon^2)\right]+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2}{n}\right)^{2/3}\Phi'^2\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{2/3}(1-\epsilon^2)\right]\right\}. \tag{70.10}$$

Este resultado se puede expresar también mediante la función de McDonald K_ν:

$$I_n = \frac{64}{9\pi^2}\frac{n^2\mathcal{E}^4}{c^3a^2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\left\{K_{1/3}^2\left[\frac{n}{3}(1-\varepsilon^2)^{3/2}\right]+K_{2/3}^2\left[\frac{n}{3}(1-\varepsilon^2)^{3/2}\right]\right\}$$

† Para $n\gg 1$, la contribución principal a la integral

$$J_n(n\epsilon)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos[n(\xi-\epsilon\,\mathrm{sen}\,\xi)]\,d\xi$$

procede de pequeños valores de ξ (para valores no pequeños de ξ el integrando oscila rápidamente). De acuerdo con esto, desarrollemos el argumento del coseno en potencias de ξ:

$$J_n(n\epsilon)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left[n\left(\frac{1-\epsilon^2}{2}\xi+\frac{\xi^3}{6}\right)\right]d\xi;$$

teniendo en cuenta la rápida convergencia de la integral, el límite superior se substituye por ∞; hay que conservar el término en ξ^3, dado que el término de primer orden contiene el pequeño coeficiente $1-\varepsilon\cong\frac{1-\varepsilon^2}{2}$. La integral que precede se reduce a la forma (70.9) mediante una substitución obvia.

(las fórmulas necesarias para ello se deducen en la nota de la pág. 282).

Consideremos ahora el choque de dos partículas cargadas que se atraen, con movimiento relativo que se puede describir como el movimiento de una partícula de masa μ sobre la hipérbola

$$1+\epsilon\cos\phi = \frac{a(\epsilon^2-1)}{r}, \tag{70.11}$$

donde,

$$a = \frac{\alpha}{2\mathcal{E}}, \quad \epsilon = \sqrt{1+\frac{2\mathcal{E}M^2}{\mu\alpha^2}} \tag{70.12}$$

(ahora es $\mathcal{E}>0$). La dependencia de r respecto del tiempo viene dada paramétricamente por las ecuaciones

$$r = a(\epsilon\cosh\xi-1), \quad t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}(\epsilon\,\mathrm{senh}\,\xi-\xi), \tag{70.13}$$

donde el parámetro ξ varía entre $-\infty$ y $+\infty$. Para las coordenadas x, y tenemos:

$$x = a(\epsilon-\cosh\xi), \quad y = a\sqrt{\epsilon^2-1}\,\mathrm{senh}\,\xi. \tag{70.14}$$

El cálculo de las componentes de Fourier (se trata ahora de la representación integral de Fourier) sigue una marcha completamente análoga a la del caso precedente. Al final obtenemos:

$$x_\omega = \frac{\pi a}{\omega}H_{i\nu}^{(1)\prime}(i\nu\epsilon), \quad y_\omega = -\frac{\pi a\sqrt{\epsilon^2-1}}{\omega\epsilon}H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\epsilon). \tag{70.15}$$

donde $H_{i\nu}^{(1)}$ es la función de Hankel de primera especie y orden $i\nu$, y se ha introducido la notación

$$\nu = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\alpha}{\mu a^3}}} = \frac{\omega}{\mu v_0^3} \tag{70.16}$$

(v_0 es la velocidad relativa de las partículas en el infinito; la energía es $\mathcal{E}=\mu v_0^2/2$).† En el cálculo hemos utilizado la conocida fórmula de la teoría de funciones de Bessel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{p\xi-ix\,\mathrm{senh}\,\xi}d\xi = i\pi H_p^{(1)}(ix). \tag{70.17}$$

Substituyendo (70.15) en la fórmula

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{4\omega^4\mu^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2(|x_\omega|^2+|y_\omega|^2)\frac{d\omega}{2\pi}$$

† Obsérvese que la función $H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\epsilon)$ es imaginaria pura, mientras que su derivada $H_{i\nu}^{(1)\prime}(i\nu\epsilon)$ es real.

[véase (67.10)], obtenemos:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{\pi\mu^2\alpha^2\omega^2}{6c^3\mathcal{E}^2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\left\{[H_{i\nu}^{(1)\prime}(i\nu\epsilon)]^2-\frac{\epsilon^2-1}{\epsilon^2}[H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\epsilon)]^2\right\}d\omega. \qquad (70.18)$$

Una magnitud de gran interés es la « radiación eficaz » emitida durante la dispersión de un haz paralelo de partículas (cf. § 68). Para calcularla, multipliquemos $d\mathcal{E}_\omega$ por $2\pi\varrho\, d\varrho$ e integremos respecto de ϱ entre cero e infinito. La integral respecto de ϱ la transformaremos en otra respecto de ε (entre los límites 1 e ∞) valiéndonos de que $2\pi\varrho\, d\varrho = 2\pi a^2\varepsilon\, d\varepsilon$; esta relación se sigue de las definiciones (70.12) en las que el momento cinético M y la energía $\mathcal{E}$ están ligados con el parámetro de impacto ϱ y la velocidad v_0 por

$$M = \mu\varrho v_0,\quad \mathcal{E} = \mu\frac{v_0^2}{2}.$$

La integral que así resulta se calcula mediante la fórmula

$$z\left[Z_p'^2+\left(\frac{p^2}{z^2}-1\right)Z_p^2\right] = \frac{d}{dz}(zZ_pZ_p'),$$

en la que $Z_p(z)$ es una solución arbitraria de la ecuación de Bessel de orden p †. Teniendo en cuenta que para $\varepsilon\to\infty$ la función de Hankel $H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)$ tiende a cero, obtenemos como resultado final la fórmula siguiente:

$$d\varkappa_\omega = \frac{4\pi^2\alpha^3\omega}{3c^3\mu v_0^5}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2|H_{i\nu}^{(1)}(i\nu)|H_{i\nu}^{(1)\prime}(i\nu)\,d\omega. \qquad (70.19)$$

Consideremos los casos límite que corresponden a frecuencias bajas y altas. En la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu(\xi-\operatorname{senh}\xi)}d\xi = i\pi H_{i\nu}^{(1)}(i\nu) \qquad (70.20)$$

que define a la función de Hankel, el único intervalo de la variable de integración ξ que importa es aquel en que el exponente es del orden de la unidad. Por consiguiente, para frecuencias bajas ($\nu\ll 1$), tiene importancia únicamente la región de grandes valores de ξ. Pero para ξ grande, tenemos $\operatorname{senh}\xi\gg\xi$. Por lo tanto, aproximadamente,

$$H_{i\nu}^{(1)}(i\nu)\cong -\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu\operatorname{senh}\xi}d\xi = H_0^{(1)}(i\nu).$$

† Esta fórmula es consecuencia inmediata de la ecuación de Bessel

$$Z''+\frac{1}{z}Z'+\left(1-\frac{p^2}{z^2}\right)Z = 0.$$

De manera análoga se encuentra que

$$H_{i\nu}^{(1)\prime}(i\nu) \cong H_0^{(1)\prime}(i\nu).$$

Finalmente, utilizando la conocida expresión aproximada (para x pequeño) de la teoría de funciones de Bessel:

$$iH_0^{(1)}(ix) \cong \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x}$$

($\gamma = e^C$, donde C es la constante de Euler; $\gamma = 1{,}781...$), obtenemos la siguiente expresión para la radiación eficaz a bajas frecuencias:

$$d\varkappa_\omega = \frac{16\alpha^2}{3v_0^2 c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \ln\left(\frac{2\mu v_0^3}{\gamma\omega\alpha}\right) d\omega, \text{ para } \omega \ll \frac{\mu v_0^3}{\alpha}. \tag{70.21}$$

Ésta depende, pues, logarítmicamente de la frecuencia.

Para frecuencias altas ($\nu \gg 1$), por el contrario, la región en que ξ es pequeña es la que cuenta en la integral (70.20). De acuerdo con esto, desarrollaremos el integrando en potencias de ξ, con lo que se obtendrá, aproximadamente,

$$H_{i\nu}^{(1)}(i\nu) \cong -\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i\nu\xi^3}{6}} d\xi = -\frac{2i}{\pi}\,\mathrm{Re}\left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{i\nu\xi^3}{6}} d\xi\right).$$

Substituyendo $\frac{i\nu\xi^3}{6} = \eta$, esta integral se reduce a la función Γ y se obtiene finalmente:

$$H_{i\nu}^{(1)}(i\nu) \cong -\frac{i}{\pi\sqrt{3}}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

De manera análoga se encuentra:

$$H_{i\nu}^{(1)\prime}(i\nu) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

Finalmente, utilizando la conocida fórmula de la teoría de la función Γ,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi x},$$

obtenemos para la radiación eficaz a altas frecuencias:

$$d\varkappa_\omega = \frac{16\pi\alpha^2}{3^{1/3}v_0^2 c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 d\omega, \text{para } \omega \gg \frac{\mu v_0^3}{\alpha}, \tag{70.22}$$

esto es, una expresión que no depende de la frecuencia.
Pasemos ahora a la radiación que acompaña al choque de dos partículas que se repelen entre sí según la ley $U = \frac{a}{r}$ ($a>0$). El movimiento se efectúa a lo largo de una hiperbola

$$-1+\epsilon\cos\phi = \frac{a(\epsilon^2-1)}{r}. \tag{70.23}$$

La dependencia temporal viene dada paramétricamente por las ecuaciones

$$x = a(\epsilon+\cosh\xi), \quad y = a\sqrt{\epsilon^2-1}\,\operatorname{senh}\xi,$$
$$t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}\,(\epsilon\operatorname{senh}\xi+\xi) \tag{70.24}$$

(a y ϵ como en (70.12)). Todos los cálculos relativos a este caso se reducen inmediatamente a los que preceden, de forma que no es necesario efectuarlos de nuevo. En efecto, la integral

$$x_\omega = \frac{ia}{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu(\epsilon\operatorname{senh}\xi+\xi)}\operatorname{senh}\xi\,d\xi$$

para la componente de Fourier de la coordenada x se reduce, mediante la substitución $\xi\to i\pi-\xi$, a la misma integral que corresponde al caso de atracción, multiplicada por $e^{-\pi\nu}$; lo mismo vale para y_ω.

Las expresiones para las componentes de Fourier x_ω, y_ω en el caso de repulsión difieren así de las correspondientes expresiones para el caso de atracción en el factor $e^{-\pi\nu}$. El único cambio en las fórmulas relativas a la radiación es, por consiguiente, un factor adicional $e^{-2\pi\nu}$. En particular, para bajas frecuencias se obtiene la fórmula anterior (70.21) (dado que para $\nu\ll 1$, es $e^{-2\pi\nu}\cong 1$). Para altas frecuencias, la radiación eficaz tiene la forma

$$d\varkappa_\omega = \frac{16\pi\alpha^2}{3^{3/2}v_0^2c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\exp\left(-\frac{2\pi\omega\alpha}{\mu v_0^3}\right)d\omega, \text{ para } \omega \gg \frac{\mu v_0^3}{\alpha}. \tag{70.25}$$

Disminuye, pues, exponencialmente cuando aumenta la frecuencia.

Problemas

1. Determinar la intensidad total media de la radiación en el movimiento elíptico de dos cargas que se atraen.

Solución. De la expresión (70.1) para el momento dipolar se deduce para la intensidad total de la radiación:

$$I = \frac{2\mu^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \ddot{\mathbf{r}}^2 = \frac{2\alpha^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{1}{r^4},$$

donde hemos tenido en cuenta la ecuación del movimiento $\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\alpha\mathbf{r}/r^3$. Expresemos la coordenada r en función de ϕ mediante la ecuación de la órbita (70.2) y, dado que $dt = \mu r^2\, d\phi/M$, substituyamos la integración respecto del tiempo por una integración respecto del ángulo ϕ (de 0 a 2π). Se encuentra así para la intensidad media:

$$\bar{I} = \frac{1}{T}\int_0^T I\,dt = \frac{2^{3/2}}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{\mu^{5/2}\alpha^3 |\mathcal{E}|^{3/2}}{M^5}\left(3 - \frac{2|\mathcal{E}|M^2}{\mu\alpha^2}\right).$$

2. Calcular la radiación total $\Delta\mathcal{E}$ en el choque de dos partículas cargadas.

Solución. En el caso de atracción, la trayectoria es la hipérbola (70.11), y en el caso de repulsión, la (70.12). El ángulo ϕ_0 formado por las asíntotas de la hipérbola y su eje resulta de $\pm\cos\phi_0 = 1/\epsilon$, y el ángulo de desviación de las partículas (en el sistema de coordenadas en el que el centro de masas se encuentra en reposo) es $\chi = |\pi - 2\phi_0|$. El cálculo sigue la misma marcha que en el problema 1 (la integral respecto de ϕ se toma entre los límites $-\phi_0$ y $+\phi_0$). El resultado en el caso de atracción es:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{\mu^3 v_0^5}{3c^3|\alpha|}\,\mathrm{tg}^3\frac{\chi}{2}\left\{(\pi+\chi)\left(1+3\,\mathrm{tg}^2\frac{\chi}{2}\right)+6\,\mathrm{tg}\frac{\chi}{2}\right\}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2,$$

y en el de repulsión:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{\mu^3 v_0^5}{3c^3\alpha}\,\mathrm{tg}^3\frac{\chi}{2}\left\{(\pi-\chi)\left(1+3\,\mathrm{tg}^2\frac{\chi}{2}\right)-6\,\mathrm{tg}\frac{\chi}{2}\right\}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2.$$

En ambos casos, se toma para χ el ángulo positivo determinado por la relación

$$\mathrm{ctg}\frac{\chi}{2} = \frac{\mu v_0^2 \varrho}{\alpha}.$$

En el choque directo ($\varrho \to 0$, $\chi \to \pi$) de cargas que se repelen entre sí se tiene, pues,

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{8\mu^3 v_0^5}{45c^3\alpha}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2.$$

3. Determinar la radiación total eficaz en la dispersión de un haz de partículas en un campo de Coulomb repulsivo.

Solución. La cantidad que se pide es:

$$\varkappa = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} I\,dt\, 2\pi\varrho\, d\varrho = \frac{2\alpha^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 2\pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r^4}\, dt \cdot \varrho\, d\varrho.$$

Substituyamos la integración respecto del tiempo por la integración respecto de r a lo largo de la trayectoria de la carga haciendo $dt = dr/v_r$, donde la velocidad radial $v_r \equiv \dot{r}$ se expresa en función de r mediante la fórmula

$$v_r = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left[\mathcal{E} - \frac{M^2}{2\mu r^2} - U(r)\right]} = \sqrt{v_0^2 - \frac{\varrho^2 v_0^2}{r^2} - \frac{2\alpha}{\mu r}}.$$

La integración respecto de r se efectúa entre los límites desde ∞ a la distancia de máximo acercamiento $r_0 = r_0(\varrho)$ (el punto en que $v_r = 0$), y luego desde r_0 otra vez hasta infinito; esto reduce la integral a dos veces la integral desde r_0 a ∞. El cálculo de la integral doble se simplifica cambiando el orden de integración—integrando primero respecto de ϱ y luego respecto de r. El resultado del cálculo es:

$$\varkappa = \frac{8\pi}{9c^3}\alpha\mu v_0\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2.$$

4. Determinar la distribución angular de la radiación total emitida cuando una carga pasa por delante de otra, si la velocidad es tan grande (si bien todavía pequeña comparada con la velocidad de la luz) que la desviación respecto del movimiento rectilíneo se puede considerar pequeña.

Solución. El ángulo de desviación es pequeño si la energía cinética $\mu v^2/2$ es grande comparada con la energía potencial, que es del orden de a/ϱ ($\mu v^2 \gg a/\varrho$). Elijamos el plano del movimiento como plano x, y, con origen en el centro de masas y el eje X paralelo a la velocidad. En primera aproximación, la trayectoria es la recta $x = vt$, $y = \varrho$. En segunda aproximación, las ecuaciones del movimiento nos dan

$$\mu\ddot{x} = \frac{\alpha}{r^2}\frac{x}{r} \cong \frac{\alpha v t}{r^3}, \qquad \mu\ddot{y} = \frac{\alpha}{r^2}\frac{y}{r} \cong \frac{\alpha\varrho}{r^3},$$

con

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \cong \sqrt{\varrho^2+v^2t^2}.$$

Utilizando la fórmula (67.7), se tiene:

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}} = do\,\frac{\mu^2}{4\pi c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}[\ddot{x}^2+\ddot{y}^2-(\ddot{x}n_x+\ddot{y}n_y)^2]\,dt,$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario en la dirección de do. Expresando el integrando en función de t y efectuando la integración, obtenemos:

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}} = \frac{\alpha^2}{32vc^3\varrho^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2(4-n_x^2-3n_y^2)\,do.$$

§ 71. Radiación cuadripolar y radiación dipolar magnética

Consideremos ahora la radiación asociada con los términos siguientes en el desarrollo del potencial vector en potencias de la razón a/λ de las dimensiones del sistema a la longitud de onda. Dado que a/λ se supone pequeño, estos términos son, en general, pequeños comparados con el primero (dipolar), pero son importantes cuando el momento dipolar del sistema es nulo, de forma que no puede producirse la radiación dipolar.

Desarrollando el integrando en (66.2),

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{c}}\,dV,$$

en potencias de $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}/c$, y conservando ahora los dos primeros términos se encuentra;

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'}\, dV + \frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial}{\partial t'}\int (\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\mathbf{j}_{t'}\, dV.$$

Substituyendo $\mathbf{j} = \varrho\mathbf{v}$ y pasando a cargas puntuales, obtenemos:

$$\mathbf{A} = \frac{\sum e\mathbf{v}}{cR_0} + \frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial}{\partial t}\sum e\mathbf{v}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}). \tag{71.1}$$

Aquí y en lo que sigue (como en el § 67) prescindimos, para abreviar, del índice t' en todas las cantidades del segundo miembro.

En el segundo término hagamos:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\mathbf{v}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) - \frac{1}{2}\mathbf{r}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) + \frac{1}{2}(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\times\mathbf{n}.$$

Se encuentra entonces para $\mathbf{A}$ la expresión

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{1}{2c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e\mathbf{r}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) + \frac{1}{cR_0}(\dot{\mathfrak{m}}\times\mathbf{n}), \tag{71.2}$$

donde $\mathbf{d}$ es el momento dipolar del sistema y $\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\sum e\mathbf{r}\times\mathbf{v}$ es su momento magnético. Para seguir la transformación, obsérvese que, sin cambiar el campo, podemos sumar a $\mathbf{A}$ un vector cualquiera proporcional a $\mathbf{n}$, ya que, según la fórmula (66.3), $\mathbf{H}$ y $\mathbf{E}$ no cambian por ello. Podemos así substituir (71.2) por

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{1}{6c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e[3\mathbf{r}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{n}r^2] + \frac{1}{cR_0}\dot{\mathfrak{m}}\times\mathbf{n}.$$

Pero la expresión que sigue al signo de derivación $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ es precisamente el producto $n_\beta D_{\alpha\beta}$ del vector $\mathbf{n}$ por el tensor momento cuadripolar $D_{\alpha\beta} = \sum e(3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta}r^2)$ (véase § 41). Introduzcamos el vector $\mathbf{D}$ de componentes $D_\alpha = D_{\alpha\beta}n_\beta$; se obtiene así la expresión final para el potencial vector:

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{1}{6c^2R_0}\ddot{\mathbf{D}} + \frac{1}{cR_0}\dot{\mathfrak{m}}\times\mathbf{n}. \tag{71.3}$$

Conocido **A**, podemos determinar los campos **H** y **E** de la radiación mediante la fórmula general (66.3):

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2 R_0}\left\{\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n} + \frac{1}{6c}\dddot{\mathbf{D}}\times\mathbf{n} + (\ddot{\mathbf{m}}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n}\right\},$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2 R_0}\left\{(\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n} + \frac{1}{6c}(\dddot{\mathbf{D}}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n} + \mathbf{n}\times\ddot{\mathbf{m}}\right\}. \qquad (71.4)$$

La intensidad *dI* de la radiación emitida en el ángulo sólido *do* viene dada por (66.6). Calculemos ahora la radiación total, es decir, la energía radiada por el sistema en todas direcciones por unidad de tiempo. Para ello, determinaremos el valor medio de *dI* para todas las direcciones **n**; la radiación total es igual a este valor medio multiplicado por 4π. Al promediar el cuadrado del campo magnético, se anulan todos los productos cruzados en los tres términos de **H**, de forma que subsisten sólo los valores medios de los cuadrados de cada uno de ellos. Un cálculo sencillo † da el siguiente resultado para *I*:

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2 + \frac{1}{180c^5}\dddot{D}_{\alpha\beta}^2 + \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{m}}^2. \qquad (71.5)$$

La radiación total consta así de tres partes independientes; se llaman, respectivamente, radiación *dipolar*, radiación *cuadripolar* y radiación *dipolar magnética*.

Conviene hacer notar que la radiación dipolar magnética no se presenta, de hecho, en muchos casos. Por ejemplo, no se presenta cuando en un sistema la razón de la carga a la masa es la misma para todas las cargas en movimiento (en este caso también se anula la radiación dipolar, conforme se indicó en el § 67). En efecto, en uno de estos sistemas el momento magnético es proporcional al momento cinético (véase § 44) y, por consiguiente, dado que éste se conserva, es $\dot{\mathbf{m}} = 0$. Por la misma razón (cf. el problema del § 44), la radiación dipolar magnética no se produce en un sistema que consta de tan sólo dos partículas (si bien en este caso nada podemos concluir acerca de la radiación dipolar).

---

† He aquí un método conveniente para determinar valores medios de los productos de componentes de un vector unitario. Dado que **n** es un vector unitario, $\overline{n_\alpha n_\beta}$, en tanto que tensor simétrico, se puede expresar en función del tensor unidad $\delta_{\alpha\beta}$, esto es, $\overline{n_\alpha n_\beta} = a\delta_{\alpha\beta}$; contrayendo respecto del par de índices α, β y recordando que $n_\alpha^2 = 1$, se encuentra que $a = 1/3$.

Para el valor medio del producto de cuatro componentes se puede escribir, análogamente,

$$\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta} = a(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})$$

(recordando la simetría de $n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta$ respecto de los cuatro índices); contrayendo respecto de los pares de índices α, β y γ, δ, encontramos $a = \frac{1}{15}$.

PROBLEMA

Calcular la radiación eficaz total en la dispersión de un haz de partículas cargadas por partículas idénticas a ellas.

Solución. En el choque de partículas idénticas no se produce radiación dipolar (ni tampoco radiación dipolar magnética), de manera que hemos de calcular la radiación cuadripolar. El tensor momento cuadripolar de un sistema de dos partículas idénticas (respecto de su centro de masa) es igual a

$$D_{\alpha\beta} = \frac{e}{2}(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta}),$$

donde x_α son las componentes del vector determinado por las dos partículas. Después de derivar $D_{\alpha\beta}$ tres veces, expresaremos las derivadas primera, segunda y tercera de x_α respecto del tiempo en función de la velocidad relativa de las partículas v_α en la forma siguiente:

$$\dot{x}_\alpha = v, \quad \mu\ddot{x}_\alpha = \frac{m}{2}\ddot{x}_\alpha = \frac{e^2 x_\alpha}{r^3}, \quad \frac{m}{2}\dddot{x}_\alpha = e^2\frac{v_\alpha r - 3x_\alpha v_r}{r^4},$$

donde $v_r = \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}/r$ es la componente radial de la velocidad (la segunda igualdad es la ecuación del movimiento de la carga, y la tercera se obtiene derivando la segunda). El cálculo conduce a la siguiente expresión para la intensidad:

$$I = \frac{\dddot{D}_{\alpha\beta}^2}{180c^5} = \frac{2e^6}{15m^2c^5}\frac{1}{r^4}(v^2 + 11v_\phi^2)$$

($v^2 = v_r^2 + v_\phi^2$); v y v_ϕ se pueden expresar en función de r mediante las igualdades

$$v^2 = v_0^2 - \frac{4e^2}{mr}, \qquad v_\phi = \frac{\varrho v_0}{r}.$$

Substituyamos la integración respecto del tiempo por una integración respecto de r de la misma manera que se hizo en el problema 3 del § 70, es decir, escribamos,

$$dt = \frac{dr}{v_r} = \frac{dr}{\sqrt{v_0^2 - \dfrac{\varrho^2 v_0^2}{r^2} - \dfrac{4e^2}{mr}}}.$$

En la integral doble (respecto ϱ y r), integremos primero respecto de ϱ y luego respecto de r. El resultado del cálculo es:

$$\varkappa = \frac{4\pi}{9}\frac{e^4 v_0^2}{mc^5}.$$

§ 72. Campo de radiación a pequeñas distancias

Las fórmulas de la radiación dipolar se dedujeron para el campo a distancias grandes comparadas con la longitud de onda (y, sobre todo, grandes respecto de las dimensiones del sistema radiante). En este párrafo supondremos, como antes, que la longitud de onda es grande frente a las dimensiones del sistema, pero consideraremos el campo a distancias que, si bien son grandes comparadas con aquellas dimensiones, son *del mismo orden que* la longitud de onda.

La fórmula (67.4) para el potencial vector

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\dot{\mathbf{d}} \tag{72.1}$$

conserva su validez, dado que al deducirla nos hemos apoyado solamente en el hecho de que R_0 es grande frente a las dimensiones del sistema. Sin embargo, el campo no se puede considerar ahora como una onda plana ni aun en pequeñas regiones. Por consiguiente, las fórmulas (67.5) y (67.6) para los campos eléctrico y magnético ya no son aplicables, de manera que para calcularlos debemos primero determinar tanto $\mathbf{A}$ como ϕ.

La fórmula relativa al potencial escalar se puede deducir directamente de la que corresponde al potencial vector $\mathbf{A}$ utilizando la condición general (62.1) impuesta a los potenciales:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0,$$

Substituyendo (72.1) en esta expresión e integrando respecto del tiempo, se encuentra:

$$\phi = -\operatorname{div}\frac{\mathbf{d}}{R_0}. \tag{72.2}$$

Se ha omitido la constante de integración (que es una función arbitraria de las coordenadas), dado que tan sólo nos interesa la parte variable del potencial. Recordemos que en la fórmula (72.2), al igual que en (72.1), el valor de $\mathbf{d}$ debe tomarse en el instante $t' = t - \frac{R_0}{c}$ †.

Ahora no es ya difícil calcular los campos eléctrico y magnético. De las fórmulas usuales, que ligan $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ a los potenciales, se sigue:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\dot{\mathbf{d}}}{R_0}, \tag{72.3}$$

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{\mathbf{d}}{R_0} - \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\mathbf{d}}}{R_0}. \tag{72.4}$$

---

† A veces se introduce el llamado vector de Hertz, definido por

$$\mathbf{Z} = -\frac{1}{R_0}\mathbf{d}\left(t - \frac{R_0}{c}\right).$$

Entonces,

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{Z}}, \quad \phi = \operatorname{div}\mathbf{Z}.$$

La expresión para **E** se puede escribir en otra forma, observando que $\mathbf{d}_{t'}/R_0$ al igual que cualquier función de las coordenadas y del tiempo de la forma $\frac{1}{R_0} f\left(t-\frac{R_0}{c}\right)$ satisface la ecuación de las ondas:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathbf{d}}{R_0}\right) = \Delta\left(\frac{\mathbf{d}}{R_0}\right).$$

Además, utilizando la conocida fórmula

$$\text{rot rot } \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \Delta\mathbf{a},$$

encontramos que

$$\mathbf{E} = \text{rot rot } \frac{\mathbf{d}}{R_0}. \tag{72.5}$$

Los resultados obtenidos determinan el campo a distancias que son del orden de la longitud de onda. Hay que tener en cuenta que en todas estas fórmulas no es lícito sacar $1/R_0$ fuera del signo de derivación respecto de las coordenadas, ya que la razón de los términos que contienen $1/R_0^2$ a los términos con $1/R_0$ es precisamente del orden de λ/R_0.

Finalmente, escribiremos las fórmulas que dan las componentes de Fourier del campo. Para determinar $\mathbf{H}_\omega$ substituyamos en (72.3) en vez de **H** y **d** sus componentes monocromáticas, es decir, $\mathbf{H}_\omega e^{-i\omega t}$ y $\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t}$, respectivamente. Sin embargo, debemos recordar que las cantidades que aparecen en los segundos miembros de las ecuaciones (72.1) a (72.5) se refieren al instante $t' = t - \frac{R_0}{c}$. Por lo tanto, debemos substituir en vez de **d** la expresión

$$\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)} = \mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t + ikR_0}.$$

Efectuando la substitución y dividiendo por $e^{-i\omega t}$, se encuentra:

$$\mathbf{H}_\omega = -ik \text{ rot } \left(\mathbf{d}_\omega \frac{e^{ikR_0}}{R_0}\right) = ik\mathbf{d}_\omega \times \nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0}.$$

o bien, derivando,

$$\mathbf{H}_\omega = ik\mathbf{d}_\omega \times \mathbf{n}\left(\frac{ik}{R_0} - \frac{1}{R_0^2}\right) e^{ikR_0}, \tag{72.6}$$

donde **n** es el vector unidad correspondiente a $\mathbf{R}_0$.

De manera análoga, a partir de (72.4) se obtiene:

$$\mathbf{E}_\omega = k^2 \mathbf{d}_\omega \frac{e^{ikR_0}}{R_0} + (\mathbf{d}_\omega \cdot \nabla)\nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0},$$

y derivando resulta,

$$\mathbf{E}_\omega = \mathbf{d}_\omega \left(\frac{k^2}{R_0} + \frac{ik}{R_0^2} - \frac{1}{R_0^3} \right) e^{ikR_0} + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_\omega) \left(-\frac{k^2}{R_0} - \frac{3ik}{R_0^2} + \frac{3}{R_0^3} \right) e^{ikR_0}. \qquad (72.7)$$

A distancias grandes comparadas con la longitud de onda ($kR_0 \gg 1$), podemos prescindir de los términos en $1/R_0^2$ y $1/R_0^3$ en las fórmulas (72.5) y (72.6), y obtenemos así de nuevo el campo en la « zona de ondas »,

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{k^2}{R_0} \mathbf{n} \times (\mathbf{d}_\omega \times \mathbf{n}) e^{ikR_0}, \qquad \mathbf{H}_\omega = -\frac{k^2}{R_0} \mathbf{d}_\omega \times \mathbf{n} e^{ikR_0}.$$

En cambio, a distancias que son pequeñas respecto de la longitud de onda ($kR_0 \ll 1$), prescindiremos de los términos en $1/R_0$ y en $1/R_0^2$ y haremos $e^{ikR_0} \cong 1$; entonces

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{1}{R_0^3} \{ 3\mathbf{n}(\mathbf{d}_\omega \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{d}_\omega \},$$

lo que corresponde al campo estático de un dipolo eléctrico (§ 40); en esta aproximación, naturalmente, el campo magnético se anula.

Problema

Determinar los potenciales del campo de radiación cuadripolar y dipolar magnética a cortas distancias.

Solución. Suponiendo, para simplificar, que no existe radiación dipolar, tenemos (cf. el cálculo llevado a cabo en el § 71)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}_{t-\frac{R}{c}} \frac{dV}{R} \cong -\frac{1}{c} \int (\mathbf{r} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c}}}{R_0} dV$$

donde hemos desarrollado el integrando en potencias de $\mathbf{r} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}$. En contraste con lo que se hizo en § 71, el factor $1/R_0$ no se puede llevar aquí fuera del signo de derivación. Permutemos el operador de derivación y el símbolo de integración y escribamos la integral en forma de tensor:

$$A_\alpha = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial X_\beta} \int \frac{x_\beta j_\alpha}{R_0} dV$$

(X_β son las componentes del vector posición $\mathbf{R}_0$). Pasando de la integral a una suma respecto de las cargas, se encuentra:

$$A_\alpha = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial X_\beta} \frac{\left(\sum e v_\alpha x_\beta \right)_{t'}}{R_0}.$$

De la misma manera que en el § 71, esta expresión se descompone en una parte cuadripolar y en una parte dipolar magnética. Los correspondientes potenciales escalares se calculan a partir del

potencial vector de la misma manera que en el texto. El resultado para la radiación cuadripolar es:

$$A_\alpha = -\frac{1}{6c}\frac{\partial}{\partial X_\beta}\frac{\dot{D}_{\alpha\beta}}{R_0}, \quad \phi = \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\frac{D_{\alpha\beta}}{R_0},$$

y para la radiación dipolar magnética:

$$\mathbf{A} = \operatorname{rot}\frac{\mathfrak{m}}{R_0}, \quad \phi = 0$$

(todas las cantidades en los segundos miembros de estas igualdades se refieren, como de ordinario, al instante $t' = t - \frac{R_0}{c}$).

Las intensidades del campo de la radiación dipolar magnética son:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\dot{\mathfrak{m}}}{R_0}, \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\mathfrak{m}}{R_0}.$$

Comparando con (72.3), (72.4), vemos que, en el caso de un dipolo magnético, **E** y **H** se expresan en función de $\mathfrak{m}$ de la misma manera que $-\mathbf{H}$ y **E** se expresan en función de **d** en el caso de un dipolo eléctrico.

Las componentes espectrales de los potenciales de la radiación cuadripolar son

$$A_\alpha^{(\omega)} = \frac{ik}{6}D_{\alpha\beta}^{(\omega)}\frac{\partial}{\partial X_\beta}\frac{e^{ikR_0}}{R_0}, \qquad \phi^{(\omega)} = \frac{1}{6}D_{\alpha\beta}^{(\omega)}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\frac{e^{ikR_0}}{R_0}.$$

Debido a su complejidad, no escribiremos aquí las expresiones correspondientes al campo.

§ 73. Radiación emitida por una carga que se mueve rápidamente

Consideremos ahora una partícula cargada que se mueve con una velocidad que no es pequeña comparada con la velocidad de la luz.

Las fórmulas del § 67, deducidas en el supuesto de que $v \ll c$, no son inmediatamente aplicables a este caso. Podemos, sin embargo, considerar la partícula en un sistema de referencia en el que se encuentra en reposo en un instante dado; en este sistema de referencia, aquellas fórmulas, claro está, son válidas (obsérvese que ello es posible solamente en el caso de una sola partícula en movimiento; para un sistema de varias partículas no existe, en general, ningún sistema de referencia en el que todas las partículas se encuentren simultáneamente en reposo).

En este sistema particular de referencia, la partícula radia durante el tiempo dt la energía

$$d\mathcal{E} = \frac{2e^2}{3c^3}w^2\,dt \tag{73.1}$$

[de acuerdo con la fórmula (67.9)], donde w es la aceleración de la partícula en dicho sistema de referencia. En él, el impulso total « radiado » es, en cambio, igual a cero:

$$d\mathbf{P} = 0. \tag{73.2}$$

En efecto, el impulso emitido es igual a la integral del flujo de impulso en el campo de radiación extendida a una superficie cerrada que rodee a la partícula. Pero debido a la simetría de la radiación dipolar, los impulsos emitidos en sentidos opuestos son iguales en valor absoluto y opuestos en sentido; por consiguiente, la integral se anula idénticamente.

Para pasar a un sistema de referencia arbitrario, escribamos las fórmulas (73.1) y (73.2) en forma cuadridimensional. Es fácil ver que la « radiación de cuadrimpulso » dP_i se debe escribir

$$dP^i = \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}\right)dx^i = -\frac{2e^2}{3c}\left(\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}\right)u^i\,ds. \tag{73.3}$$

En efecto, en el sistema de referencia en el que la partícula está en reposo, las componentes espaciales de la cuadrivelocidad u^i son iguales a cero, $\left(\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}\right) = -\frac{w^2}{c^4}$; y, por consiguiente, las componentes espaciales de dP^i se anulan y la componente temporal conduce a la igualdad (73.1).

El cuadrimpulso total radiado durante el paso de la partícula por un campo electromagnético dado es igual a la integral de (73.3), esto es,

$$\Delta P^i = -\frac{2e^2}{3c}\int\left(\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}\right)dx^i \tag{73.4}$$

Escribamos esta fórmula en otra forma, expresando la cuadriaceleración du^i/ds en función del tensor del campo electromagnético exterior y valiéndonos de la ecuación del movimiento (23.4):

$$mc\frac{du_k}{ds} = \frac{e}{c}F_{kl}u^l.$$

Obtenemos entonces:

$$\Delta P^i = -\frac{2e^4}{3m^2c^5}\int(F_{kl}u^l)\,(F^{km}u_m)\,dx^i. \tag{73.5}$$

La componente temporal de (73.4) o (73.5) da la energía radiada total $\Delta\mathcal{E}$. Substituyendo en vez de las cantidades cuadridimensionales sus expresiones en fun-

ción de cantidades en el espacio de tres dimensiones, se obtiene:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{2e^2}{3c^3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^2 - \dfrac{(\mathbf{v}\times\mathbf{w})^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^3}\,dt \tag{73.6}$$

($\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}}$ es la aceleración de la partícula), o bien, en función de los campos exteriores eléctrico y magnético:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{2e^4}{3m^2c^3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left\{\mathbf{E}+\dfrac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right\}^2 - \dfrac{1}{c^2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{v})^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\,dt. \tag{73.7}$$

Las expresiones correspondientes al impulso radiado total difieren de éstas en un factor $\mathbf{v}$ más en el integrando.

La fórmula (73.7) pone claramente de manifiesto que para velocidades próximas a la velocidad de la luz, la energía total radiada por unidad de tiempo varía en esencia con la velocidad como $\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{-1}$, esto es, proporcionalmente al cuadrado de la energía de la partícula en movimiento. La única excepción es el movimiento en un campo eléctrico paralelamente a la dirección del campo. En este caso el factor $\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)$, que aparece en el denominador, se reduce con un factor idéntico en el numerador y la radiación resulta independiente de la energía de la partícula.

Finalmente, consideremos el problema de la distribución angular de la radiación emitida por una carga que se mueve rápidamente. Para resolverlo, es conveniente utilizar las expresiones de Lienard-Wiechert para los campos, (63.8) y (63.9). A grandes distancias debemos conservar solamente el término de orden menor en $1/R$ [el segundo término en la fórmula (63.8)]. Introduciendo el vector unitario $\mathbf{n}$ en la dirección de la radiación ($\mathbf{R} = \mathbf{n}R$), obtenemos así para el campo producido por la carga las fórmulas

$$\mathbf{E} = \frac{e}{c^2R}\frac{\mathbf{n}\times\left\{\left(\mathbf{n}-\dfrac{\mathbf{v}}{c}\right)\times\mathbf{w}\right\}}{\left(1-\dfrac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^3}, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{n}\times\mathbf{E}, \tag{73.8}$$

donde todas las cantidades que aparecen en los segundo miembros se refieren al instante retardado $t' = t - \dfrac{R}{c}$.

La intensidad radiada en el ángulo sólido do es $dI = \frac{c}{4\pi} E^2 R^2\, do$. Desarrollando E^2, se encuentra:

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3}\left\{\frac{2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})}{c\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^5} + \frac{\mathbf{w}^2}{\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^4} - \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})^2}{\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^6}\right\} do. \qquad (73.9)$$

Si queremos determinar la distribución angular de la radiación total emitida durante todo el movimiento de la partícula, deberemos integrar la intensidad respecto del tiempo. Al hacerlo, es importante recordar que el integrando es una función de t'; por consiguiente, debemos escribir

$$dt = \frac{\partial t}{\partial t'} dt' = \left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\right) dt' \qquad (73.10)$$

[véase (63.6)], después de lo cual la integración respecto de t' se efectúa sin más. Tenemos así la expresión siguiente para la radiación total en el elemento de ángulo sólido do:

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}} = \frac{e^2}{4\pi c^3} do \int^{\cdot}\left\{\frac{2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})}{c\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^4} + \frac{\mathbf{w}^2}{\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^3} - \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})^2}{\left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^5}\right\} dt'. \qquad (73.11)$$

De (73.9) se deduce que, en general, la distribución angular de la radiación es bastante complicada. En el caso ultrarrelativista $\left(1-\frac{v}{c} \ll 1\right)$ dicha distribución ofrece un rasgo característico, ligado con la presencia de potencias elevadas de la diferencia $1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{c}$ en los denominadores de los diferentes términos de aquella expresión. Así, la intensidad es grande en un estrecho intervalo angular en el que la diferencia $1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{c}$ es pequeña. Llamando θ el pequeño ángulo formado por $\mathbf{n}$ y $\mathbf{v}$, tenemos:

$$1-\frac{v}{c}\cos\theta \cong 1-\frac{v}{c}+\frac{\theta^2}{2};$$

esta diferencia es pequeña $\left(\sim 1-\frac{v}{c}\right)$ para $\theta \sim \sqrt{1-\frac{v}{c}}$, o lo que es lo mismo, para

$$\theta \sim \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \qquad (73.12)$$

Una partícula ultrarrelativista radia así esencialmente en la dirección de su propio movimiento, dentro del pequeño intervalo angular (73.12) en torno de la dirección de su velocidad.

Hay que señalar también que, para una velocidad y una aceleración de la partícula arbitrarias, existirán siempre dos direcciones en las que la intensidad radiada es igual a cero. Estas direcciones son aquellas para las que el vector $\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}$ es paralelo al vector $\mathbf{w}$, de modo que el campo (73.8) se anula (véase también el problema 2 al final de este párrafo).

Si la velocidad y la aceleración de la partícula son paralelas, se tendrá:

$$\mathbf{H}=\frac{e}{c^2R}\frac{\mathbf{w}\times\mathbf{n}}{\left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^3},$$

y la intensidad resulta ser:

$$dI=\frac{e^2}{4\pi c^3}\frac{w^2\operatorname{sen}^2\theta}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^6}d\sigma. \tag{73.13}$$

Ésta es, naturalmente, simétrica respecto de la dirección común a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, y se anula en el sentido de la velocidad ($\theta=0$) y en el sentido opuesto ($\theta=\pi$). En el caso ultrarrelativista, la intensidad como función de θ presenta un pronunciado doble máximo en la región (73.12), con un « valle » que desciende hasta cero para $\theta=0$.

En cambio, si la velocidad y la aceleración son perpendiculares entre sí, de (73.9) se deduce que:

$$dI=\frac{e^2w^2}{4\pi c^3}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^4}-\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^6}\right]do, \tag{73.14}$$

donde θ es, como antes, el ángulo formado por $\mathbf{n}$ y $\mathbf{v}$, y ϕ es el ángulo acimutal del vector $\mathbf{n}$ respecto del plano que pasa por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Esta intensidad es simétrica sólo respecto del plano $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y se anula en las dos direcciones de este plano que forman el ángulo $\theta=\arccos(v/c)$ con la velocidad.

Problemas

1. Determinar la radiación total emitida por una partícula relativista de carga e_1, que con parámetro de impacto ϱ pasa por el campo de Coulomb de un centro fijo (con potencial $\phi=e_2/r$).

Solución. Al atravesar el campo la partícula relativista apenas se ve desviada †. Podemos por consiguiente considerar la velocidad v en (73.7) como constante, de manera que el campo en la posición de la partícula es:

$$\mathbf{E} = \frac{e_2\mathbf{r}}{r^3} \cong \frac{e_2\mathbf{r}}{(\varrho^2+v^2t^2)^{\frac{3}{2}}},$$

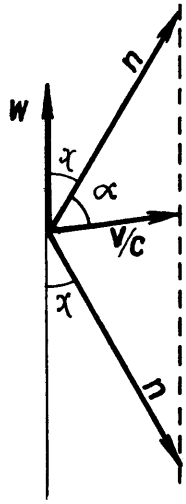

FIG. 15.

con $x = vt$, $y = \varrho$. Efectuando la integración respecto del tiempo en (73.7), obtenemos:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{\pi e_1^4 e_2^2}{12m^2c^3\varrho^3 v}\,\frac{4c^2-v^2}{c^2-v^2}.$$

2. Determinar las direcciones para las que se anula la intensidad de la radiación emitida por una partícula en movimiento.

Solución. De la construcción geométrica (fig. 15) se sigue que las direcciones que se piden, n, se encuentren en el plano que pasa por v y w y forman un ángulo χ con la dirección de w, donde

$$\operatorname{sen}\chi = \frac{v}{c}\operatorname{sen}\alpha,$$

y α es el ángulo entre v y w.

---

† Para $v \sim c$, sólo pueden ocurrir desviaciones apreciables cuando los parámetros de impacto son del orden de $\varrho \sim e^2/mc^2$, caso éste que en general no se puede tratar clásicamente.

§ 74. Radiación de frenado magnético

Consideremos la radiación de una carga que se mueve con velocidad arbitraria sobre una circunferencia en un campo magnético constante y uniforme; esta radiación se llama radiación de *frenado magnético*. El radio de la órbita r y la pulsación del movimiento ω_H se pueden expresar en función de la intensidad del campo H y de la velocidad de la partícula v mediante las fórmulas (véase § 21):

$$r = \frac{mcv}{eH\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \omega_H = \frac{v}{r} = \frac{eH}{mc}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{74.1}$$

La intensidad total de la radiación emitida en todas direcciones viene dada por la fórmula (73.7) (sin integrar respecto del tiempo) en la que debemos hacer $\mathbf{E} = 0$ con $\mathbf{H} \perp \mathbf{v}$:

$$I = \frac{2e^4 H^2 v^2}{3m^2 c^5 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}. \tag{74.2}$$

Vemos así que la intensidad total es proporcional al cuadrado del impulso de la partícula.

Si, en cambio, nos interesa la distribución angular de la radiación, deberemos utilizar la fórmula (73.11). Una cantidad interesante es la intensidad media relativa a un período del movimiento. Para determinarla integraremos en (73.11) en el intervalo correspondiente a una vuelta de la partícula a lo largo de la circunferencia y dividiremos el resultado por el período $T = 2\pi/\omega_H$.

Elijamos el plano de la órbita como plano XY (el origen coincide con el centro de la circunferencia) y hagamos pasar el plano YZ por la dirección $\mathbf{n}$ de la radiación (fig. 16). El campo magnético estará dirigido en el sentido negativo del eje Z (el sentido del movimiento de la partícula representado en la fig. 16 corresponde a una carga e positiva). Además, sea θ el ángulo formado por la dirección $\mathbf{n}$ de la radiación y el eje $\bar{y}$, y $\phi = \omega_H t$ el ángulo entre el vector posición de la partícula y el eje X. En estas condiciones, el coseno del ángulo formado por $\mathbf{n}$ y la velocidad $\mathbf{v}$ es $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = \cos\theta \cos\phi$ (el vector $\mathbf{v}$ se encuentra en el plano XY, y en cada instante es perpendicular el vector posición de la partícula). Expresemos la aceleración $\mathbf{w}$ de la partícula en función del campo $\mathbf{H}$ y de la velocidad $\mathbf{v}$ mediante la ecuación del movimiento [véase (21.1)]:

$$\mathbf{w} = \frac{e}{mc}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\mathbf{v}\times\mathbf{H}.$$

Después de un cálculo sencillo se obtiene:

$$dI = do\frac{e^4H^2v^2}{8\pi^2m^2c^5}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\int_0^{2\pi}\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\operatorname{sen}^2\theta+\left(\frac{v}{c}-\cos\theta\cos\phi\right)^2}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\cos\phi\right)^5}d\phi \quad (74.3)$$

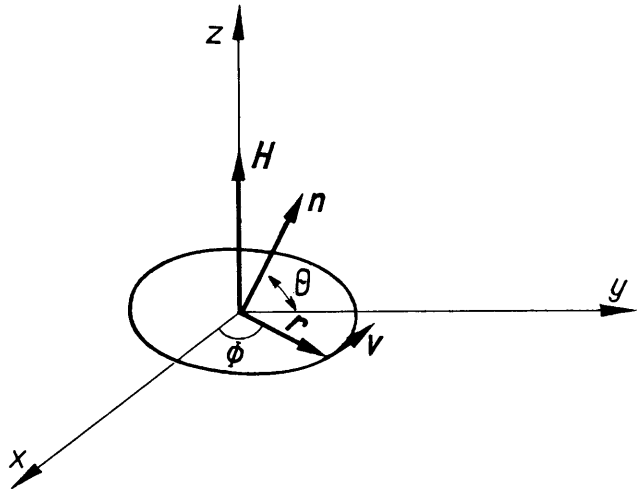

FIG. 16.

(la integración respecto del tiempo se ha transformado en una integración respecto de $\phi = \omega_H t$). La integración es elemental, si bien algo pesada. Se encuentra al final la fórmula siguiente:

$$dI = do\frac{e^4H^2v^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{8\pi m^2c^5}\left[\frac{2+\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta\right)^{\frac{5}{2}}}-\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(4+\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta\right)\cos^2\theta}{4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta\right)^{\frac{7}{2}}}\right]. \quad (74.4)$$

La razón de la intensidad de la radiación para $\theta=\pi/2$ (perpendicular al plano de la órbita) a la intensidad para $\theta = 0$ (en el plano de la órbita) es:

$$\frac{\left(\frac{dI}{do}\right)_0}{\left(\frac{dI}{do}\right)_{\frac{\pi}{2}}} = \frac{4+3\frac{v^2}{c^2}}{8\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{5}{2}}}. \quad (74.5)$$

Cuando $v \to 0$, esta razón tiende a $\frac{1}{2}$, pero para velocidades próximas a la velocidad de la luz llega a ser muy grande. Trataremos de nuevo esta cuestión más adelante.

Consideremos ahora la distribución espectral de la radiación. Dado que el movimiento de la carga es periódico, se trata aquí de un desarrollo en serie de Fourier. Es conveniente empezar el cálculo por el potencial vector. Para las componentes de Fourier de éste tenemos la fórmula (véase (66.12)

$$\mathrm{A}_n = e\frac{e^{ikR_0}}{cR_0T}\oint e^{i(\omega_H nt-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\,d\mathbf{r},$$

donde la integración se efectúa a lo largo de la trayectoria de la partícula (la circunferencia). Para las coordenadas de ésta tenemos $x=r\cos\omega_H t$, $y= r\,\mathrm{sen}\,\omega_H t$. Como variable de integración eligiremos el ángulo $\phi = \omega_H t$. Observando que

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = kr\cos\theta\,\mathrm{sen}\phi = nv/c\cos\theta\,\mathrm{sen}\phi$$

($k=n\omega_H/c = nv/cr$), se encuentra para las componentes de Fourier de la componente-x del potencial vector:

$$A_{xn} = -\frac{ev}{2\pi cR_0}e^{ikR_0}\int_0^{2\pi} e^{in\left(\phi-\frac{v}{c}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\right)}\mathrm{sen}\phi\,d\phi.$$

En el § 70 nos hemos encontrado ya con una integral de este tipo. Es posible expresarla en función de la derivada de una función de Bessel:

$$A_{xn} = -\frac{iev}{cR_0}e^{ikR_0}J_n'\left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right). \tag{74.6}$$

Análogamente, el cálculo de A_{yn} conduce a:

$$A_{yn} = \frac{e}{R_0\cos\theta}e^{ikR_0}J_n\left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right). \tag{74.7}$$

La componente a lo largo del eje Z se anula, evidentemente.

De las fórmulas del § 66 se deduce para la intensidad de la radiación de frecuencia $\omega = n\omega_H$ y emitida en el elemento de ángulo sólido do:

$$dI_n = \frac{c}{8\pi} |\mathbf{H}_n|^2 R_0^2 \, do = \frac{c}{8\pi} |\mathbf{k}\times\mathbf{A}_n|^2 R_0^2 do.$$

Observando que

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{k}|^2 = A_x^2 k^2 + A_y^2 k^2 \operatorname{sen}^2\theta,$$

y substituyendo (74.6) y (74.7), obtenemos para la intensidad de radiación la fórmula siguiente (Schott, 1912):

$$dI_n = \frac{n^2 e^4 H^2}{2\pi c^3 m^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left[\operatorname{tg}^2\theta \cdot J_n^2\left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right) + \frac{v^2}{c^2} J_n'^2\left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right)\right] do. \qquad (74.8)$$

Para determinar la intensidad total de la radiación de frecuencia $\omega = n\omega_H$ en todas direcciones, esta expresión debe integra para todos los ángulos. Sin embargo, la integración no se puede llevar a cabo en forma finita. Mediante una serie de transformaciones, y utilizando ciertas relaciones de la teoría de funciones de Bessel, la integral en cuestión se puede escribir en la forma siguiente †:

$$I_n = \frac{2e^4 H^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{m^2 c^2 v}\left[\frac{nv^2}{c^2} J_{2n}'\left(\frac{2nv}{c}\right) - n^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\int_0^{\frac{v}{c}} J_{2n}(2n\xi)\, d\xi\right]. \qquad (74.9)$$

Consideremos más detalladamente el caso ultrarrelativista, cuando la velocidad de la partícula difiere poco de la velocidad de la luz.

Haciendo en el numerador de la fórmula (74.2) $v = c$, se encuentra que la intensidad total de la radiación de frenado magnético en el caso ultrarrelativista es proporcional al cuadrado de la energía de la partícula, $\mathcal{E}$:

$$I = \frac{2e^4 H^2}{3m^2 c^3}\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2. \qquad (74.10)$$

La distribución angular de la radiación es en este caso extremadamente anisótropa y se encuentra concentrada esencialmente cerca del plano de la órbita. La anchura angular $\triangle\theta$ a que queda limitada la mayor parte de la radiación se puede estimar fácilmente a partir de la condición $1 - \frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta \sim 1 - \frac{v^2}{c^2}$. Es evidente que

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\mathcal{E}} \qquad (74.11)$$

† Los cálculos pueden encontrarse en el libro de G. A. Schott, *Electromagnetic Radiation*, § 84, Cambridge, 1912.

(este resultado concuerda, naturalmente, con la distribución angular estudiada en el párrafo precedente para la intensidad instantánea, véase (73.12) †).

Un carácter específico lo posee también en el caso ultrarrelativista la distribución espectral de la radiación (L. Artsimovich e I. Pomeranchuk, 1945).

Veremos más adelante que, en este caso, el papel fundamental lo representan en la radiación las frecuencias con grandes valores de n. Cabe, por consiguiente, utilizar la fórmula asintótica (70.9), según la cual se tiene

$$J_{2n}(2n\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n^{1/3}}} \Phi\,[n^{2/3}(1-\xi^2)]. \tag{74.12}$$

Substituyendo en (74.9), se obtiene la fórmula siguiente para la distribución espectral de la radiación correspondiente a valores grandes de n ††:

$$I_n = -\frac{2e^4H^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}\,m^2c^3}\left\{\Phi'(u)+\frac{u}{2}\int_u^\infty \Phi(u)\,du\right\}, \tag{74.13}$$

$$u = n^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right).$$

Para $u\to 0$ la función entre corchetes tiende a la constante $\Phi'(0) = -0{,}4587...$††† Por consiguiente, para $u \ll 1$ se tiene:

$$I_n = 0{,}52\,\frac{e^4H^2}{m^2c^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)n^{\frac{1}{3}}, \qquad 1 \ll n \ll \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^3 \tag{74.14}$$

esto es, la intensidad del n-ésimo armónico es proporcional a $n^{\frac{1}{3}}$.

Para $u \gg 1$, podemos utilizar la expresión asintótica de la función de Airy (véase la nota en la pág. 213), y se obtiene así:

$$I_n = \frac{e^4H^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{5}{4}} n^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi}\,m^2c^3}\exp\left\{-\frac{2}{3}n\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}, \qquad n \gg \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^3 \tag{74.15}$$

† ¡No se confunda, sin embargo, el ángulo θ de este párrafo con el ángulo θ formado por **n** y **v** en el § 73!

†† Al hacer la substitución, el límite $n^{\frac{2}{3}}$ de la integral se puede substituir por infinito, conservando la precisión requerida; hemos hecho también $v = c$ donde era posible. Aunque valores de ξ que no son próximos a la unidad figuran también en la integral (74.9), con todo es posible usar la fórmula (74.10), dado que la integral converge rápidamente en su límite inferior.

††† De la definición de la función de Airy se sigue:

$$\Phi'(0) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \xi \operatorname{sen}\frac{\xi^3}{3}\,d\xi = -\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot 3^{\frac{1}{3}}}\int_0^\infty x^{-\frac{1}{3}}\operatorname{sen} x\,dx = -\frac{3^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2\sqrt{\pi}}.$$

esto es, la intensidad disminuye exponencialmente para grandes valores de n. En consecuencia, el espectro presenta un máximo para $n \sim \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$ y la parte principal de la radiación se concentra en la región de frecuencias en la cual

$$\omega \sim \omega_H \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{eH}{mc}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}. \tag{74.16}$$

Estas frecuencias son muy altas comparadas con la separación ω_H entre dos de ellas consecutivas. En otras palabras, el espectro de la radiación está constituido por un gran número de rayas muy próximas entre sí, es decir, tiene un carácter casi continuo. En vez de la función distribución I_n podemos, por consiguiente, introducir una distribución en sucesión continua de frecuencias $\omega = n\omega_H$, escribiendo

$$dI = I_n\, dn = I_n \frac{d\omega}{\omega_H}.$$

Para los cálculos numéricos conviene expresar esta distribución mediante la función de McDonald K_ν †. Transformaciones nada complicadas de la fórmula (74.13) permiten representar dicha distribución en la forma

$$dI = d\omega \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{e^3 H}{mc^2} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right), \qquad F(\xi) = \xi \int_\xi^\infty K_{5/3}(\xi)\, d\xi, \tag{74.17}$$

donde se ha hecho

$$\omega_c = \frac{3eH}{2mc}\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2. \tag{74.18}$$

En la fig. 17 se representa gráficamente la función $F(\xi)$.

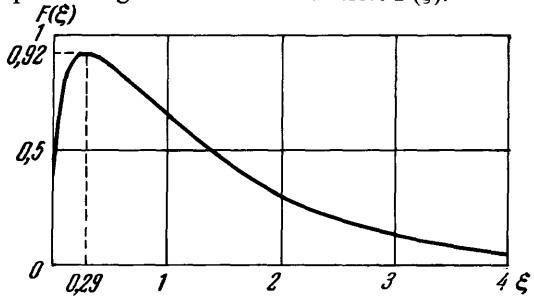

FIG. 17.

† La función de Airy y la función $K_{1/3}$ están ligadas por la fórmula (4) de la nota de la pág. 212. Para otras transformaciones se utilizan las relaciones de recurrencia

$$K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x} K_\nu, \quad 2K_\nu'(x) = -K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x),$$

en las que $K_{-\nu}(x) = K_\nu(x)$. En particular, es fácil hallar que

$$\Phi'(t) = -\frac{t}{\sqrt{3\pi}} K_{2/3}\left(\frac{2}{3} t^{3/2}\right).$$

Finalmente, algunas observaciones acerca del caso en que la partícula se mueve, no según una órbita plana, sino a lo largo de una trayectoria helicoidal, es decir, cuando posee una velocidad longitudinal (respecto del campo)/$v_{\parallel} = v\cos\chi$ (χ es el ángulo formado por **H** y **v**). La frecuencia del movimiento de rotación viene dada por la misma fórmula (74.1), pero el vector **v** describe, no una circunferencia, sino una superficie cónica cuyo eje coincide con **H** y de ángulo 2χ en el vértice. La intensidad total de radiación (entendida como pérdida total de energía por la partícula en 1s) diferirá de (74.2) en la substitución de H por $H_{\perp} = H\,\mathrm{sen}\,\chi$.

En el caso ultrarrelativista la radiación se concentra en direcciones próximas a las de las generatrices del « cono de velocidades ». La distribución espectral y la intensidad total (entendidas en el mismo sentido) se obtienen a partir de (74.17) y (74.10) mediante la substitución $H \to H_{\perp}$. Ahora bien, si se trata de la intensidad observada en las indicadas direcciones por un observador en reposo, en las fórmulas hay que introducir el factor $(1 - \frac{v_{\parallel}}{c}\cos\chi)^{-1} \approx \mathrm{sen}^{-2}\chi$, que tiene en cuenta el acercamiento del emisor al observador, acercamiento que tiene lugar con velocidad $v_{\parallel}\cos\chi$.

Problemas

1. Determinar la ley de variación de la energía con el tiempo para una carga que se mueve siguiendo una circunferencia en un campo magnético uniforme constante, y que pierde energía por radiación.

Solución. De acuerdo con (74.2), para la energía perdida por unidad de tiempo se tiene:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2e^4H^2}{3m^4c^7}(\mathcal{E}^2 - m^2c^4)$$

($\mathcal{E}$ es la energía de la partícula). De aquí se sigue:

$$\frac{\mathcal{E}}{mc^2} = \coth\left(\frac{2e^4H^2}{3m^3c^5}t + \mathrm{const}\right).$$

A medida que t aumenta, la energía disminuye con monotonía, tendiendo al valor $\mathcal{E} = mc^2$ (que corresponde al paro completo de la partícula) asintóticamente cuando $t \to \infty$.

2. Hallar la fórmula asintótica de la distribución espectral de la radiación para grandes valores de n en el caso de una partícula que se mueve a lo largo de una circunferencia con una velocidad que no es próxima a la velocidad de la luz.

Solución. Partiremos de la conocida fórmula asintótica de la teoría de funciones de Bessel

$$J_n(n\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}(1-\epsilon^2)^{1/4}}\left[\frac{\epsilon}{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}e^{\sqrt{1-\epsilon^2}}\right]^n,$$

que es válida para $n(1-\varepsilon^2)^{3/2} \gg 1$. Mediante esta fórmula, se encuentra, partiendo de (74.9):

$$I_n = \frac{e^4H^2n^{1/3}}{2\sqrt{\pi}m^2c^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{5/4}\left[\frac{\frac{v}{c}}{1+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}e^{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]^{2n}$$

Esta fórmula vale para $n\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} \gg 1$; si además $1-v^2/c^2$ es pequeño, la fórmula se transforma en la (74.15).

3. Hallar la polarización de la radiación de frenado magnético.

Solución. El campo eléctrico $\mathbf{E}_n$ se calcula a partir del potencial vector $\mathbf{A}_n$ (74.6-7) según la fórmula

$$\mathbf{E}_n = \frac{i}{k}[[\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_n]\cdot\mathbf{k}] = -\frac{i}{k}\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_n) + ik\mathbf{A}_n.$$

Sean $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ los vectores unitarios en un plano perpendicular a $\mathbf{k}$, de los cuales el $\mathbf{e}_1$ tiene la dirección del eje x y el $\mathbf{e}_2$ se encuentra en el plano yz (sus componentes son $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, \operatorname{sen}\theta, -\cos\theta)$); los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{k}$ forman un triedro directo. El campo eléctrico será entonces:

$$\mathbf{E}_n = ikA_{xn}\mathbf{e}_1 + ik\operatorname{sen}\theta A_{yn}\mathbf{e}_2$$

o bien, prescindiendo de factores comunes no esenciales:

$$\mathbf{E}_n \backsim \frac{v}{c}J_n'\left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right)\mathbf{e}_1 + \operatorname{tg}\theta J_n\left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right)i\mathbf{e}_2.$$

La onda está polarizada elípticamente (véase § 48).

En el caso ultrarrelativista, para valores de n grandes y pequeños ángulos θ las funciones J_n y J'_n se expresan mediante $K_{1/3}$ y $K_{2/3}$, en cuyos argumentos haremos

$$1 - \frac{v^2}{c^2}\cos^2 0 \approx 1 - \frac{v^2}{c^2} + \theta^2 = \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}}\right)^2 + \theta^2.$$

El resultado que se obtiene es:

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{e}_1\psi K_{1/3}\left(\frac{n}{3}\psi^3\right) + i\mathbf{e}_2\theta K_{1/3}\left(\frac{n}{3}\psi^3\right), \quad \psi = \sqrt{\left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}}\right)^2 + \theta^2}.$$

Para $\theta = 0$ la polarización elíptica degenera en una polarización lineal a lo largo de $\mathbf{e}_1$. Para valores de θ grandes ($|\theta| \gg mc^2/\mathcal{E}$, $n\theta^3 \gg 1$) tenemos $K_{1/3}(x) \approx K_{2/3}(x) \approx \sqrt{\pi/2x}\,e^{-x}$ y la polarización tiende a ser circular: $\mathbf{E}_n \sim \mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2$; la intensidad de la radiación, sin embargo, se hace entonces exponencialmente pequeña. En la región de ángulos intermedia, el eje menor de la elipse está dirigido a lo largo de $\mathbf{e}_2$, y el mayor, a lo largo de $\mathbf{e}_1$. El sentido de la rotación depende del signo del ángulo θ($\theta > 0$ si los vectores $\mathbf{H}$ y $\mathbf{k}$ se encuentran a lados distintos del plano de la órbita, como se representa en la fig. 16).

§ 75. Frenado por radiación

En el § 65 se demostró que el desarrollo de los potenciales del campo de un sistema de cargas en serie de potencias de v/c conduce en segunda aproximación a una función de Lagrange que determina por completo (en esta aproximación) el movimiento de las cargas. Continuemos ahora el desarrollo del campo incluyendo términos de orden superior y veamos a qué efectos conducen estos términos.

En el desarrollo del potencial escalar

$$\phi = \int \frac{1}{R}\varrho_{t-\frac{R}{c}}\,dV,$$

el término de tercer orden en $1/c$ es:

$$\phi^{(3)} = -\frac{1}{6c^3}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int R^2\varrho\, dV. \tag{75.1}$$

Por la misma razón que en la deducción de (65.3), en el desarrollo del potencial vector basta tomar el término de segundo orden en $1/c$, esto es,

$$\mathbf{A}^{(2)} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}\, dV. \tag{75.2}$$

Apliquemos la transformación de potenciales

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f,$$

eligiendo la función f de manera que el potencial escalar $\phi^{(3)}$ se reduzca a cero; essary that

$$f = -\frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R^2\varrho\, dV.$$

El nuevo potencial vector es entonces igual a

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}\, dV - \frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\int R^2\varrho\, dV$$

$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}\, dV - \frac{1}{3c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \mathbf{R}\varrho\, dV.$$

Pasando de la integral a una suma respecto de las cargas individuales, obtenemos para el primer término del segundo miembro la expresión $-\frac{1}{c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}$. Hagamos en el segundo término $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$, donde $\mathbf{R}_0$ y $\mathbf{r}$ tienen su significado habitual (véase § 66); entonces $\dot{\mathbf{R}} = -\dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{v}$ y el segundo término toma la forma $\frac{1}{3c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}$. Por consiguiente,

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{2}{3c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}. \tag{75.3}$$

El campo magnético que corresponde a este potencial es nulo ($\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}'^{(2)} = 0$), dado que $\mathbf{A}'^{(2)}$ no contiene las coordenadas explícitamente. En cambio, el campo eléctrico $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}'^{(2)}$ es igual a

$$\mathbf{E} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}, \tag{75.4}$$

donde $\mathbf{d}$ es el momento dipolar del sistema.

Los términos de tercer orden en el desarrollo del campo conducen así a ciertas fuerzas adicionales que actúan sobre las cargas, fuerzas no contenidas en la función de Lagrange (65.7); estas fuerzas dependen de las derivadas respecto del tiempo de las aceleraciones de las cargas.

Consideremos un sistema de cargas que efectúan un movimiento estacionario † y consideremos el valor medio del trabajo realizado por el campo (75.4) por unidad de tiempo. La fuerza que actúa sobre cada carga e es $\mathbf{f} = e\mathbf{E}$, esto es,

$$\mathbf{f} = \frac{2e}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}. \tag{75.5}$$

El trabajo que realiza por unidad de tiempo vale $\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}$; el trabajo total efectuado sobre todas las cargas es igual a la suma extendida a todas ellas:

$$\sum \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}\cdot\sum e\mathbf{v} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}\cdot\mathbf{d} = \frac{2}{3c^3}\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{d}}\cdot\ddot{\mathbf{d}}) - \frac{2}{3c^3}(\ddot{\mathbf{d}})^2.$$

Al promediar respecto del tiempo, el primer término se anula, de forma que el valor medio del trabajo es igual a

$$\overline{\sum \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}} = -\frac{2}{3c^3}\overline{\ddot{\mathbf{d}}^2}. \tag{75.6}$$

Pero la expresión que aparece en el segundo miembro es precisamente (salvo el cambio de signo) el valor medio de la energía radiada por el sistema en la unidad de tiempo [véase (67.8)]. Así, las fuerzas (75.5) que aparecen en la tercera aproximación describen la reacción de la radiación sobre las cargas. Estas fuerzas se llaman *fuerzas de frenado por radiación o fuerzas de rozamiento de Lorentz.*

Simultáneamente con la pérdida de energía en un sistema de cargas que emite radiación, tiene lugar también una cierta pérdida de momento cinético. La disminución de momento cinético por unidad de tiempo, $d\mathbf{M}/dt$, se calcula fácilmente mediante la expresión que define las fuerzas de frenado. Derivando el momento cinético $\mathbf{M} = \sum \mathbf{r}\times\mathbf{p}$ respecto del tiempo tenemos $\dot{\mathbf{M}} = \sum \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{p}}$, ya que $\sum \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{p} = \sum m(\mathbf{v}\times\mathbf{v}) \equiv 0$. Substituyamos la derivada del impulso de la partícula respecto del tiempo por la fuerza de rozamiento (75.5) que actúa sobre ella; se encuentra así:

$$\dot{\mathbf{M}} = \sum \mathbf{r}\times\mathbf{f} = \frac{2}{3c^3}\sum e\mathbf{r}\times\dddot{\mathbf{d}} = \frac{2}{3c^3}\mathbf{d}\times\dddot{\mathbf{d}}.$$

† Más exactamente, un movimiento que, si bien hubiera sido estacionario de haberse prescindido de la radiación, debido a ésta prosigue de manera cada vez más lenta.

Al igual que antes nos interesaba el promedio temporal de la pérdida de energía, nos interesa ahora el valor medio, respecto del tiempo, de la pérdida de momento cinético en el caso de un movimiento estacionario. Haciendo

$$\mathbf{d}\times\dddot{\mathbf{d}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{d}\times\ddot{\mathbf{d}}) - \dot{\mathbf{d}}\times\ddot{\mathbf{d}}$$

y observando que la derivada total respecto del tiempo (primer término) se anula al tomar valores medios, obtenemos finalmente la siguiente expresión para la pérdida media de momento cinético de un sistema radiante:

$$\overline{\frac{d\mathbf{M}}{dt}} = -\frac{2}{3c^3}\overline{\dot{\mathbf{d}}\times\ddot{\mathbf{d}}}. \tag{75.7}$$

El frenado por radiación se presenta también en el caso de una sola carga que se mueve en un campo exterior. Dicho frenado es igual a

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3}\dot{\mathbf{v}}. \tag{75.8}$$

Para una sola carga, podemos siempre elegir un sistema de referencia tal que en él la carga se encuentra en reposo en el instante considerado. Si, en este sistema de referencia, calculamos los términos de orden superior en el desarrollo del campo producido por la carga, resulta que dichos términos tienen la siguiente propiedad: a medida que el vector posición de origen en la carga y extremo en el punto de observación tiende a cero, todos estos términos tienden a cero. Por consiguiente, en el caso de una sola carga la fórmula (75.8) es, en un cierto sentido, una fórmula exacta para la reacción de la radiación en el sistema de referencia en el que la carga está en reposo.

Sin embargo, conviene no perder de vista que la descripción de la acción de la carga « sobre sí misma » mediante una fuerza de frenado no es del todo satisfactoria y, de hecho, encierra contradicciones. La ecuación del movimiento de una carga en ausencia de un campo exterior, carga sobre la que actúa únicamente la fuerza (75.8), tiene la forma

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}.$$

Esta ecuación posee, además de la solución trivial $\mathbf{v} = \text{const}$, otra solución en la que la aceleración $\dot{\mathbf{v}}$ es proporcional a $\exp(3mc^3t/2e^2)$, esto es, aumenta indefinidamente con el tiempo. Esto significa, por ejemplo, que una carga que atraviesa un campo cualquiera, después de salir de él debería « autoacelerarse » infinitamente. Lo absurdo de este resultado prueba la aplicabilidad limitada de la fórmula (75.8).

Cabe preguntarse cómo la electrodinámica, que satistace la ley de conservación de la energía, puede conducir al resultado absurdo de que una carga libre aumenta sin límite su energía. En realidad, la raíz de esta dificultad se halla en observaciones anteriores (§ 37) acerca del valor infinito de la « masa propia » electromagnética de las partículas elementales. Cuando en las ecuaciones del movimiento tomamos para la carga una masa finita, en esencia estamos atribuyéndole, de manera formal, una « masa propia » negativa infinita de orígen no electromagnético, masa que junto con la electromagnética debiera conducir a una masa finita de la partícula. Sin embargo, dado que restar de un infinito otro infinito no es una operación matemática del todo correcta, ello conduce a una serie de dificultades, entre las que figura la que acabamos de señalar.

En un sistema de coordenadas en el que la velocidad de la partícula es pequeña, la ecuación del movimiento, cuando se incluye el frenado por radiación, tiene la forma

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H} + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\mathbf{v}}. \tag{75.9}$$

De la discusión anterior se sigue que esta ecuación es aplicable únicamente en tanto que la fuerza de frenado sea pequeña comparada con la fuerza que el campo exterior ejerce sobre la carga.

Para poner en claro el sentido físico de esta condición, procederemos de la siguiente manera. En el sistema de referencia en el que la carga se encuentra en reposo en un instante dado, la derivada segunda respecto del tiempo de la velocidad es igual, prescindiendo de la fuerza de frenado, a

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\dot{\mathbf{E}} + \frac{e}{mc}\dot{\mathbf{v}}\times\mathbf{H}.$$

En el segundo término hagamos (limitándonos al mismo orden de aproximación) $\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\mathbf{E}$, con lo que se obtiene:

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\dot{\mathbf{E}} + \frac{e^2}{m^2c}\mathbf{E}\times\mathbf{H}.$$

De acuerdo con esto, la fuerza de frenado constará de dos términos:

$$\mathbf{f} = \frac{2e^3}{3mc^3}\dot{\mathbf{E}} + \frac{2e^4}{3m^2c^4}\mathbf{E}\times\mathbf{H}. \tag{75.10}$$

Si ω es la frecuencia del movimiento, $\dot{\mathbf{E}}$ es proporcional a $\omega\mathbf{E}$ y, en consecuencia,

el primer término es del orden de $\frac{e^3\omega}{mc^3}E$; el segundo, en cambio, es del orden de $\frac{e^4}{m^2c^4}EH$. Por consiguiente, la condición de que la fuerza de frenado sea pequeña frente a la fuerza eE que ejerce el campo exterior sobre la carga da, en primer lugar,

$$\frac{e^2}{mc^3}\omega \ll 1,$$

o bien, introduciendo la longitud de onda $\lambda \sim c/\omega$,

$$\lambda \gg \frac{e^2}{mc^2}. \tag{75.11}$$

La fórmula (75.8) para el frenado por radiación es aplicable así solamente si la longitud de onda de la radiación incidente sobre la carga es grande comparada con el «radio» de ésta e^2/mc^2. Vemos una vez más que una distancia del orden de e^2/mc^2 aparece como límite má allá del cual la electrodinámica se contradice a sí misma (véase § 37).

En segundo lugar, comparando el segundo término de la fuerza de frenado con la fuerza $e\mathbf{E}$, encontramos la condición

$$H \ll \frac{m^2c^4}{e^3}. \tag{75.12}$$

Así, es también necesario que el propio campo no sea demasiado intenso. Un campo del orden de m^2c^4/e^3 representa también un límite más allá del cual la electrodinámica clásica conduce a contradicciones internas. Debemos recordar también aquí que, en realidad, la electrodinámica no es ya aplicable a campos considerablemente menos intensos debido a efectos cuánticos †.

Para evitar interpretaciones erróneas, hay que recordar que la longitud de onda en (75.11) y el valor del campo en (75.12) corresponden al sistema de referencia en el que la partícula está en reposo en el instante considerado.

Problemas

1. Determinar el tiempo necesario para que dos cargas que se atraen y que efectúan un movimiento elíptico (con velocidad pequeña comparada con la velocidad de la luz) perdiendo energía por radiación « caigan » la una hacia la otra.

---

† Para campos del orden de m^2c^3/he, donde h es la constante de Planck.

Solución. Admitiendo que la pérdida de energía relativa en una revolución es pequeña, podemos igualar la derivada temporal de la energía a la intensidad media de la radiación (que se determinó en el problema 1 del § 70):

$$\frac{d|\mathcal{E}|}{dt} = \frac{(2|\mathcal{E}|)^{\frac{7}{2}}\mu^{\frac{5}{2}}\alpha^3}{3c^3M^5}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\left(3-\frac{2|\mathcal{E}|M^2}{\mu\alpha^2}\right), \tag{1}$$

donde $\alpha = |e_1e_2|$. Junto con la energía, las partículas pierden momento cinético. La pérdida de momento cinético por unidad de tiempo viene dada por la fórmula (75.7); substituyendo en ella la expresión (70.1) para **d**, y observando que $\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\alpha\mathbf{r}/r^3$ y $\mathbf{M} = \mu\mathbf{r}\times\mathbf{v}$, se encuentra:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{2\alpha}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\frac{\mathbf{M}}{r^3}.$$

Determinemos el valor medio de esta expresión en un período. Debido a la lentitud con que cambia **M**, es suficiente promediar en el segundo miembro de la igualdad tan sólo r^{-3}; este valor medio se calcula precisamente de la misma manera como se calculó el valor medio de r^{-4} en el problema 1 del § 70. Se encuentra así para la pérdida media de momento cinético por unidad de tiempo la expresión siguiente:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{2\alpha(2\mu|\mathcal{E}|)^{\frac{3}{2}}}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 \tag{2}$$

[como en la ecuación (1), prescindimos del signo de promedio]. Dividiendo (1) por (2), se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{d|\mathcal{E}|}{dM} = -\frac{\mu\alpha^2}{2M^3}\left(3-2\frac{|\mathcal{E}|M^2}{\mu\alpha^2}\right),$$

que una vez integrada nos da:

$$|\mathcal{E}| = \frac{\mu\alpha^2}{2M^2}\left(1-\frac{M^3}{M_0^3}\right)+\frac{|\mathcal{E}_0|}{M_0}M. \tag{3}$$

La constante de integración se ha elegido de manera que para $M = M_0$, sea $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$, donde M_0 y $\mathcal{E}_0$ son el momento cinético y la energía iniciales de las partículas.

A la «caída» de las partículas, una hacia otra, corresponde $M\to 0$. De (3) se deduce que entonces $\mathcal{E}\to-\infty$, como debe ser.

Obsérvese que el producto $|\mathcal{E}|M^2$ tiende a $\mu\alpha^2/2$, y que de la fórmula (70.3) se sigue que la excentricidad $\varepsilon\to 0$, es decir, a medida que las partículas se acercan la órbita tiende a ser una circunferencia. Substituyendo (3) en (2), se puede determinar la derivada dt/dM en función de M, e integrando luego respecto de M entre los límites M_0 y 0 se obtiene el tiempo de caída:

$$t_{\text{caída}} = \frac{c^3M_0^5}{\alpha\sqrt{2|\mathcal{E}_0|\mu^3}}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^{-2}(\sqrt{\mu\alpha^2}+\sqrt{2M_0^2|\mathcal{E}_0|})^{-2}.$$

† Véase la nota en la pág 234. Los términos de tercer orden en la función de Lagrange desaparecen automáticamente: los términos de este orden en el campo producido por las partículas están determinados por la derivada respecto del tiempo del momento dipolar [véase (75.3)], que se conserva en el presente caso.

2. Hallar, hasta términos de cuarto orden, la función de Lagrange de un sistema constituido por dos partículas cargadas idénticas †. (Ia. A. Smorodinskii y V. N. Golubenkov, 1956).

Solución. Conviene realizar el cálculo siguiendo una marcha algo diferente de la que seguimos en el § 65. Partiremos de la expresión de la función de Lagrange del sistema de partículas y del campo producido por ellas.

$$L = \int \left\{ \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) + \frac{1}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{A} - \varrho\phi \right\} dV - \sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}\,.$$

Haciendo aquí

$$\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 = \mathbf{E}\cdot\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi\right) - \mathbf{H}\cdot \operatorname{rot}\mathbf{A},$$

y efectuando la integración respecto de todas las partículas, se obtiene:

$$\frac{1}{8\pi}\int (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)\, dV = -\frac{1}{8\pi}\oint \{\mathbf{E}\phi + \mathbf{A}\times\mathbf{H}\}\cdot d\mathbf{f} - \frac{1}{8\pi c}\frac{d}{dt}\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{A}\, dV - \\ - \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{A} - \varrho\phi\right) dV.$$

Para un sistema que no emite radiación dipolar, la integral extendida a una superficie en el infinito no contribuye con términos del orden de $1/c^4$. El término que contiene la derivada total respecto del tiempo se puede suprimir en la función de Lagrange. Los términos de cuarto orden en dicha función están así contenidos en la expresión

$$L = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{A} - \varrho\phi\right) dV - \sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}\,.$$

Prosiguiendo el desarrollo que se llevó a cabo en el § 65, se encuentran los términos de cuarto orden en los potenciales (ϕ y $\mathbf{A}/c$) del campo producido por la carga 1 en el punto ocupado por la carga 2:

$$\phi_1(2) = \frac{e}{24c^4}\frac{\partial^4 R^3}{\partial t^4}, \qquad \frac{1}{c}\mathbf{A}_1(2) = \frac{e}{2c^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(R\mathbf{v}_1).$$

Mediante la transformación (18.3) con una función f apropiada, podemos reducir estos potenciales a la forma equivalente

$$\phi_1(2) = 0, \qquad \frac{1}{c}\mathbf{A}_1(2) = \frac{e}{2c^4}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}(R\mathbf{v}_1) + \frac{1}{12}\frac{\partial^3}{\partial t^3}(\nabla R^3)\right] \tag{1}$$

(la derivación $\partial/\partial t$ se efectúa manteniendo constantes las coordenadas del punto de observación, es decir, del punto 2; la derivación ∇ se refiere a las coordenadas de dicho punto).

Los términos de cuarto orden en la función de Lagrange vienen dados ahora por la expresión *:

$$L^{(4)} = \frac{e}{2c}[\mathbf{A}_1(2)\cdot\mathbf{v}_2 + \mathbf{A}_2(1)\cdot\mathbf{v}_1) + \frac{m}{16c^4}(v_1^6 + v_2^6). \tag{2}$$

† Prescindimos aquí de los términos infinitos asociados con la acción sobre las partículas de sus « autocampos ». Esta operación corresponde a la « renormalización » de las masas que aparecen en la función de Lagrange (véase la nota en la pág. 128)

Después de efectuar en (1) parte de las derivaciones podemos representar $\mathbf{A}_1(2)$ en la forma

$$\frac{1}{c}\mathbf{A}_1(2) = \frac{e}{8c^4}\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial t}, \qquad \mathbf{F}_1 = \frac{\partial}{\partial t}[3R\mathbf{v}_1 - R\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_1)]$$

(donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario correspondiente al vector de origen en 1 y extremo en 2). Antes de proseguir los cálculos, conviene eliminar inmediatamente en $L^{(4)}$ los términos que contienen derivadas de la velocidad respecto del tiempo de orden superior al primero; para ello obsérvese que

$$\frac{1}{c}\mathbf{A}_1(2)\cdot\mathbf{v}_2 = \frac{e}{8c^4}\mathbf{v}_2\cdot\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial t} = \frac{e}{8c^4}\left\{\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{F}_1) - (\mathbf{v}_2\cdot\nabla)(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{F}_1) - \mathbf{F}_1\cdot\dot{\mathbf{v}}_2\right\},$$

donde,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{F}_1) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{F}_1) + (\mathbf{v}_2\cdot\nabla)(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{F}_1)$$

es una derivada total respecto del tiempo (¡derivación respecto del origen y del extremo del vector $\mathbf{R}$!) y se puede suprimir en la función de Lagrange. Las aceleraciones se eliminan, de la expresión que resulta, mediante las ecuaciones del movimiento correspondientes a la primera aproximación: $m\dot{\mathbf{v}}_1 = -e^2\mathbf{n}/R^2$, $m\dot{\mathbf{v}}_2 = e^2\mathbf{n}/R^2$. Después de un cálculo bastante largo, obtenemos finalmente:

$$L^{(4)} = \frac{e^2}{8c^4R}\left\{[-v_1^2v_2^2 + 2(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)^2 - 3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_1)^2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_2)^2 + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_1)^2v_2^2 + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_2)^2v_1^2] + \right.$$
$$\left. + \frac{e^2}{mR}[-v_1^2 - v_2^2 + 3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_1)^2 + 3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_2)^2] + \frac{2e^4}{m^2R^2}\right\} + \frac{m}{16c^4}(v_1^6 + v_2^6).$$

De la simetría asociada a las dos partículas idénticas resulta de antemano evidente que $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$ en el sistema de referencia en que su centro de masa se encuentra en reposo. En estas condiciones, los términos de cuarto orden en la función de Lagrange son:

$$L^{(4)} = \frac{e^2}{8c^4R}\left\{\frac{1}{16}[v^4 - 3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})^4 + 2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})^2v^2] + \frac{e^2}{2mR}[3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})^2 - v^2] + \frac{2e^4}{m^2R^2}\right\} + \frac{mv^6}{2^5c^4},$$

donde $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$.

§ 76. Frenado por radiación en el caso relativista

Veamos cuál es la expresión relativista del frenado por radiación (para una sola carga) aplicable también al movimiento con una velocidad comparable con la de la luz. Esta fuerza será ahora un cuadrivector g^i, con el que debe completarse la ecuación del movimiento de la carga escrita en forma cuadridimensional:

$$mc\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k + g^i. \tag{76.1}$$

Para determinar g^i, observemos que para $v \ll c$ sus tres componentes espaciales deben reducirse a las componentes del vector $\mathbf{f}/c$ (75.8). Es fácil ver que el cuadrivector $\frac{2e^2}{3c}\frac{d^2u^i}{ds^2}$ posee esta propiedad. Sin embargo, no satisface la identidad $g^iu_i = 0$,

que es válida para cualquier vector fuerza. Para satisfacer esta condición debemos sumar a esta expresión un cierto cuadrivector suplementario construido a partir de la cuadrivelocidad u^i y sus derivadas. Las tres componentes espaciales de este vector han de anularse en el caso límite $\mathbf{v} = 0$, a fin de no cambiar los valores correctos de $\mathbf{f}$ que vienen dados ya por $\frac{2e^2}{3c}\frac{d^2u^i}{ds^2}$. El cuadrivector u^i tiene esta propiedad, y, por lo tanto, el término suplementario en cuestión tiene la forma au^i. El escalar a hay que elegirlo de manera que se satisfaga la relación $g^i u_i = 0$. Resulta así

$$g^i = \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{d^2u^i}{ds^2} - u^i u^k \frac{d^2u_k}{ds^2}\right). \tag{76.2}$$

De acuerdo con las ecuaciones del movimiento, esta fórmula se puede escribir de otra manera sin más que expresar d^2u^i/ds^2 en función del tensor del campo exterior que actúa sobre la partícula

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{mc^2} F^{ik} u_k,$$

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} = \frac{e}{mc^2}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l} u_k u^l + \frac{e^2}{m^2c^4} F^{ik} F_{kl} u^l.$$

Al hacer las substituciones, no hay que perder de vista que el producto del tensor $\partial F^{ik}/\partial x^l$, que es antisimétrico respecto de los índices i, k, por el tensor simétrico $u_i u_k$ es idénticamente nulo. Por consiguiente,

$$g^i = \frac{2e^3}{3mc^3}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l} u_k u^l - \frac{2e^4}{3m^2c^5} F^{il} F_{kl} u^k + \frac{2e^4}{3m^2c^5}(F_{kl}u^l)(F^{km}u_m)\, u^i \tag{76.3}$$

La integral de la cuadrifuerza g^i a lo largo de la línea de universo de una carga que atraviesa un campo dado debe coincidir (salvo el signo) con el cuadrimpulso total $\triangle P^i$ de la radiación emitida por la carga [al igual que el valor medio del trabajo de la fuerza $\mathbf{f}$ en el caso no relativista coincide con la intensidad de la radiación dipolar; véase (75.6)]. Es fácil comprobar que así ocurre efectivamente. El primer término en (76.2) se anula al efectuar la integración, ya que en el infinito la partícula carece de aceleración, es decir, $\frac{du^i}{ds} = 0$. Integremos el segundo término por partes, con lo que se obtiene:

$$-\int g_i dx^i = \frac{2e^2}{3c}\int u^k \frac{d^2u_k}{ds^2} ds = -\frac{2e^2}{3c}\int \left(\frac{du_k}{ds}\right)\left(\frac{du^k}{ds}\right) ds,$$

lo que coincide exactamente con (73.4).

Cuando la velocidad de la partícula se acerca a la velocidad de la luz, los términos que crecen más rápidamente en las componentes espaciales del cuadrivector (76.3) son los que proceden de las derivadas terceras de las componentes de la cuadrivelocidad. Por lo tanto, conservando solamente estos términos en (76.3) y teniendo en cuenta la relación (9.18) entre las componentes espaciales del cuadrivector g^i y la fuerza tridimensional **f**, encontramos para ésta:

$$\mathbf{f} = \frac{2e^4}{3m^2c^5}(F_{kl}u^l)(F^{km}u_m)\mathbf{v}.$$

En este caso, por consiguiente, la fuerza **f** es opuesta a la velocidad de la partícula; eligiendo esta última velocidad como eje X, y escribiendo de manera explícita las fórmulas cuadridimensionales, obtenemos:

$$f_x = -\frac{2e^4}{3m^2c^4}\frac{(E_y-H_z)^2+(E_z+H_y)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{76.4}$$

(donde se ha hecho $v = c$ en todas partes, salvo en el denominador). Vemos, pues, que para una partícula ultrarrelativista el frenado por radiación es proporcional al cuadrado de su energía.

Conviene llamar la atención sobre la siguiente interesante circunstancia. Hemos señalado en el párrafo anterior que la expresión obtenida para el frenado por radiación es aplicable solamente a campos que (en el sistema de referencia K_0 en que la partícula está en reposo) son pequeños comparados con m^2c^4/e^3. Sea F el orden de magnitud del campo exterior (normal a la dirección del movimiento) en el sistema de referencia K respecto del cual la partícula se mueve con velocidad v. En el sistema K_0, el orden de magnitud del campo es entonces $F/\sqrt{1-v^2/c^2}$ (véanse las fórmulas de transformación en § 24). Por consiguiente, F debe satisfacer la condición

$$\frac{e^3F}{m^2c^4\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ll 1. \tag{76.5}$$

Al mismo tiempo, la razón de la fuerza de frenado (76.4) a la fuerza exterior ($\sim eF$) es del orden de

$$\frac{e^3F}{m^2c^4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)},$$

Vemos así que, aun cuando se cumpla la condición (76.5), puede ocurrir (para una energía de la partícula suficientemente grande) que la fuerza de frenado sea grande comparada con la fuerza ordinaria de Lorentz que actúa sobre la partícula en el campo electromagnético †. Para una partícula ultrarrelativista podemos así encontrarnos con un caso en que la fuerza de frenado sea la fuerza principal que actúa sobre ella.

Si así ocurre, la pérdida de energía (cinética) de la partícula por unidad de longitud de trayectoria se puede igualar a la fuerza de frenado f_x sola; teniendo en cuenta que esta última es proporcional al cuadrado de la energía de la partícula, podemos escribir

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{cin}}}{dx} = -k(x)\,\mathcal{E}_{\text{cin}}^2,$$

donde $k(x)$ es el coeficiente de proporcionalidad, que depende de la coordenada x y se expresa en función de las componentes transversales del campo de acuerdo con (76.4). Integrando esta ecuación diferencial, obtenemos

$$\frac{1}{\mathcal{E}_{\text{cin}}} = \frac{1}{\mathcal{E}_0} + \int_{-\infty}^{x} k(x)\,dx,$$

donde $\mathcal{E}_0$ representa la energía inicial de la partícula (su energía para $x \to -\infty$). En particular, la energía final $\mathcal{E}_1$ de la partícula (después de haber atravesado el campo) viene dada por la fórmula

$$\frac{1}{\mathcal{E}_1} = \frac{1}{\mathcal{E}_0} + \int_{-\infty}^{+\infty} k(x)\,dx.$$

Vemos, pues, que para $\mathcal{E}_0 \to \infty$, la energía final $\mathcal{E}_1$ tiende a un límite constante independiente de $\mathcal{E}_0$ (I. Pomeranchuk, 1939). De aquí se sigue que, después de atravesar el campo, la energía de la partícula no puede ser mayor que la energía $\mathcal{E}_{\text{crit}}$ definida por la ecuación

$$\frac{1}{\mathcal{E}_{\text{crit}}} = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x)\,dx,$$

† Hay que subrayar que este resultado, claro está, no contradice en modo alguno el razonamiento que condujo antes a la expresión relativista de la cuadrifuerza g^i, razonamiento en que se supuso que la cuadrifuerza era «pequeña» frente a la cuadrifuerza $\frac{e}{c} F^{ik} u_k$. Basta satisfacer la condición de que las componentes de un vector sean pequeñas comparadas con las de otro en un sistema de referencia; en virtud de la invariancia relativista, las fórmulas cuadridimensionales obtenidas a partir de esta hipótesis serán válidas en cualquier otro sistema de referencia.

o, substituyendo en vez de $k(x)$ su valor,

$$\mathcal{C}_{\text{crit}}^{-1} = \frac{2}{3m^2c^4}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} [(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2]\, dx. \tag{76.6}$$

PROBLEMAS

1. Determinar la energía límite que puede adquirir una partícula después de atravesar el campo de un dipolo magnético $\mathfrak{m}$; el vector $\mathfrak{m}$ y la dirección del movimiento se encuentran en un mismo plano.

Solución. Elijamos el plano que pasa por el vector $\mathfrak{m}$ y la dirección del movimiento como plano XZ. En él, la partícula se mueve paralelamente al eje X a una distancia ϱ del mismo. Para las componentes transversales del campo del dipolo magnético que actúa sobre la partícula tenemos [véase (44.4)]:

$$H_y = 0,$$
$$H_z = \frac{3(\mathfrak{m}\cdot \mathbf{r})z - \mathfrak{m}_z r^2}{r^5} = \frac{\mathfrak{m}}{(\varrho^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}\{3(\varrho\cos\phi + x\,\mathrm{sen}\phi)\varrho - (\varrho^2+x^2)\cos\phi\}$$

(ϕ es el ángulo formado por $\mathfrak{m}$ y el eje Z). Substituyendo en (76.6) y efectuando la integración, se obtiene:

$$\frac{1}{\mathcal{C}_{\text{crit}}} = \frac{\mathfrak{m}^2\pi}{64\mathfrak{m}^2c^4\varrho^5}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (15+26\cos^2\phi).$$

2. Escribir la expresión tridimensional de la fuerza de frenado en el caso relativista.

Solución. Calculando las componentes espaciales del cuadrivector (76.3), obtenemos:

$$\mathbf{f} = \frac{2e^3}{3mc^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{H}\right\} +$$
$$+\frac{2e^4}{3m^2c^4}\left\{\mathbf{E}\times\mathbf{H} + \frac{1}{c}\mathbf{H}\times(\mathbf{H}\times\mathbf{v}) + \frac{1}{c}\mathbf{E}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E})\right\} -$$
$$-\frac{2e^4}{3m^2c^5\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\mathbf{v}\left\{\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right)^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{v})^2\right\}.$$

§ 77. Descomposición espectral de la radiación en el caso ultrarrelativista

Se ha demostrado ya (en el § 73) que la radiación emitida por una partícula ultrarrelativista se dirige principalmente hacia adelante, en el sentido de la velocidad de la partícula; la radiación está contenida casi por completo en un pequeño intervalo angular

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

en torno de la dirección de $\mathbf{v}$.

Al calcular la descomposición espectral de la radiación, es esencial la relación existente entre la amplitud del intervalo angular $\Delta\theta$ y el ángulo de desviación α de la partícula al pasar por el campo electromagnético exterior.

El ángulo α se puede estimar como sigue: el cambio del impulso transversal (normal a la dirección del movimiento) de la partícula es del orden del producto de la fuerza transversal eF † por el tiempo de paso a través del campo, $t \sim a/v \cong a/c$ (donde a es la distancia por debajo de la cual el campo difiere apreciablemente de cero). La razón de esta cantidad al impulso

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cong \frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

determina el orden de magnitud del pequeño ángulo α:

$$\alpha \sim \frac{eFa}{mc^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Dividiendo por $\Delta\theta$, se encuentra:

$$\frac{\alpha}{\Delta\theta} \sim \frac{eFa}{mc^2}. \tag{77.1}$$

Conviene llamar la atención sobre el hecho de que esta razón no depende de la velocidad de la partícula y está completamente determinada por las propiedades del propio campo exterior.

Supongamos primero que

$$eFa \gg mc^2, \tag{77.2}$$

esto es, que la desviación total de la partícula es grande comparada con $\Delta\theta$. Podemos entonces afirmar que la radiación en una dirección dada procede principalmente de aquella parte de la trayectoria en la que la velocidad de la partícula es casi paralela a dicha dirección (formando con ella un ángulo que pertenece al intervalo $\Delta\theta$) y que la longitud de este segmento es pequeña comparada con a. El campo F se puede considerar constante en dicho segmento, y dado que, a su vez, un pequeño segmento de una curva se puede considerar como un arco de circunferencia, es posible aplicar los resultados obtenidos en el § 74 acerca de la radiación en el movimiento uniforme a lo largo de una circunferencia (reemplazando H por F). En par-

† Si elegimos el eje X en el sentido de la dirección del movimiento de la partícula, $(eF)^2$ es igual a la suma de los cuadrados de las componentes y, z de la fuerza de Lorentz, $e\mathbf{E}+(e\mathbf{v}/c)\times\mathbf{H}$, en la que podemos hacer aquí $v \cong c$:

$$F^2 = (E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2.$$

ticular, podemos afirmar que la mayor parte de la radiación se concentra en el intervalo de frecuencias

$$\omega \sim \frac{eF}{mc\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \tag{77.3}$$

[véase (74.16)].

En el caso límite opuesto,

$$eFa \ll mc^2, \tag{77.4}$$

el ángulo total de desviación de la partícula es pequeño comparado con $\triangle\theta$. En este caso la radiación se emite principalmente dentro de un estrecho intervalo angular $\triangle\theta$ en torno de la dirección del movimiento y toda la trayectoria de la partícula contribuye a aquélla.

Para calcular la distribución espectral de la intensidad en este caso, conviene partir de las expresiones (73.8) de Lienard-Wiechert para el campo en la zona de ondas. Calculemos la componente de Fourier

$$\mathbf{E}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} e^{i\omega t}\, dt.$$

La expresión que aparece en el segundo miembro de la fórmula (73.8) es función del tiempo retardado t', determinado por la condición $t' = t - R(t')/c$. A grandes distancias de una partícula que se mueve con velocidad casi constante $\mathbf{v}$, tenemos:

$$t' \cong t - \frac{R_0}{c} + \frac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t') \cong t - \frac{R_0}{c} + \frac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}t'$$

($\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \cong \mathbf{v}t$ es el vector posición de la partícula), o bien

$$t = t'\left(1 - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\right) + \frac{R_0}{c}.$$

Substituyamos la integración respecto de t por una integración relativa a t', haciendo

$$dt = dt'\left(1 - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\right),$$

con lo que se obtiene:

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{e}{c^2}\frac{e^{ikR_0}}{R_0\left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n}\times\left\{\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\times\mathbf{w}(t')\right\} e^{i\omega t'\left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)} dt'.$$

La velocidad $\mathbf{v}$ se considera aquí constante; tan sólo es variable la aceleración $\mathbf{w}(t')$. Introduciendo la notación

$$\omega' = \omega\left(1 - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\right), \tag{77.5}$$

y la componente de Fourier de la aceleración correspondiente a esta frecuencia, escribiremos $\mathbf{E}_\omega$ en la forma:

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{e}{c^2}\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 \mathbf{n}\times\left\{\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\times\mathbf{w}_{\omega'}\right\}.$$

Finalmente, de (66.9) se sigue para la energía radiada en el ángulo sólido do, con frecuencia en $d\omega$:

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{e^2}{2\pi c^3}\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^4 \left|\mathbf{n}\times\left\{\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\times\mathbf{w}_{\omega'}\right\}\right|^2 do\,\frac{d\omega}{2\pi} \tag{77.6}$$

Una estimación del orden de magnitud de las frecuencias en las que se concentra principalmente la radiación cuando se cumple (77.4), se obtiene fácilmente observando que la componente de Fourier $\mathbf{w}_{\omega'}$ difiere apreciablemente de cero sólo si el tiempo $1/\omega'$, o lo que es lo mismo, si

$$\frac{1}{\omega\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

es del mismo orden que el tiempo $a/v \sim a/c$ transcurrido el cual la aceleración de la partícula cambia de manera apreciable. Por consiguiente,

$$\omega \sim \frac{c}{a\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}. \tag{77.7}$$

Estas frecuencias dependen de la energía igual que en (77.3), pero el coeficiente es distinto.

Al tratar los dos casos (77.2) y (77.4) se supuso que la pérdida total de energía por la partícula durante su paso a través del campo es relativamente pequeña. Demostraremos ahora que al primero de ellos se reduce también el problema de determinar la radiación emitida por una partícula ultrarrelativista cuya pérdida total de energía es comparable con su energía inicial.

La pérdida de energía por una partícula en el campo se puede determinar como

trabajo realizado por la fuerza de rozamiento de Lorentz. El trabajo de la fuerza (76.4) a lo largo de un camino $\sim a$ es del orden de

$$af \sim \frac{e^4F^2a}{m^2c^4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

Para que este valor sea comparable con la energía total de la partícula, $mc^2/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, el campo debe existir a distancias

$$a \sim \frac{m^3c^6}{e^4F^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Pero entonces la condición (77.2) queda satisfecha automáticamente:

$$aeF \sim \frac{m^3c^6}{e^3F}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \gg mc^2,$$

ya que el campo F debe satisfacer necesariamente la condición (76.5)

$$\frac{F}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ll \frac{m^2c^4}{e^3},$$

pues, de otro modo, no sería posible aplicar la electrodinámica ordinaria.

Problemas

1. Determinar la distribución espectral de la intensidad de radiación total (en todas direcciones) cuando se cumple la condición (77.2).

Solución. La radiación emitida desde cada elemento de arco de la trayectoria está determinada por (74.13), donde hemos de substituir H por el valor de la fuerza transversal F en el punto dado y, además, hay que pasar de un espectro discreto de frecuencias a un espectro continuo. Esta transformación se efectúa multiplicando formalmente por dn y substituyendo

$$I_n\,dn = I_n\frac{dn}{d\omega}\,d\omega = I_n\frac{d\omega}{\omega_0}.$$

Integrando luego para todo valor del tiempo, obtenemos la distribución espectral de la radiación total en la forma siguiente:

$$d\mathcal{E}_\omega = -\,d\omega\,\frac{2e^2\omega}{\sqrt{\pi}\,c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{u}\Phi'(u)+\frac{1}{2}\int_u^\infty \Phi(u)\,du\right]dt,$$

donde $\Phi(u)$ es la función de Airy con argumento

$$u = \left[\frac{mc\omega}{eF}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right]^{\frac{2}{3}}.$$

El integrando depende de la variable de integración t implícitamente a través de la cantidad u (F, y con ella u, varía a lo largo de la trayectoria de la partícula; para un movimiento dado, esta variación se puede considerar como una dependencia respecto del tiempo).

2. Determinar la distribución espectral de la energía radiada total (en todas direcciones) cuando se cumple la condición (77.4).

Solución. Teniendo en cuenta que el papel principal está representado por la radiación que forma ángulos pequeños con la dirección del movimiento, escribiremos:

$$\omega' = \omega\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)\cong\omega\left(1-\frac{v}{c}+\frac{\theta^2}{2}\right)\cong\frac{\omega}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2\right).$$

Cambiemos la integración respecto de los ángulos $do = \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi\cong\theta\, d\theta\, d\phi$ en (77.6) por una integración respecto de $d\phi d\omega'/\omega$. Al desarrollar el cuadrado del doble producto vectorial que aparece en (77.6), hay que recordar que en el caso ultrarrelativista la componente longitudinal de la aceleración es pequeña frente a la componente transversal $\left(\text{en la razón } 1-\frac{v^2}{c^2}\right)$, y que en el presente caso podemos, con aproximación suficiente, considerar **w** y **v** perpendiculares entre sí. Para la distribución espectral de la radiación total se encuentra como resultado la fórmula siguiente:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{e^2\omega\, d\omega}{2\pi c^3}\int\limits_{\frac{\omega}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}^{\infty}\frac{|\mathbf{w}_{\omega'}|^2}{\omega'^2}\left[1-\frac{\omega}{\omega'}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{\omega^2}{2\omega'^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2\right]d\omega'.$$

§ 78. Dispersión por cargas libres

Si una onda electromagnética incide sobre un sistema de cargas, éstas se ponen en movimiento bajo su acción. Este movimiento produce a su vez radiación en todas direcciones; se produce, conforme se suele decir, una *dispersión* de la onda original.

Un índice conveniente para caracterizar la dispersión es la razón de la cantidad de energía emitida por el sistema dispersor en una dirección dada por unidad de tiempo al flujo de energía de la radiación incidente. Esta razón tiene, evidentemente, las dimensiones de una área y se llama *sección eficaz de dispersión.*

Sea dI la energía radiada por el sistema en el ángulo sólido do (por segundo) cuando sobre él incide una onda con vector de Poynting **S**. La sección eficaz de dispersión (en el ángulo sólido do) es entonces,

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{\overline{S}} \tag{78.1}$$

(el trazo encima de un símbolo significa valor medio respecto del tiempo). La integral σ de $d\sigma$ respecto de todas las direcciones es la sección eficaz *total* de dispersión.

Consideremos la dispersión producida por una carga libre en reposo. Supongamos que sobre esta carga incide una onda plana monocromática polarizada linealmente. Su campo eléctrico se puede escribir en la forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \alpha).$$

Supondremos que la velocidad adquirida por la carga bajo la acción de la onda incidente es pequeña comparada con la velocidad de la luz, lo que prácticamente siempre ocurre. Podemos considerar entonces la fuerza que actúa sobre la carga como igual a $e\mathbf{E}$, mientras que se puede prescindir de la fuerza $\frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}$ debida al campo magnético. Podemos también prescindir en este caso del efecto del corrimiento de la carga durante su vibración bajo la influencia del campo. Si la carga oscila en torno del origen de coordenadas, cabe suponer que el campo que actúa sobre ella en todo instante es el mismo que en el origen, esto es,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \alpha).$$

Dado que la ecuación del movimiento de la carga es

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}$$

y su momento dipolar $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, se tendrá:

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{e^2}{m}\mathbf{E}. \tag{78.2}$$

Para calcular la radiación dispersada, utilizaremos la fórmula (67.7) correspondiente a la radiación dipolar, lo que está justificado, ya que la velocidad adquirida por la carga bajo la influencia de la onda incidente es pequeña comparada con la velocidad de la luz. Obsérvese también que la frecuencia de la onda radiada por la carga (es decir, dispersada por ella) es evidentemente la misma que la frecuencia de la onda incidente.

Substituyendo (78.2) en (67.7), se encuentra:

$$dI = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3}(\mathbf{E}\times\mathbf{n})^2\, do. \tag{78.3}$$

Por otra parte, el vector de Poynting de la onda incidente es.

$$S = \frac{c}{4\pi}E^2.$$

De aquí se sigue para la sección eficaz de dispersión en el ángulo sólido $d\acute{o}$ el valor

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\acute{o}, \tag{78.4}$$

donde θ es el ángulo formado por la dirección de dispersión (el vector **n**) y la dirección del campo eléctrico **E** de la onda incidente. Vemos así que la sección eficaz de dispersión por una carga libre es independiente de la frecuencia.

Determinemos la sección eficaz total. Para ello elijamos el eje polar en el sentido de **E**; entonces $do = \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$ y substituyendo este resultado e integrando respecto de θ de 0 a π y respecto de ϕ de 0 a 2π, se encuentra

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2. \tag{78.5}$$

(fórmula de Thomson).

Finalmente, calculemos la sección eficaz $d\sigma$ para el caso en que la onda incidente no está polarizada (luz natural). Para ello hemos de promediar (78.4) respecto de las direcciones del vector **E** en un plano perpendicular a la dirección de propagación de la onda incidente (dirección del vector de onda **k**). Designemos por **e** el versor de **E** y hagamos:

$$\overline{\operatorname{sen}^2\theta} = 1 - \overline{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{e})^2} = 1 - n_\alpha n_\beta \overline{e_\alpha e_\beta}.$$

El cálculo del valor medio se efectúa mediante la fórmula †

$$\overline{e_\alpha e_\beta} = \frac{1}{2}\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) \tag{78.6}$$

y da

$$\overline{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})^2}{k^2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\Theta),$$

donde Θ es el ángulo formado por las direcciones de las ondas incidente y dispersada (ángulo de dispersión). Se encuentra así para la sección eficaz de dispersión de una onda, no polarizada, por una carga libre

$$d\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1+\cos^2\Theta)\, do, \tag{78.7}$$

La dispersión conduce a la aparición de una cierta fuerza que actúa sobre la partícula dispersora. Es fácil comprobarlo mediante las siguientes consideraciones. En promedio, la onda que incide sobre la partícula pierde, por unidad de tiempo, una energía $c\overline{W}\sigma$, donde $\overline{W}$ es la densidad media de energía y σ es la sección eficaz total de dispersión. Dado que el impulso del campo es igual a su energía dividida por la velocidad de la luz, la onda incidente pierde un impulso igual, en valor ab-

† En efecto, $e_\alpha e_\beta$ es un tensor simétrico cuya traza es igual a 1 y cuyo producto por k_α es igual a cero debido a que **e** y **k** son perpendiculares. Estas condiciones cumple precisamente esta expresión.

soluto, a $\overline{W}\sigma$. Por otra parte, en un sistema de referencia en el que la carga efectúa solamente pequeñas oscilaciones bajo la acción de la fuerza $e\mathbf{E}$, y en el que su velocidad v es pequeña, el flujo total de impulso en la onda dispersada es igual a cero, salvo términos de orden superior al primero en v/c (en el § 73 se demostró que en un sistema de referencia en el cual $v = 0$, la partícula no radia impulso). Por consiguiente, todo el impulso perdido por la onda incidente es « absorbido » por la partícula dispersora. La fuerza media $\overline{\mathbf{f}}$ que actúa sobre la partícula es igual al valor medio del impulso absorbido por unidad de tiempo, es decir,

$$\overline{\mathbf{f}} = \sigma \overline{W} \mathbf{n}_0 \tag{78.8}$$

($\mathbf{n}_0$ es el vector unitario correspondiente a la dirección de propagación de la onda incidente). Obsérvese que el valor medio de la fuerza aparece como cantidad de segundo orden respecto del campo de la onda incidente, mientras que la fuerza « instantánea » (cuya parte principal es $e\mathbf{E}$) es de primer orden respecto del mismo.

La fórmula (78.8) se puede obtener también directamente promediando la fuerza de frenado (75.10). El primer término, proporcional a $\mathbf{E}$, se reduce a cero al promediar, al igual que el valor medio de la parte principal de la fuerza, $e\mathbf{E}$. El segundo término da

$$\overline{\mathbf{f}} = \frac{2e^4}{3m^2c^4} \overline{E^2} \mathbf{n}_0 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\overline{E^2}}{4\pi} \mathbf{n}_0,$$

que, teniendo en cuenta (78.5), coincide con (78.8).

Problemas

1. Determinar la sección eficaz de dispersión de una onda, polarizada elípticamente, por una carga libre.

Solución. El campo de la onda es de la forma $\mathbf{E} = \mathbf{A} \cos(\omega t + \alpha) + \mathbf{B} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$, donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son vectores perpendiculares entre sí (véase § 48). Un razonamiento análogo al que se desarrolló en el texto conduce a

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{(\mathbf{A} \times \mathbf{n})^2 + (\mathbf{B} \times \mathbf{n})^2}{A^2 + B^2} do.$$

2. Determinar la sección eficaz de dispersión de una onda, polarizada linealmente, por una carga que efectúa pequeñas oscilaciones bajo la acción de una fuerza elástica (oscilador).

Solución. La ecuación del movimiento de la carga en el campo incidente $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \alpha)$ es:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \alpha),$$

donde ω_0 es la frecuencia de sus oscilaciones libres. Para las oscilaciones forzadas, tenemos entonces

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}_0 \cos(\omega t+\alpha)}{m(\omega_0^2-\omega^2)}.$$

Calculando $\ddot{\mathbf{d}}$ a partir de este resultado, se encuentra

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2} \operatorname{sen}^2\theta \, do$$

(θ es el ángulo formado por **E** y **n**).

3. Determinar la sección eficaz total de dispersión de la luz por un dipolo eléctrico que, mecánicamente, se comporta como un rotador. La frecuencia ω de la onda se supone grande comparada con la frecuencia Ω_0 de la rotación libre del rotador.

Solución. En virtud de la condición $\omega \gg \Omega_0$, podemos prescindir de la rotación libre del rotador y considerar solamente la rotación forzada bajo la acción del momento de fuerzas $\mathbf{d}\times\mathbf{E}$ ejercido sobre él por la onda dispersada. La ecuación de este movimiento es: $J\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{d}\times\mathbf{E}$, donde J es el momento de inercia del rotador y $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular de rotación. El cambio del vector momento dipolar, cuando gira sin cambiar su valor absoluto, viene dado por la fórmula $\dot{\mathbf{d}} = \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{d}$. De estas dos ecuaciones se deduce (prescindiendo del término de segundo grado en la pequeña cantidad $\boldsymbol{\Omega}$):

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{1}{J}(\mathbf{d}\times\mathbf{E})\times\mathbf{d} = \frac{1}{J}[\mathbf{E}d^2-(\mathbf{E}\cdot\mathbf{d})\mathbf{d}].$$

Suponiendo que todas las orientaciones del dipolo en el espacio son igualmente probables y promediando $\ddot{\mathbf{d}}^2$ respecto de ellas, se encuentra para la sección eficaz total

$$\sigma = \frac{16\pi d^4}{9c^4J^2}.$$

4. Determinar el grado de despolarización en la dispersión de la luz natural por una carga libre.

Solución. Por razones de simetría, es claro que las dos componentes polarizadas incoherentes de la luz dispersada (véase § 50) estarán polarizadas linealmente: una en el plano de dispersión (el plano que pasa por las direcciones de las ondas incidente y dispersada) y la otra perpendicularmente a dicho plano. Las intensidades de estas componentes están determinadas por la componente del campo de la onda incidente en el plano de dispersión ($\mathbf{E}_{\parallel}$) y la perpendicular al mismo ($\mathbf{E}_{\perp}$); de acuerdo con (78.3), dichas intensidades son proporcionales respectivamente a

$$(\mathbf{E}_{\parallel}\times\mathbf{n})^2 = E_{\parallel}^2 \cos^2\Theta \quad \text{y} \quad (\mathbf{E}_{\perp}\times\mathbf{n})^2 = E_{\perp}^2$$

(Θ es el ángulo de dispersión). Dado que para la luz natural incidente, $\bar{E}_{\parallel}^2 = \bar{E}_{\perp}^2$, el grado de despolarización [véase la definición en (50.9)] es:

$$\varrho = \cos^2\Theta.$$

5. Determinar la frecuencia ω' de la luz dispersada por una carga en movimiento.

Solución. En un sistema de coordenadas en que la carga está en reposo, la frecuencia de la luz no cambia en la dispersión ($\omega = \omega'$). Esta relación se puede escribir en forma invariante:

$$k'_i u'^i = k_i u^i,$$

donde u^i es la cuadrivelocidad de la carga. De aquí se sigue sin dificultad

$$\omega'\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta'\right) = \omega\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right),$$

donde θ y θ' son los ángulos formados por las ondas incidente y dispersada con la dirección del movimiento (v es la velocidad de la carga).

6. Determinar la distribución angular en la dispersión de una onda, polarizada linealmente, por una carga que se mueve con velocidad v en la dirección de propagación de la onda.

Solución. La intensidad dispersada resulta de (73.14), donde la aceleración **w** de la partícula se debe expresar en función de los campos **E** y **H** de la onda incidente mediante las fórmulas obtenidas en el problema del § 17; al hacerlo, no hay que perder de vista que **v** es perpendicular a **E** y **H**. Dividiendo la intensidad dI por el vector de Poynting de la onda incidente, se obtiene la siguiente expresión para la sección eficaz de dispersión:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1-\frac{v}{c}\operatorname{sen}\theta\cos\phi\right)^6}\left[\left(1-\frac{v}{c}\operatorname{sen}\theta\cos\phi\right)^2 - \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\cos^2\theta\right] do,$$

donde θ y ϕ son ahora el ángulo polar y el acimut de la dirección **n** respecto de un sistema de coordenadas cuyo eje Z es paralelo a **E** y cuyo eje X lo es a **v** ($\cos(\mathbf{n}, \mathbf{E}) = \cos\theta$; $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi$).

7. Determinar el movimiento de una carga bajo la acción de la fuerza media que ejerce sobre ella la onda dispersada por la misma.

Solución. La fuerza (78.8), y por consiguiente la velocidad del movimiento considerado, está dirigida en el sentido de propagación de la onda incidente (eje X). En el sistema de referencia auxiliar K_0, en el que la partícula se encuentra en reposo (recuérdese que se trata del movimiento promediado durante un período de las pequeñas oscilaciones), la fuerza que actúa sobre ella es $\sigma\overline{W}_0$ y la aceleración que adquiere bajo la acción de esta fuerza es:

$$w_0 = \frac{\sigma}{m}\overline{W}_0$$

(el índice 0 designa los valores en el sistema de referencia K_0). La transformación al sistema de referencia original K (en el que la carga se mueve con velocidad v) viene dada por las fórmulas obtenidas en el problema del § 7 y por la fórmula (47.7), y conduce a:

$$\frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{dv}{dt} = \frac{\overline{W}\sigma}{m}\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}.$$

Integrando esta expresión, se obtiene

$$\frac{\overline{W}\sigma}{mc}t = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\cdot\frac{2-\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} - \frac{2}{3},$$

lo que determina la velocidad $v = dx/dt$ como función implícita del tiempo (se ha elegido la constante de integración de manera que $v = 0$ para $t = 0$).

8. Determinar la fuerza media ejercida sobre una carga en movimiento en el campo electromagnético constituido por una superposición de ondas con distribución isótropa de las direcciones de propagación.

Solución. Escribamos la ecuación del movimiento de la carga en forma cuadridimensional,

$$mc\frac{du^i}{ds} = g^i.$$

Para determinar el cuadrivector g^i, obsérvese que en un sistema de referencia en el que la carga está en reposo en un instante dado y en presencia de una sola onda que se propaga en una dirección determinada (por ejemplo, a lo largo del eje X), la ecuación del movimiento es ($v_x \equiv v$)

$$m\frac{dv}{dt} = \sigma W$$

(se prescinde en todas partes del signo de promedio). Esto significa que la componente-x del vector g^i debe reducirse a $\frac{W}{c}\sigma$. El cuadrivector $\frac{\sigma}{c}T^{ik}u_k$ tiene esta propiedad, donde T^{ik} es el tensor energía-impulso de la onda y u^i es la cuadrivelocidad de la carga. Además, g^i debe satisfacer la condición $g^i u_i = 0$. Que ésta se cumpla se puede conseguir sumando a la expresión anterior un cuadrivector de la forma αu_i, donde α es un escalar. Determinando α de manera adecuada, obtenemos

$$mc\frac{du^i}{ds} = \frac{\sigma}{c}(T^{ik}u_k - u^i u_k u_l T^{kl}). \tag{1}$$

En un campo electromagnético de radiación isótropa, el vector de Poynting se anula por razón de simetría, y el tensor de tensiones $\sigma_{\alpha\beta}$ debe ser de la forma const. $\delta_{\alpha\beta}$. Observando también que ha de tenerse $T^i_i = 0$, de donde $\sigma_{\alpha\alpha} = T^0_0 = W$ se encuentra

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{W}{3}\delta_{\alpha\beta},$$

Substituyendo estas expresiones en (1), encontramos que la fuerza que actúa sobre la carga es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = -\frac{4W\sigma v}{3c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

Esta fuerza actúa en sentido opuesto al del movimiento de la carga, es decir, la carga se ve frenada. Obsérvese que, para $v \ll c$, la fuerza de frenado es proporcional a la velocidad de la carga:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{4W\sigma v}{3c}.$$

9. Determinar la sección eficaz de dispersión de una onda, polarizada linealmente, por un oscilador, teniendo en cuenta el frenado por radiación.

Solución. Escribamos la ecuación del movimiento de la carga en el campo incidente en la forma

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{\mathbf{r}}.$$

En la fuerza de frenado podemos hacer, aproximadamente, $\dddot{\mathbf{r}} = -\omega_0^2 \dot{\mathbf{r}}$; se obtiene entonces:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t},$$

donde $\gamma = \frac{2e^2}{3mc^3}\omega_0^2$. De aquí se sigue:

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}.$$

La sección eficaz es:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}.$$

§ 79. Dispersión de ondas de baja frecuencia

La dispersión de una onda por un sistema de cargas difiere de la dispersión por una sola carga (en reposo), en primer lugar, por el hecho de que, debido a la presencia del movimiento interno de las cargas del sistema, la frecuencia de la radiación dispersada puede ser diferente de la frecuencia de la onda incidente. Es más, en la descomposición espectral de la onda dispersada aparecen, además de la frecuencia ω de la onda incidente, frecuencias ω' que difieren de ω en una cualquiera de las frecuencias internas del movimiento del sistema dispersor. La dispersión acompañada de cambio de frecuencia se llama *incoherente* (o *combinatoria*) en contraposición con la dispersión *coherente*, sin cambio de frecuencia.

Suponiendo que el campo de la onda incidente es débil, podemos representar la densidad de corriente en la forma $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}'$, donde $\mathbf{j}_0$ es la densidad de corriente en ausencia del campo exterior y $\mathbf{j}'$ es el cambio de la corriente debido a la acción de la onda incidente. Análogamente, el potencial vector (y demás cantidades) del campo del sistema tienen también la forma $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}'$, donde $\mathbf{A}_0$ y $\mathbf{A}'$ están determinados por las corrientes $\mathbf{j}_0$ y $\mathbf{j}'$; el potencial $\mathbf{A}'$ define la onda dispersada por el sistema.

Consideremos la dispersión de una onda cuya frecuencia ω es pequeña comparada con todas las frecuencias propias del sistema. La dispersión constará de una parte coherente y de una parte incoherente, pero consideraremos aquí sólo la dispersión coherente.

Al calcular el campo de la onda dispersada, para una frecuencia ω suficientemente baja podemos utilizar el desarrollo de los potenciales retardados que se presentó en § 67 y § 71, incluso si las velocidades de las partículas del sistema no son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. En efecto, para que sea válido dicho desarrollo de la integral

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}'_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{c}}\, dV,$$

es necesario solamente que el tiempo $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}/c \sim a/c$ sea pequeño comparado con el tiempo $1/\omega$; para frecuencias suficientemente bajas ($\omega \ll c/a$) esta condición se cumple con independencia de las velocidades de las partículas en el sistema.

Los primeros términos del desarrollo dan:

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{c^2 R_0}\{\ddot{\mathbf{d}}'\times\mathbf{n} + (\ddot{\mathfrak{m}}'\times\mathbf{n})\times\mathbf{n}\},$$

donde $\mathbf{d}'$, $\mathfrak{m}'$ son las contribuciones de los momentos dipolar y magnético del sistema que se producen por la radiación que incide sobre el mismo. Los términos siguientes contienen derivadas respecto del tiempo de orden superior al segundo y prescindiremos de ellos.

La componente $\mathbf{H}'_\omega$ de la descomposición espectral del campo de la onda dispersada cuya frecuencia es igual a la de la onda incidente, viene dada por la misma fórmula sin más que substituir en ella en vez de las diferentes magnitudes sus componentes de Fourier: $\ddot{\mathbf{d}}'_\omega = -\omega^2\mathbf{d}'_\omega$, $\ddot{\mathfrak{m}}'_\omega = -\omega^2\mathfrak{m}'_\omega$. Se obtiene entonces:

$$\mathbf{H}'_\omega = \frac{\omega^2}{c^2 R_0}\{\mathbf{n}\times\mathbf{d}'_\omega + \mathbf{n}\times(\mathfrak{m}'_\omega\times\mathbf{n})\}. \tag{79.1}$$

Los términos siguientes en el desarrollo del campo darían cantidades proporcionales a potencias de orden superior de la frecuencia, que es pequeña. Si las velocidades de todas las partículas del sistema son pequeñas ($v \ll c$), podemos prescindir en (79.1) del segundo término frente al primero, ya que el momento magnético contiene la razón v/c. En estas condiciones,

$$\mathbf{H}'_\omega = \frac{1}{c^2 R_0}\omega^2\mathbf{n}\times\mathbf{d}'_\omega. \tag{79.2}$$

Si la carga total del sistema es cero, cuando $\omega\to 0$, $\mathbf{d}'_\omega$ y $\mathfrak{m}'_\omega$ tienden a límites constantes (si la suma de las cargas fuese diferente de cero, para $\omega = 0$, es decir, para un campo constante, el sistema se movería como un todo). Por consiguiente, para frecuencias bajas ($\omega \ll v/a$) podemos considerar $\mathbf{d}'_\omega$ y $\mathfrak{m}'_\omega$ como independientes de la frecuencia, de manera que el campo de la onda dispersada es proporcional al cuadrado de la frecuencia. Su intensidad resulta así proporcional a ω^4. Por lo tanto,

en la dispersión de las ondas de baja frecuencia la sección eficaz de dispersión coherente es proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia de la radiación incidente †.

§ 80. Dispersión de ondas de alta frecuencia

Consideremos la dispersión de una onda por un sistema de cargas en el caso límite opuesto, es decir, cuando la frecuencia ω de la onda es grande comparada con las frecuencias propias fundamentales del sistema. Estas últimas son del orden de $\omega_0 \sim v/a$, de manera que ω debe satisfacer la condición

$$\omega \gg \omega_0 \sim \frac{v}{a}. \tag{80.1}$$

Además, supondremos que las velocidades de las cargas en el sistema son pequeñas ($v \ll c$).

De acuerdo con la condición (80.1), el período del movimiento de las cargas en el sistema es grande comparado con el período de la onda. Por consiguiente, durante un intervalo de tiempo del orden de este último, el movimiento de las cargas se puede considerar uniforme. Esto significa que, al estudiar la dispersión de ondas cortas, no es necesario tener en cuenta la interacción de las cargas del sistema entre sí, esto es, podemos considerarlas como libres.

Así, al calcular la velocidad $\mathbf{v}'$ adquirida por una carga en el campo de la onda incidente, podemos considerar cada una de las cargas del sistema por separado, y escribir para ella la ecuación del movimiento en la forma

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e\mathbf{E} = e\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})},$$

donde $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$ es el vector de onda de la onda incidente. El vector posición de la carga es, claro está, una función del tiempo. En el exponente que aparece en el factor exponencial del segundo miembro de esta ecuación, la variación del primer término por unidad de tiempo es grande comparada con la del segundo (la primera es igual a ω, mientras que la segunda es del orden de $kv \sim v\frac{\omega}{c} \ll \omega$). Por lo tanto, al integrar la ecuación del movimiento podemos suponer constante el vector $\mathbf{r}$ del segundo miembro. En estas condiciones,

$$\mathbf{v}' = -\frac{e}{i\omega m}\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}. \tag{80.2}$$

† Este resultado se aplica de hecho no sólo a la dispersión de la luz por átomos neutros, sino a la dispersión por iones. Debido a la gran masa del núcleo, se puede prescindir de la dispersión que resulta del movimiento del ion en conjunto.

En cuanto al potencial vector de la onda dispersada (a grandes distancias del sistema), de la fórmula general (66.2) se sigue:

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}'_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}'}{c}}\,dV = \frac{1}{cR_0}\sum (e\mathbf{v}')_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}'}{c}},$$

donde la suma se extiende a todas las cargas del sistema; $\mathbf{n}'$ es el vector unitario correspondiente a la dirección de dispersión. Substituyendo (80.2), se encuentra,

$$\mathbf{A}' = -\frac{1}{icR_0\omega}e^{-i\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)}\mathbf{E}_0\sum\frac{e^2}{m}e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \tag{80.3}$$

donde $\mathbf{q} = \mathbf{k}'-\mathbf{k}$ es la diferencia entre el vector de onda $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$ de la onda incidente y el vector de onda $\mathbf{k}' = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}'$ de la onda dispersada †. Como valor de la suma en (80.3) debe tomarse el correspondiente al instante $t' = t-\frac{R_0}{c}$, ya que podemos prescindir del cambio de $\mathbf{r}$ en el tiempo $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}'/c$ en virtud de la hipótesis de que las velocidades de las partículas son pequeñas (como siempre, para abreviar prescindimos del índice t'). El valor absoluto del vector $\mathbf{q}$ es igual a

$$q = 2\frac{\omega}{c}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}, \tag{80.4}$$

donde θ es el ángulo de dispersión.

En el caso de dispersión por un átomo (o molécula), podemos prescindir de los términos de la suma en (80.3) asociados a los núcleos, dado que sus masas son grandes comparadas con las masas de los electrones. Más adelante consideraremos precisamente este caso, de manera que separaremos el factor e^2/m como factor común y entenderemos por e y m la carga y la masa del electrón.

Para el campo $\mathbf{H}'$ de la onda dispersada se encuentra a partir de (66.3):

$$\mathbf{H}' = \frac{\mathbf{E}_0\times\mathbf{n}'}{c^2R_0}e^{-i\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)}\frac{e^2}{m}\sum e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tag{80.5}$$

El flujo de energía en un elemento de ángulo sólido en la dirección $\mathbf{n}'$ es:

$$\frac{c|\mathbf{H}'|^2}{8\pi}R_0^2\,do = \frac{e^4}{8\pi c^3m^2}(\mathbf{n}'\times\mathbf{E}_0)^2\left|\sum e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\right|^2 do.$$

† Hablando estrictamente, el vector de onda es $\mathbf{k}' = \omega'\mathbf{n}'/c$, donde la frecuencia ω' de la onda dispersada puede diferir de ω. Sin embargo, en el caso presente de frecuencias elevadas se puede prescindir de la diferencia $\omega'-\omega \sim \omega_0$.

Dividiendo este valor por el flujo de energía de la onda incidente $\frac{c}{8\pi}|\mathbf{E}_0|^2$ e introduciendo el ángulo θ formado por el campo $\mathbf{E}$ de la onda incidente y la dirección de dispersión, obtenemos finalmente la sección eficaz de dispersión en la forma

$$do = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \overline{\left|\sum e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\right|^2} \operatorname{sen}^2\theta \, do. \tag{80.6}$$

El trazo designa el valor medio respecto del tiempo, es decir, el promedio relativo al movimiento de las cargas del sistema; su aparición se debe a que la dispersión se observa durante un intervalo de tiempo que es grande comparado con el período del movimiento de dichas cargas.

Para la longitud de onda de la radiación incidente, de la condición (80.1) se sigue la desigualdad $\lambda \ll \frac{c}{v} \cdot a$. En cuanto a los valores relativos de λ y a, los casos límite $\lambda \gg a$ y $\lambda \ll a$ son ambos posibles. Tanto en uno como en otro la fórmula general (80.6) se simplifica considerablemente.

Cuando $\lambda \gg a$, en la expresión (80.6) es $\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} \ll 1$, dado que $q \sim 1/\lambda$, y r es del orden de a. Substituyendo, de acuerdo con esto, $e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ por la unidad, tenemos:

$$d\sigma = \left(\frac{Ze^2}{mc^2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta \, do \tag{80.7}$$

esto es, la dispersión es proporcional al cuadrado del número Z de electrones en el átomo.

Pasemos ahora al caso en que $\lambda \ll a$. En el cuadrado de la suma que aparece en (80.6), además del cuadrado del módulo de cada término aparecen productos de la forma $e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}$. Al promediar respecto del movimiento de las cargas, es decir, respecto de sus distancias mutuas, $\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ toma valores absolutos contenidos en un intervalo del orden de a. Dado que $q \sim 1/\lambda$, $\lambda \ll a$, el factor exponencial $e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}$ es una función que oscila rápidamente en este intervalo, y su valor medio se anula. Así, para $\lambda \ll a$ la sección eficaz de dispersión es igual a

$$d\sigma = Z\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta \, do, \tag{80.8}$$

esto es, resulta proporcional a la primera potencia del número atómico. Obsérvese que esta fórmula no es aplicable a ángulos pequeños de dispersión $\left(\theta \sim \frac{\lambda}{a}\right)$, ya que

en este caso $q \sim \frac{\theta}{\lambda} \sim \frac{1}{a}$ y el exponente $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}$ no es grande comparado con la unidad.

Para determinar la sección eficaz de dispersión coherente, hemos de separar aquella parte del campo de la onda dispersada cuya frecuencia es ω. La expresión (80.5) depende del tiempo a través del factor e^{-iwt} y, además, también depende del tiempo la suma $\sum e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$. Esta última dependencia conduce a que en el campo de la onda dispersada existan, junto con la frecuencia ω, otras frecuencias (si bien próximas a ω). La parte del campo que corresponde a la frecuencia ω (es decir, que depende del tiempo sólo a través del factor e^{-iwt}), se obtiene, evidentemente, si promediamos respecto del tiempo la suma $\sum e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$. De acuerdo con esto, la expresión de la sección eficaz de dispersión coherente $d\sigma_{\text{coh}}$ difiere de la sección eficaz total $d\sigma$ en que contiene, en vez del valor medio del cuadrado del módulo de la suma, el cuadrado del módulo del valor medio de la misma,

$$d\sigma_{\text{coh}} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left|\overline{\sum e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}\right|^2 \operatorname{sen}^2\theta \, d\text{o}. \tag{80.9}$$

Conviene observar que este último valor medio es (salvo un factor) precisamente la componente espacial de Fourier de la distribución $\varrho(\mathbf{r})$ de la densidad de carga eléctrica en el átomo:

$$e\overline{\sum e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}} = \int \varrho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \, dV = \varrho_{\mathbf{q}}. \tag{80.10}$$

Cuando $\lambda \gg a$, podemos substituir una vez más $e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ por la unidad, de manera que

$$d\sigma_{\text{coh}} = \left(Z\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta \, do. \tag{80.11}$$

Comparando este resultado con la sección eficaz total (80.7), vemos que $d\sigma_{\text{coh}} = d\sigma$, esto es, toda la dispersión es coherente.

Si $\lambda \ll a$, al promediar en (80.9) se anulan todos los términos de la suma (que on funciones rápidamente oscilantes del tiempo), de manera que $d\sigma_{\text{coh}} = 0$. En ste caso, pues, la dispersión es por completo incoherente.

CAPÍTULO 10

PARTÍCULA EN UN CAMPO GRAVITATORIO

§ 81. Los campos gravitatorios en mecánica no relativista

Los llamados campos *gravitatorios* o campos de *gravedad* tienen la propiedad fundamental de que todos los cuerpos se mueven en ellos de la misma manera, con independencia de la masa, con tal que las condiciones iniciales sean las mismas.

Por ejemplo, las leyes de la caída libre en el campo gravitatorio terrestre son las mismas para todos los cuerpos; cualquiera que sea su masa, todos adquieren la misma aceleración.

Esta propiedad de los campos gravitatorios hace posible establecer una analogía esencial entre el movimiento de los cuerpos en un campo gravitatorio y el movimiento de los cuerpos que no están situados en ningún campo exterior, pero que se consideran desde el punto de vista de un sistema de referencia no inercial. En efecto, en un sistema de referencia inercial, el movimiento libre de todos los cuerpos es uniforme y rectilíneo y sí, por ejemplo, en el instante inicial sus velocidades eran todas las mismas, seguirán siendo las mismas en cualquier instante. Es claro, pues, que si consideramos este movimiento desde un sistema no inercial dado, también respecto de este sistema todos los cuerpos se moverán de la misma manera.

Las propiedades del movimiento en un sistema no inercial son, por consiguiente, las mismas que en un sistema inercial cuando existe un campo gravitatorio. Con otras palabras, un sistema de referencia no inercial equivale a un cierto campo gravitatorio. Éste es el llamado *principio de equivalencia.*

Consideremos, por ejemplo, el movimiento de un sistema de referencia uniformemente acelerado. Un cuerpo de masa arbitraria que se mueve libremente en dicho sistema posee, respecto del mismo, una aceleración que, claro está, es constante e igual y opuesta a la aceleración del propio sistema. Lo mismo vale para el movimiento en un campo gravitatorio constante y uniforme, por ejemplo, el campo de gravedad de la tierra (en pequeñas regiones, donde el campo se puede considerar

uniforme). Así, un sistema de referencia uniformemente acelerado equivale a un campo exterior uniforme y constante. Un caso algo más general es el de un sistema de referencia en movimiento rectilíneo no uniformemente acelerado — que equivale, evidentemente, a un campo gravitatorio uniforme, pero variable.

Sin embargo, los campos a los que equivalen los sistemas de referencia no inerciales no son por completo idénticos a los campos gravitatorios « reales » que encontramos también en los sistemas inerciales. En efecto, existe una diferencia esencial en cuanto a su comportamiento en el infinito. A distancia infinita de los cuerpos que producen el campo, un campo gravitatorio « real » tiende siempre a cero. Por el contrario, los campos a que equivalen los sistemas de referencia no inerciales aumentan sin límite en el infinito, o, en cualquier caso, conservan en él un valor no nulo. Así, por ejemplo, la fuerza centrífuga que aparece en un sistema de referencia en rotación aumenta sin límites cuando nos apartamos del eje de rotación; el campo al que equivale un sistema de referencia en movimiento rectilíneo acelerado es el mismo en todo el espacio, incluido el infinito.

Los campos a los que equivalen los sistemas no inerciales se anulan no bien pasamos a un sistema inercial. En cambio, los campos gravitatorios « reales » (los que existen también en un sistema de referencia inercial) no se pueden eliminar sea cual sea la elección que se haga del sistema de referencia. Esto es evidente ya por lo dicho antes acerca de la diferencia entre las condiciones en el infinito para los campos gravitatorios « reales » y los campos gravitatorios a los que equivalen los sistemas no inerciales; dado que estos últimos campos no tienden a cero en el infinito, es claro que, cualquiera que sea el sistema de referencia elegido, es imposible anular un campo « real », puesto que éste se anula en el infinito.

Todo lo que cabe hacer mediante una elección adecuada del sistema de referencia, es anular el campo gravitatorio en una región dada del espacio, suficientemente pequeña para que el campo se pueda considerar uniforme en ella. Esto es posible eligiendo un sistema en movimiento acelerado, cuya aceleración sea igual a la que hubiera adquirido una partícula colocada en la región del campo que estamos considerando.

El movimiento de una partícula en un campo gravitatorio está determinado, en mecánica no relativista, por una función de Lagrange que (en un sistema de referencia inercial) tiene la forma

$$L = \frac{mv^2}{2} - m\phi, \tag{81.1}$$

donde ϕ es una cierta función de las coordenadas y del tiempo que caracteriza el

campo y se llama *potencial gravitatorio* †. De acuerdo con esto, las ecuaciones del movimiento de la partícula son

$$\dot{\mathbf{v}} = -\text{grad}\,\phi. \tag{81.2}$$

Estas ecuaciones no contienen ni las masas ni ninguna otra constante que caracterice las propiedades de la partícula, lo que constituye la expresión matemática de la propiedad fundamental de los campos gravitatorios.

§ 82. El campo gravitatorio en la mecánica relativista

La propiedad fundamental de los campos gravitatorios que hemos señalado en la sección anterior, a saber, que todos los cuerpos se mueven en ellos de la misma manera, conserva su validez también en mecánica relativista. En consecuencia, subsiste también la analogía entre campos gravitatorios y sistemas de referencia no inerciales. Por lo tanto, es natural que al estudiar las propiedades de los campos gravitatorios en mecánica relativista se parta también de esta analogía.

En un sistema de referencia inercial y en coordenadas cartesianas, el intervalo ds viene dado por la relación:

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Al pasar a cualquier otro sistema de referencia inercial (es decir, en una transformación de Lorentz), el intervalo, conforme sabemos, conserva la misma forma. Sin embargo, si pasamos a un sistema de referencia no inercial, ds^2 no será igual ya a la suma de los cuadrados de las cuatro diferenciales de las coordenadas.

Así, por ejemplo, si pasamos a un sistema de coordenadas en rotación uniforme

$$x = x'\cos\Omega t - y'\,\text{sen}\,\Omega t, \qquad y = x'\,\text{sen}\,\Omega t + y'\cos\Omega t, \qquad z = z'$$

(Ω es la velocidad angular de la rotación, dirigida en el sentido del eje Z), el intervalo toma la forma

$$ds^2 = [c^2 - \Omega^2(x'^2 + y'^2)]\,dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\Omega y'\,dx'\,dt - 2\Omega x'\,dy'\,dt.$$

Cualquiera que sea la ley de transformación de la coordenada tiempo, esta expresión no se puede reducir a una suma de cuadrados de las diferenciales de las coordenadas.

---

† En lo que sigue, no tendremos que utilizar el potencial electromagnético ϕ, de modo que representar el potencial gravitatorio por el mismo símbolo no puede conducir a confusiones.

En un sistema no inercial de referencia, el cuadrado del intervalo aparece, pues, como una forma cuadrática en las diferenciales de las coordenadas de tipo general, esto es, tiene la forma

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k, \tag{82.1}$$

donde las g_{ik} son ciertas funciones de las coordenadas espaciales x^1, x^2, x^3 y de la coordenada temporal x^0. Por consiguiente, cuando utilizamos sistemas de referencia no inerciales, el sistema cuadridimensional de coordenadas x^0, x^1, x^2, x^3 es curvilíneo. De las cantidades g_{ik}, que determinan todas las propiedades geométricas en cada sistema de coordenadas curvilíneas, diremos que representan la *métrica del espacio-tiempo*.

Es evidente que las cantidades g_{ik} se pueden siempre considerar simétricas respecto de los índices i y k ($g_{ki} = g_{ik}$), ya que están determinadas por la forma simétrica (82.1), donde g_{ik} y g_{ki} aparecen como coeficientes de un mismo producto, $dx^i\, dx^k$. En el caso general, existen diez cantidades g_{ik} diferentes — cuatro con índices iguales y $4 \cdot 3/2 = 6$ con índices distintos. En un sistema de referencia inercial, cuando utilizamos coordenadas espaciales cartesianas $x^{1,2,3} = x, y, z$ y el tiempo $x^0 = ct$, las cantidades g_{ik} son

$$g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1,\ g_{ik} = 0 \text{ para } i \neq k. \tag{82.2}$$

Llamaremos a un sistema de coordenadas (cuadridimensional) con estos valores de las g_{ik} sistema *galileano*.

En el párrafo anterior se demostró que un sistema de referencia no inercial equivale a un cierto campo de fuerzas. Vemos ahora que en mecánica relativista estos campos están determinados por las cantidades g_{ik}.

Lo mismo vale para los campos gravitatorios « reales ». Todo campo gravitatorio no es sino un cambio en la métrica del espacio-tiempo, en correspondencia con el cual el campo viene determinado por las cantidades g_{ik}. Este importante hecho significa que las propiedades geométricas del espacio-tiempo (su métrica) están determinadas por fenómenos físicos y no son propiedades invariables del espacio y del tiempo.

La teoría de los campos gravitatorios, construida sobre la base de la teoría de la relatividad, se llama *teoría de la relatividad general*. Fue establecida por Einstein (y finalmente formulada por él en 1916), y representa probablemente la más bella de las teorías físicas existentes. Es notable que Einstein la desarrolló de manera puramente deductiva y tan sólo después se vio apoyada por observaciones astronómicas.

Como en la mecánica no relativista, existe una diferencia radical entre campos gravitatorios « reales » y campos a que son equivalentes los sistemas de referencia no inerciales. Al pasar a un sistema de referencia no inercial, la forma cuadrática (82.1), es decir, las cantidades g_{ik}, se obtienen a partir de sus valores galileanos (82.2) mediante una simple transformación de coordenadas, y se pueden reducir en todo el espacio de nuevo a sus valores galileanos mediante la transformación de coordenadas inversa. Que estas formas de las g_{ik} son muy particulares resulta claramente del hecho de que mediante una mera transformación de las *cuatro* coordenadas es imposible reducir las *diez* cantidades g_{ik} a una forma fijada previamente.

Un campo gravitatorio « real » no se puede anular por una transformación de coordenadas. Con otras palabras, en presencia de un campo gravitatorio el espacio-tiempo es tal que las cantidades g_{ik} que determinan su métrica no pueden reducirse, cualquiera que sea la transformación de coordenadas, a sus valores galileanos en todo el espacio. De un espacio-tiempo con estas características se dice que es *curvo* en contraposición al espacio-tiempo *plano* en el que es posible dicha reducción.

Mediante una elección adecuada de coordenadas, podemos, sin embargo, reducir las cantidades g_{ik} a la forma galileana en un punto cualquiera del espacio-tiempo no galileano: ello equivale a la reducción de una forma cuadrática con coeficientes constantes (los valores de las g_{ik} en el punto dado) a la forma diagonal. De un sistema de coordenadas de estas características se dice que es *galileano en el punto dado* †.

Observemos que, después de reducida a la forma diagonal en un punto dado, la matriz de las cantidades g_{ik} posee un valor principal positivo y tres negativos ††.

De aquí se sigue, en particular, que el determinante g formado por las cantidades g_{ik}, es siempre negativo para un espacio-tiempo real:

$$g < 0. \tag{82.3}$$

Un cambio en la métrica del espacio-tiempo representa también un cambio en la métrica puramente espacial. A un conjunto g_{ik} galileano en el espacio-tiempo plano, corresponde una geometría euclídea del espacio. En un campo gravitatorio, en cambio, la geometría del espacio pasa a ser no euclídea. Esto vale tanto para los campos gravitatorios « reales », en los que el espacio-tiempo es « curvo », como

† Con todo, y para evitar interpretaciones erróneas, debemos hacer notar ya aquí que la elección de un tal sistema de coordenadas no significa que se haya anulado el campo gravitatorio en un entorno infinitesimal de dicho punto en el espacio de cuatro dimensiones. Esta anulación que es siempre posible en virtud del principio de equivalencia, tiene una más profunda significación (véase § 87).

†† Este conjunto de signos se llama *signatura* del tensor.

para los campos que resultan de que el sistema de referencia es no inercial, campos que conservan el carácter plano del espacio-tiempo.

El problema de la geometría espacial en un campo gravitatorio se estudiará más detenidamente en el § 84. Es útil, sin embargo, presentar aquí un simple argumento que muestra de manera intuitiva que el espacio se convierte en no euclídeo cuando pasamos a un sistema no inercial de referencia. Consideremos dos sistemas de referencia, de los cuales uno (K) es inercial, mientras el otro (K') gira uniformemente respecto de K en torno de su eje común Z. Un círculo en el plano x, y del sistema K (con centro en el origen de coordenadas) se puede considerar también como un círculo en el plano x', y' del sistema K'. Midiendo la longitud de la circunferencia y su diámetro con una regla en el sistema K, obtenemos valores cuya razón es igual a π, de acuerdo con el carácter euclídeo de la geometría en el sistema de referencia inercial. Supongamos ahora que la medida se efectúa con una regla en reposo respecto de K'. Si se observa este proceso desde el sistema K, encontramos que la regla tangente a la circunferencia experimenta una contracción de Lorentz, mientras que no cambia la regla colocada radialmente. Es claro, por lo tanto, que la razón de la circunferencia al diámetro, obtenida con esta medición, será mayor que π.

En el caso general de un campo gravitatorio variable arbitrario, la métrica del espacio no sólo no es euclídea, sino que además varía con el tiempo. Esto significa que las relaciones entre diferentes distancias geométricas cambian con el tiempo. Por lo tanto, la posición relativa de las « partículas de prueba » introducidas en el campo no puede mantenerse inalterada en ningún sistema de coordenadas †. Así, si las partículas están colocadas sobre la circunferencia de un círculo y a lo largo de un diámetro, dado que la razón de la longitud de la circunferencia a la del diámetro no es igual a π y cambia con el tiempo, es claro que si las distancias entre partículas a lo largo del diámetro se conservan, las distancias entre las situadas sobre la circunferencia deben cambiar, y recíprocamente. Por consiguiente, en la teoría de la relatividad general, es imposible, hablando en términos generales, tener un sistema de cuerpos fijos unos respecto de otros.

Este resultado cambia esencialmente el propio concepto de sistema de referencia en la teoría de la relatividad general con relación a su significado en la teoría especial. En ésta entendíamos por sistema de referencia un conjunto de cuerpos en reposo relativo los unos respecto a los otros, en posiciones relativas invariables. Tales sistemas de cuerpos no existen en un campo gravitatorio variable, y para determinar exactamente la posición de una partícula en el espacio debemos, en rigor, contar

† Estrictamente hablando, el número de partículas debiera ser mayor que cuatro. Dado que podemos construir un tetraedro con seis segmentos, podemos siempre, mediante una definición adecuada del sistema de referencia, hacer de un sistema de cuatro partículas un tetraedro invariante. Con mayor motivo, siempre se puede considerar invariable la configuración de tres o de dos partículas.

con un número infinito de cuerpos que llenen todo el espacio formando como una especie de « medio ». Este sistema de cuerpos, con relojes que marchan de manera arbitraria fijos en cada uno de ellos, constituye un sistema de referencia en teoría de la relatividad general.

En conexión con la arbitrariedad en la elección de un sistema de referencia, las leyes de la naturaleza deben escribirse en la teoría de la relatividad general de manera formalmente adecuada a todo sistema cuadridimensional de coordenadas (o, como se suele decir, en forma « covariante »). Esto, claro está, no implica una equivalencia física de todos estos sistemas de referencia (análoga a la equivalencia física de todos los sistemas de referencia inerciales en la teoría especial). Por el contrario, las características específicas de los fenómenos físicos, incluidas las propiedades del movimiento de los cuerpos, pasan a ser diferentes en los diferentes sistemas de referencia.

§ 83. Coordenadas curvilíneas

Conforme hemos visto, al estudiar los campos gravitatorios nos encontramos frente a la necesidad de considerar los fenómenos en sistemas de referencia arbitrarios. En relación con esto es necesario desarrollar la geometría cuadridimensional en coordenadas curvilíneas arbitrarias. Éste es precisamente el objeto de los párrafos 83, 85 y 86.

Consideremos el paso de un sistema de coordenadas x^0, x^1, x^2, x^3, a otro x'^0, x'^1, x'^2, x'^3:

$$x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3),$$

donde las f^i son ciertas funciones. Cuando transformamos las coordenadas, sus diferenciales se transforman de acuerdo con la relación

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k. \tag{83.1}$$

Todo conjunto de cuatro cantidades A^i ($i = 0, 1, 2, 3$), que en una transformación de coordenadas se transforman como las diferenciales de las coordenadas, se llama *cuadrivector contravariante*. Así, en una transformación de coordenadas,

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k. \tag{83.2}$$

Sea ϕ un escalar. En una transformación de coordenadas, las cuatro cantidades $\partial\phi/dx^i$ se transforman de acuerdo con la fórmula

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^i} = \frac{\partial\phi}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}, \tag{83.3}$$

que es diferente de la fórmula (83.2). Todo conjunto de cuatro cantidades A_i que, en una transformación de coordenadas, se transforman como las derivadas de un escalar, se llama *cuadrivector covariante*. Así, en una transformación de coordenadas,

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k. \tag{83.4}$$

Dado que en coordenadas curvilíneas aparecen dos tipos de vectores, habrá tres tipos de tensores de segundo orden. Llamaremos *tensor contravariante* de segundo orden, A^{ik}, un conjunto de 16 cantidades que se transforman como los productos de las componentes de dos vectores contravariantes, es decir, de acuerdo con la ley

$$A^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m} A'^{lm}. \tag{83.5}$$

Análogamente, un tensor covariante se transforma, por definición, de acuerdo con la fórmula,

$$A_{ik} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'_{lm}, \tag{83.6}$$

y un tensor mixto se transforma de la siguiente manera:

$$A^i{}_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'^l{}_m. \tag{83.7}$$

Las definiciones que acabamos de dar constituyen una generalización natural de las definiciones de cuadrivector y cuadritensor en coordenadas galileanas (§ 6), según las cuales las diferenciales dx^i forman también un cuadrivector contravariante, y las derivadas $\partial\varphi/\partial x^i$, uno covariante †.

Las reglas de formación de cuadritensores mediante producto o contracción de productos de otros cuadritensores siguen siendo las mismas en coordenadas curvilíneas que en coordenadas galileanas. Por ejemplo, es fácil comprobar que, en virtud de las leyes de transformación (83.2) y (83.4), el producto escalar de dos cuadrivectores A^iB_i es, en efecto, un invariante:

$$A^iB_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^m}{\partial x^i} A'^l B'_m = \frac{\partial x'^m}{\partial x'^l} A'^l B'_m = A'^l B'_l.$$

† Pero así como en un sistema galileano las propias coordenadas x^i (y no sólo sus diferenciales) constituyen también un cuadrivector, en coordenadas curvilíneas esto, claro está, no ocurre.

La definición del cuadritensor unidad δ_k^i no cambia al pasar a coordenadas curvilíneas: sus componentes son de nuevo $\delta_k^i = 0$ para $i \neq k$ e iguales a 1 para $i = k$. Si A^k es un cuadrivector, al multiplicarlo por δ_k^i obtendremos:

$$A^k \delta_k^i = A^i,$$

es decir, de nuevo un cuadrivector; esto precisamente prueba que δ_k^i es un tensor.

El cuadrado del elemento de longitud en coordenadas curvilíneas es una forma cuadrática en las diferenciales dx^i:

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k, \tag{83.8}$$

donde g_{ik} son funciones de las coordenadas; las componentes g_{ik} son simétricas respecto de los índices i y k:

$$g_{ik} = g_{ki}. \tag{83.9}$$

Dado que el producto contracto de g_{ik} por el tensor contravariante $dx^i\, dx^k$ es un escalar, las g_{ik} constituyen un tensor covariante, llamado *tensor métrico.*

De dos tensores A_{ik} y B^{ik} se dice que son inversos uno del otro si

$$A_{ik} B^{kl} = \delta_i^l.$$

En particular, se llama tensor métrico contravariante g^{ik} al tensor inverso del tensor g_{ik}, es decir,

$$g_{ik} g^{kl} = \delta_i^l. \tag{83.10}$$

Una misma magnitud vectorial física se puede representar tanto mediante componentes contravariantes como covariantes. Es evidente que las únicas magnitudes que pueden determinar la relación entre unas y otras son las componentes del tensor métrico. Dicha relación viene dada por las fórmulas:

$$A^i = g^{ik} A_k \qquad A_i = g_{ik} A^k. \tag{83.11}$$

En un sistema de coordenadas galileano, las componentes del tensor métrico son:

$$g_{ik}^{(0)} = g^{(0)ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{83.12}$$

En este caso, las fórmulas (83.11) dan las relaciones ya conocidas $A^0 = A_0$, $A^{1,2,3} = -A_{1,2,3}$ †.

Lo dicho vale también para los tensores. La transición entre las diferentes formas de un mismo tensor físico se realiza mediante el tensor métrico de acuerdo con las fórmulas:

$$A^i_{\ k} = g^{il}A_{lk},\quad A^{ik} = g^{il}g^{km}A_{lm}$$

y análogas.

En el § 6 se definió (en un sistema de coordenadas galileano) el pseudotensor unidad completamente antisimétrico e^{iklm}. Transformémoslo refiriéndolo a un sistema de coordenadas curvilíneas arbitrario y designemos por E^{iklm} sus componentes. La notación e^{iklm} la conservamos, sin embargo, para las cantidades definidas, como antes, a partir del valor $e^{0123} = 1$ (ó $e_{0123} = -1$).

Supongamos que las x'^i son coordenadas galileanas y las x^i coordenadas curvilíneas arbitrarias. Según las reglas generales de transformación de los tensores, tenemos:

$$E^{iklm} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p}\frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\frac{\partial x^l}{\partial x'^s}\frac{\partial x^m}{\partial x'^t}e^{prst},$$

o bien

$$E^{iklm} = Je^{iklm},$$

donde J es el determinante formado por las derivadas $\partial x^i/\partial x'p$, es decir, el jacobiano de la transformación que lleva de las coordenadas galileanas a las curvilíneas:

$$J = \frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}.$$

Este jacobiano se puede expresar en función del determinante del tensor métrico g_{ik} (en el sistema x^i). Para ello escribamos la fórmula de transformación de este tensor:

$$g^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}g^{(0)\,lm}$$

y comparemos los determinantes formados con las cantidades que aparecen en uno y otro miembro de esta igualdad. El determinante del tensor inverso es $|g^{ik}| = 1/g$.

† En todos aquellos puntos en que para establecer analogías utilizamos un sistema de coordenadas galileano, hay que tener en cuenta que un tal sistema se puede elegir tan sólo en un espacio plano de cuatro dimensiones. En cambio, en el caso de un cuadriespacio curvo, sería necesario hablar de un sistema de coordenadas galileano en un elemento de cuadrivolumen infinitamente pequeño dado, sistema cuya elección es siempre posible. Ninguna de las conclusiones cambia como consecuencia de esta observación.

Por otra parte, el determinante $|\, g^{(0)lm} \,| = -1$. Por consiguiente, tenemos $1/g = -J^2$, de donde $J = 1/\sqrt{-g}$.

Así, pues, en coordenadas curvilíneas el tensor unidad antisimétrico de 4.° orden debe definirse por

$$E^{iklm} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\, e^{iklm}. \tag{83.13}$$

Para bajar los índices de este tensor se utilizan las fórmulas

$$e^{prst} g_{ip} g_{kr} g_{ls} g_{mt} = -g e_{iklm},$$

de modo que sus componentes covariantes son

$$E_{iklm} = \sqrt{-g}\, e_{iklm}. \tag{83.14}$$

En un sistema galileano de coordenadas x'^i la integral de un escalar según $d\Omega' = dx'^0\, dx'^1\, dx'^2\, dx'^3$ es también un escalar, es decir, el elemento $d\Omega'$ se comporta en la integración como un escalar (§ 6). Al pasar a coordenadas curvilíneas x^i el elemento de integración $d\Omega'$ pasa a ser

$$d\Omega' \to \frac{1}{J}\, d\Omega = \sqrt{-g}\, d\Omega.$$

Por lo tanto, en coordenadas curvilíneas el producto $\sqrt{-g}\, d\Omega$ se comporta como invariante en la integración de un cuadrivolumen †.

Todo lo dicho al final del § 6 respecto de los elementos de integración en hipersuperficies, superficies y líneas conserva su validez también en coordenadas curvilíneas, con la única diferencia, sin embargo, que cambia hasta cierto punto la definición de tensores duales. El elemento de « área » de una hipersuperficie construido mediante tres corrimientos infinitesimales es el tensor antisimétrico contravariante dS^{ikl}; su vector dual se obtiene multiplicando por el tensor $\sqrt{-g}\, e_{iklm}$ es decir, es igual a

$$\sqrt{-g}\, dS_i = -\frac{1}{6}\, e_{iklm}\, dS^{iklm} \sqrt{-g}. \tag{83.15}$$

---

† Si φ es un escalar, la magnitud $\sqrt{-g}\varphi$, que al ser integrada según $d\Omega$ da un invariante, se llama a veces *densidad escalar*. Análogamente, se habla de *densidades vectoriales y tensoriales* $\sqrt{-g}\, A^i$, $\sqrt{-g}\, A^{ik}$, etc. Estas magnitudes conducen a un vector o a un tensor al multiplicarlas por el elemento de cuadrivolumen $d\Omega$ (sin embargo, la integral $\int A^i \sqrt{-g}\, d\Omega$ extendida a un dominio finito no puede ser, en general, un vector, ya que las leyes de transformación del vector A^i en diferentes puntos del dominio son asimismo diferentes.

Análogamente, si df^{ik} es un elemento de superficie (bidimensional) construido a partir de dos corrimientos infinitesimales, su tensor dual se define por la igualdad †

$$\sqrt{-g}\, df^*_{ik} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, e_{iklm}\, df^{lm}. \tag{83.16}$$

Al igual que antes, adoptaremos aquí las notaciones dS_i y df^*_{ik} respectivamente, para $(1/6)e_{klmi}\, dS^{klm}$ y $(1/2)e_{iklm}\, df^{lm}$ (y no para sus productos por $\sqrt{-g}$); las reglas (6.14-19) para la transformación de las diferentes integrales entre sí siguen siendo entonces las mismas, dado que el razonamiento que condujo a ellas es de carácter formal, no ligado con las propiedades tensoriales de las correspondientes magnitudes. Entre ellas necesitaremos, en particular, la regla de transformación de una integral extendida a una hipersuperficie en una integral en un cuadrivolumen (teorema de Gauss), transformación que se efectúa mediante la substitución

$$dS_i \to d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{83.17}$$

§ 84. Distancias e intervalos de tiempo

Hemos dicho ya que en la teoría de la relatividad general nada limita la elección del sistema de coordenadas; como terna de coordenadas espaciales x^1, x^2, x^3 pueden valer tres cantidades cualesquiera que definan la posición de los cuerpos en el espacio, y la coordenada temporal x^0 se puede definir por un reloj que marcha de manera arbitraria. Se plantea la cuestión de cómo podemos determinar las distancias y los intervalos de tiempo reales en función de los valores de las cantidades x^0, x^1, x^2, x^3.

Determinemos primero la relación del tiempo real, que a partir de aquí designaremos por τ, con la coordenada x^0. Para ello consideremos dos sucesos infinitamente próximos que ocurren en un mismo punto del espacio. El intervalo ds entre estos dos sucesos es entonces, conforme sabemos, precisamente $cd\tau$, donde $d\tau$ es el intervalo de tiempo (real) entre los dos sucesos. Haciendo $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ en la expresión general $ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k$ encontramos, por consiguiente,

$$ds^2 = c^2\, d\tau^2 = g_{00} dx_0^2,$$

† Se supone que los elementos dS^{klm} y df^{ik} se han construido a partir de los corrimientos infinitesimales dx^i, dx'^i, dx''^i de la misma manera como fueron definidos en el § 6, cualquiera que sea el sentido geométrico de las coordenadas x^i. Sigue entonces en vigor también el sentido formal primitivo de los elementos dS_i, df^*_{ik}. En particular, como antes es $dS_0 = dx^1\, dx^2\, dx^3 \equiv dV$. En lo que sigue conservamos la notación ya adoptada dV para el producto de las diferenciales de tres coordenadas espaciales; sin embargo, es necesario recordar que el elemento de volumen espacial geométrico viene dado en coordenadas curvilíneas, no por el propio dV, sino por el producto $\sqrt{\gamma}\, dV$, donde γ es el determinante del tensor métrico espacial (que se definirá en el párrafo siguiente).

de donde,

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}dx^0 \tag{84.1}$$

o también, para el tiempo transcurrido entre dos sucesos cualesquiera que ocurren en el mismo punto del espacio,

$$\tau = \frac{1}{c}\int \sqrt{g_{00}}\,dx^0. \tag{84.2}$$

Estas relaciones determinan el intervalo de tiempo real (o, como se le llama también, de *tiempo propio* del punto dado del espacio) que corresponde a un cambio de la coordenada x^0. Obsérvese también que la cantidad g_{00}, conforme se sigue de estas fórmulas, es positiva:

$$g_{00} > 0. \tag{84.3}$$

Hay que subrayar la diferencia entre el significado de la condición (84.3) y el de la condición de que tres valores principales del tensor g_{ik} deben ser negativos y uno positivo (§ 82). Un tensor g_{ik} que no satisface la segunda de estas condiciones no puede corresponder a ningun campo gravitatorio real, es decir, no puede ser la métrica de un espacio-tiempo real. En cambio, que no se cumpla la condición (84.3) significaría solamente que el sistema de referencia correspondiente no se puede construir con cuerpos reales; si la condición impuesta a los valores principales se cumple, mediante una transformación adecuada de las coordenadas puede conseguirse que g_{00} pase a ser positivo (un ejemplo de uno de estos sistemas lo ofrece un sistema de coordenadas en rotación, véase § 90).

Determinemos ahora el elemento *dl* de *distancia espacial* En la teoría de la relatividad especial podemos definir *dl* como un intervalo entre dos sucesos infinitamente próximos que ocurren en el mismo instante. En la teoría general esta definición es, en general, imposible, es decir, es imposible determinar *dl* haciendo simplemente $dx^0 = 0$ en *ds*. Ello está ligado con el hecho de que en un campo gravitatorio el tiempo propio en puntos diferentes del espacio depende de la coordenada x^0 de maneras diferentes.

Para determinar *dl* procederemos de la siguiente manera.

Supongamos que desde un punto *B* (de coordenadas $x^\alpha + dx^\alpha$) se dirige una señal luminosa a un punto *A* infinitamente próximo al *B* (de coordenadas x^α), y luego, inmediatamente, en sentido inverso a lo largo de la misma trayectoria. Evidentemente, el tiempo que ello requiere (registrado en uno y el mismo punto *B*), una vez multiplicado por *c*, es igual a dos veces la distancia entre estos dos puntos.

Escribamos el intervalo separando las coordenadas espaciales y la coordenada temporal:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta + 2g_{0\alpha}\,dx^0\,dx^\alpha + g_{00}\,dx_0^2, \tag{84.4}$$

donde se sobrentiende que sumamos respecto de los índices griegos repetidos de 1 a 3. El intervalo entre los sucesos correspondientes a la salida y llegada de la señal desde un punto al otro es igual a cero. Resolviendo la ecuación $ds^2 = 0$ respecto de dx^0, encontramos las dos raíces

$$dx^{0\,(1)} = \frac{1}{g_{00}}\left\{-g_{0\alpha}\,dx^\alpha - \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta}-g_{\alpha\beta}g_{00})\,dx^\alpha\,dx^\beta}\right\},$$
$$dx^{0\,(2)} = \frac{1}{g_{00}}\left\{-g_{0\alpha}\,dx^\alpha + \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta}-g_{\alpha\beta}g_{00})\,dx^\alpha\,dx^\beta}\right\}, \tag{84.5}$$

que corresponden a la propagación de la señal en los dos sentidos determinados por A y B. Si x^0 es el instante de llegada de la señal a A, los instantes en que ha partido de B y en que vuelve a B son, respectivamente, $x^0+dx^{0(1)}$ y $x^0+dx^{0(2)}$. En la figura esquemática 18, las líneas de trazo continuo son las líneas de universo correspondientes a las coordenadas dadas x^α y $x^\alpha+dx^\alpha$, mientras que las líneas de trazos son las líneas de universo de las señales †. Es claro que el intervalo total de « tiempo » entre la salida de la señal y su llegada al punto de origen es igual a

$$dx^{0(2)} - dx^{0(1)} = \frac{2}{g_{00}}\sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta}-g_{\alpha\beta}g_{00})\,dx^\alpha\,dx^\beta}.$$

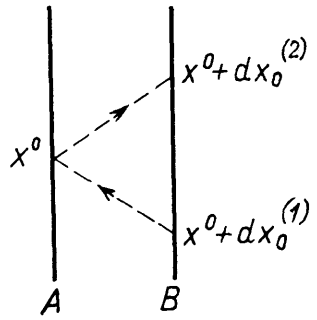

FIG. 18.

El correspondiente intervalo de tiempo propio se obtiene, de acuerdo con (84.1), multiplicando por $\sqrt{g_{00}}/c$, y la distancia dl entre los dos puntos, multiplicando, además, por $c/2$. El resultado que se obtiene es:

$$dl^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right)dx^\alpha\,dx^\beta.$$

† En la fig. 18 se supone que $dx^{0(2)}>0$, $dx^{0(1)}<0$, lo que, sin embargo, no es necesario: $dx^{0(1)}$ y $dx^{0(2)}$ pueden tener el mismo signo. El que, en este caso, el valor $x^{(0)}$ (A) en el instante de llegada de la señal a A pueda ser menor que el valor $x^{(0)}$ (B) en el instante de su salida de B no entraña contradicción, dado que las marchas de los relojes en puntos diferentes del espacio no se suponen sincronizadas.

Ésta es precisamente la expresión buscada, la que define la distancia en función de los elementos de coordenadas espaciales. La escribiremos también en la forma

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \tag{84.6}$$

donde,

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}} \tag{84.7}$$

es el tensor métrico tridimensional que determina la métrica, es decir, las propiedades geométricas del espacio. Las relaciones (84.7) establecen la conexión entre la métrica del espacio real y la métrica del espacio-tiempo de cuatro dimensiones †.

Sin embargo, debemos recordar que las g_{ik} dependen generalmente de x^0, de modo que también la métrica espacial (84.6) cambia con el tiempo. Por esta razón, carece de sentido integrar dl; la integral dependería de la línea de universo elegida como camino de integración entre los dos puntos dados del espacio. Por consiguiente, y en términos generales, en la teoría de la relatividad general el concepto de distancia determinada entre cuerpos pierde su significado, conservando su validez solamente para distancias infinitesimales. El único caso en que la distancia se puede definir también en dominios finitos es el de los sistemas de referencia tales que las g_{ik} no dependen del tiempo, con lo que la integral $\int dl$ a lo largo de una curva espacial adquiere un significado unívoco.

Es útil observar que el tensor $\gamma_{\alpha\beta}$ es el inverso del tensor tridimensional contravariante $g^{\alpha\beta}$. En efecto, de $g^{ik} g_{kl} = \delta^i_l$ se deduce, en particular,

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} + g^{\alpha 0} g_{0\gamma} = \delta^\alpha_\gamma,\ g^{\alpha\beta} g_{\beta 0} + g^{\alpha 0} g_{00} = 0, \tag{84.8}$$

$$g^{0\beta} g_{\beta 0} + g^{00} g_{00} = 1$$

† La forma cuadrática (84.6) debe ser, claro está, definida positiva. Para que así ocurra, sus coeficientes deben satisfacer, como es sabido, las condiciones

$$\gamma_{11} > 0, \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{33} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

Expresando γ_{ik} en función de g_{ik}, es fácil encontrar que estas condiciones toman la forma

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{vmatrix} < 0, \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad g < 0.$$

Estas condiciones, junto con la condición (84.3), deben quedar satisfechas por las componentes del tensor métrico en cualquier sistema de referencia que se puede construir con ayuda de cuerpos reales.

Determinando $g^{\alpha 0}$ a partir de la segunda ecuación y substituyendo en la primera, obtenemos:

$$-g^{\alpha\beta}\gamma_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}.$$

como se trataba de demostrar. Este resultado puede formularse de otra manera: las cantidades $-g^{\alpha\beta}$ son las componentes contravariantes del tensor métrico tridimensional que corresponde a la métrica (84.6):

$$\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}. \tag{84.9}$$

Señalemos también que los determinantes g y γ, formados, respectivamente, con las cantidades g_{ik} y $\gamma_{\alpha\beta}$, están ligados entre sí por

$$-g = g_{00}\gamma. \tag{84.10}$$

En toda una serie de aplicaciones que seguirán nos convendrá introducir el vector tridimensional **g**, cuyas componentes covariantes se definen por

$$g_{\alpha} = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}. \tag{84.11}$$

Considerando **g** como vector en el espacio con la métrica (84.6), hemos de definir sus componentes contravariantes mediante la igualdad $g^{\alpha} = \gamma^{\alpha\beta}g_{\beta}$. A partir de (84.9) y de la segunda de las igualdades (84.8), es fácil ver que

$$g^{\alpha} = \gamma^{\alpha\beta}g_{\beta} = -g^{0\alpha}. \tag{84.12}$$

Haremos notar también la fórmula

$$g^{00} = \frac{1}{g_{00}} - g_{\alpha}g^{\alpha}, \tag{84.13}$$

que se sigue de la tercera de las igualdades (84.8).

Pasemos ahora a la definición del concepto de simultaneidad en la teoría de la relatividad general. Dicho de otro modo, examinemos la cuestión de si es o no posible sincronizar relojes colocados en puntos diferentes del espacio, es decir, establecer una correspondencia entre las indicaciones de estos relojes.

Dicha sincronización debe realizarse, evidentemente, mediante un intercambio de señales luminosas entre los dos puntos. Consideremos de nuevo el proceso de propagación de señales entre dos puntos infinitamente próximos A y B, conforme se indica en la fig. 18. Hay que considerar como simultánea con el instante x^0 en el punto A la indicación del reloj en el punto B que es la media aritmética entre los instantes de salida y llegada de la señal a este último punto, es decir, el instante

$$x^0+\Delta x^0 = x^0+\tfrac{1}{2}\,(dx^{0(2)}+dx^{0(1)}).$$

Substituyendo (84.5), se encuentra así que la diferencia entre los valores del « tiempo » x^0 para dos sucesos simultáneos que ocurren en puntos infinitamente próximos viene dada por

$$\Delta x^0 = \frac{g_{0\alpha}\,dx^\alpha}{-g_{00}} \equiv g_\alpha\,dx^\alpha. \tag{84.14}$$

Esta relación nos permite sincronizar relojes en cualquier región infinitesimal del espacio. Llevando a cabo una sincronización similar a partir del punto A, podemos sincronizar relojes, es decir, podemos definir la simultaneidad de sucesos a lo largo de una línea abierta cualquiera †.

Sin embargo, la sincronización de relojes a lo largo de un contorno cerrado resulta ser imposible en general. En efecto, partiendo de un punto del contorno y volviendo a él a lo largo del mismo, obtendríamos para $\triangle x^0$ un valor diferente de cero. Es así imposible, a fortiori, sincronizar unívocamente relojes en todo el espacio. Constituyen excepción sólo aquellos sistemas de referencia para los que todas las componentes $g_{0\alpha}$ son iguales a cero ††.

Hay que subrayar que la imposibilidad de sincronizar todos los relojes es una propiedad del propio sistema de referencia, arbitrario, no del espacio-tiempo en sí. En cualquier campo gravitatorio, es siempre posible (y de infinitas maneras) elegir el sistema de referencia de modo que las tres cantidades $g_{0\alpha}$ sean idénticamente nulas, haciendo así posible una completa sincronización de los relojes. (cf. § 99).

Ya en la teoría de la relatividad especial, el tiempo propio transcurre de manera diferente para relojes que se mueven el uno respecto del otro. En la teoría de la relatividad general, en cambio, el tiempo propio transcurre de manera diferente incluso en puntos diferentes del espacio ligados al mismo sistema de referencia. Esto significa que el intervalo de tiempo propio entre dos sucesos que ocurren en un mismo punto del espacio, y el intervalo de tiempo entre dos sucesos simultáneos con aquéllos que ocurren en otro punto del espacio, son, en general, diferentes el uno del otro.

---

† Multiplicando (84.14) por g_{00} y pasando ambos términos al mismo miembro, podemos presentar la condición de sincronización en la forma $dx_0 = g_{0i}\,dx^i = 0$: la « diferencial covariante » dx_0 entre dos sucesos simultáneos infinitamente próximos debe ser igual a cero.

†† Deberíamos también asignar a esta clase los casos en que las $g_{0\alpha}$ se pueden reducir a cero mediante una simple transformación de la coordenada temporal que no altere la elección del sistema de objetos utilizados para definir las coordenadas espaciales.

§ 85. Diferenciación covariante

En coordenadas galileanas † las diferenciales dA_i de un vector A_i forman un vector y las derivadas $\partial A_i/\partial x^k$ de las componentes de un vector respecto de las coordenadas forman un tensor. No así en coordenadas curvilíneas; dA_i no es un vector y $\partial A_i/\partial x^k$ no es un tensor. Ello se debe al hecho de que dA_i es la diferencia de dos vectores localizados en puntos diferentes del espacio (infinitamente próximos); pero en puntos diferentes del espacio los vectores se transforman de manera diferente, ya que los coeficientes en las fórmulas de transformación (83.2), (83.4) son funciones de las coordenadas.

Es también fácil comprobar directamente lo que acabamos de decir. Para ello deduzcamos las fórmulas de transformación de las diferenciales dA_i en coordenadas curvilíneas. Un vector covariante se transforma de acuerdo con la fórmula

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k;$$

Por consiguiente

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \, d\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \, \partial x^l} dx^l.$$

Así, pues, dA_i en modo alguno se transforma como un vector (lo mismo vale, naturalmente, para la diferencial de un vector contravariante). Sólo si se anulan las derivadas segundas, $\partial^2 x'^k/\partial x^i \, \partial x^l = 0$, es decir, si las x'^k son funciones lineales de las x^k, las fórmulas de transformación tienen la forma

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k,$$

esto es, dA_i se transforma como un vector.

Veamos ahora cómo definir un tensor que en coordenadas curvilíneas represente el mismo papel que $\partial A_i/\partial x^k$ en coordenadas galileanas . Con otras palabras, transformemos $\partial A_i/\partial x^k$ de coordenadas galileanas a curvilíneas.

En coordenadas curvilíneas, para obtener la diferencial de un vector que se comporte como un vector, es necesario que los dos vectores que hay que restar estén aplicados al mismo punto del espacio. Dicho de otra manera, de una forma u otra hemos de « transladar » uno de los dos vectores (aplicados a puntos infi-

† En general, siempre que las cantidades g_{ik} son constantes.

nitamente próximos entre sí) al punto en el que está localizado el otro, hecho lo cual determinaremos la diferencia de los dos vectores, referidos ahora al mismo punto del espacio. La propia operación de translación se debe definir de manera que, en coordenadas galileanas, dicha diferencia coincida con la diferencial ordinaria dA_i. Dado que dA_i no es sino la diferencia de las componentes de dos vectores separados infinitamente poco, esto significa que, cuando utilizamos coordenadas galileanas, las componentes del vector no deben cambiar como resultado de la operación translación. Pero una tal translación es precisamente la translación de un vector paralelamente a sí mismo. En una *translación paralela* (o, simplemente, *translación*, en sentido estricto) de un vector, sus componentes en coordenadas galileanas no cambian; si, en cambio, utilizamos coordenadas curvilíneas, las componentes del vector cambiarán, en general, en dicha translación. Por consiguiente, en coordenadas curvilíneas, la diferencia de las componentes de dos vectores, después de transladar uno de ellos al punto a que está aplicado el otro, no coincidirá con su diferencia antes de la translación (es decir, con la diferencial dA_i).

Para comparar dos vectores separados infinitamente poco debemos, pues, transladar uno de ellos paralelamente a sí mismo hasta el punto en que está localizado el segundo. Consideremos un vector contravariante cualquiera; si su valor en el punto de coordenadas x^i es A^i, en un punto vecino x^i+dx^i es igual a A^i+dA^i. Sometamos el vector A^i a una translación hasta el punto x^i+dx^i; el cambio que experimenta en este proceso lo representaremos por δA^i. La diferencia DA^i entre los dos vectores, que están ahora aplicados al mismo punto, es entonces,

$$DA^i = dA^i - \delta A^i. \tag{85.1}$$

El cambio δA^i de las componentes de un vector en una translación infinitesimal depende de los valores de las propias componentes, dependencia ésta que debe ser lineal, evidentemente. Esta condición se sigue directamente del hecho que la suma de dos vectores debe transformarse de acuerdo con la misma ley que cada uno de los sumandos. Así, δA^i es de la forma

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kl} A^k \, dx^l, \tag{85.2}$$

donde los coeficientes Γ^i_{kl} son ciertas funciones de las coordenadas cuya forma depende, claro está, del sistema de coordenadas; para un sistema de coordenadas galileanas todos los $\Gamma^i_{kl} = 0$.

Esto prueba ya claramente que las cantidades Γ^i_{kl} no forman un tensor, puesto que un tensor que es igual a cero en un sistema de coordenadas es también igual a cero en cualquier otro sistema. En un espacio no euclídeo es imposible, naturalmente, hacer que todos los Γ^i_{kl} se anulen en todo el espacio. Pero podemos, en cam-

bio, elegir un sistema de coordenadas para el cual los Γ^i_{kl} se anulan en una región infinitesimal dada (véase el final de este párrafo †). Las cantidades Γ^i_{kl} se llaman *símbolos de Christoffel.* Además de las cantidades Γ^i_{kl}, más adelante utilizaremos también las cantidades $\Gamma_{i,kl}$ †† definidas como sigue:

$$\Gamma_{i,kl} = g_{im}\Gamma^m_{kl}. \tag{85.3}$$

Es claro que, recíprocamente,

$$\Gamma^i_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,kl} \tag{85.4}$$

Es también fácil ligar el cambio de las componentes de un vector covariante en una translación con los símbolos de Christoffel. Para ello observemos que, en una translación, un escalar no varía. En particular, el producto escalar de dos vectores no cambia en tales corrimientos.

Sean A_i y B^i dos vectores cualesquiera, pero uno covariante, el otro contravariante. Entonces de $\delta(A_iB^i) = 0$ se deduce:

$$B^i\,\delta A_i = -A_i\,\delta B^i = \Gamma^i_{kl}B^kA_i\,dx^l$$

o, cambiando los índices,

$$B^i\,\delta A_i = \Gamma^k_{il}A_kB^i\,dx^l. \tag{85.5}$$

De aquí se sigue, dada la arbitrariedad de B^i,

$$\delta A_i = \Gamma^k_{il}A_k\,dx^l,$$

fórmula que determina la variación de un vector covariante en una translación.

Substituyendo (85.2) y $dA^i = \dfrac{\partial A^i}{\partial x^l}\,dx^l$ en (85.1), tenemos:

$$DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl}A^k\right)dx^l. \tag{85.6}$$

Análogamente, para un vector covariante se encuentra

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il}A_k\right)dx^l. \tag{85.7}$$

Las expresiones entre paréntesis en (85.6) y (85.7) son tensores, puesto que cuando se multiplican por el vector dx^l dan lugar de nuevo a un vector. Es claro que éstos son los tensores que, en coordenadas curvilíneas, representan el mismo papel que el tensor $\partial A^i/\partial x^k$ en coordenadas cartesianas. Estos tensores se llaman *derivadas*

† Este es precisamente el sistema de coordenadas en que hay que pensar siempre que, para abreviar, hablamos simplemente de un sistema « galileano »; todas las demostraciones son entonces aplicables no sólo al espacio euclídeo, sino también al no-euclídeo.

†† En vez de la notación Γ^i_{kl} y $\Gamma_{i,kl}$ se utilizan a veces los símbolos $\left\{\begin{matrix} kl \\ i \end{matrix}\right\}$ y $\left[\begin{matrix} kl \\ i \end{matrix}\right]$, respectivamente.

covariantes de los vectores A^i y A_i, respectivamente. Los representaremos por $A^i{}_{;k}$ y $A_{i;k}$. Así,

$$DA^i = A^i{}_{;l}\,dx^l; \qquad DA_i = A_{i;l}\,dx^l, \tag{85.8}$$

y las propias derivadas covariantes se escriben:

$$A^i{}_{;l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k, \tag{85.9}$$

$$A_{i;l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} A_k. \tag{85.10}$$

En coordenadas cartesianas, $\Gamma^i_{kl} = 0$ y la derivación covariante se reduce a la derivación ordinaria.

Es también fácil calcular la derivada covariante de un tensor. Para ello debemos determinar el cambio del tensor en una translación paralela infinitesimal. Por ejemplo, consideremos un tensor contravariante cualquiera que se pueda expresar como producto de dos vectores contravariantes A^iB^k. En una translación,

$$\delta(A^iB^k) = A^i\delta B^k + B^k\delta A^i = -A^i\Gamma^k_{lm}B^l dx^m - B^k\Gamma^i_{lm}A^l dx^m.$$

En virtud del carácter lineal de esta transformación, también para un tensor arbitrario A^{ik} debemos tener:

$$\delta A^{ik} = -(A^{im}\Gamma^k_{ml} + A^{mk}\Gamma^i_{ml})\,dx^l. \tag{85.11}$$

Substituyendo esta expresión en

$$DA^{ik} = dA^{ik} - \delta A^{ik} \equiv A^{ik}{}_{;l}\,dx^l,$$

obtenemos la derivada covariante del tensor A^{ik} en la forma

$$A^{ik}{}_{;l} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml}A^{mk} + \Gamma^k_{ml}A^{im}. \tag{85.12}$$

De manera completamente análoga se obtienen las derivadas covariantes de un tensor mixto A^i_k y de un tensor covariante A_{ik} en la forma

$$A^i_{k\,;l} = \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l} - \Gamma^m_{kl}A^i_m + \Gamma^i_{ml}A^m_k, \tag{85.13}$$

$$A_{ik;l} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il}A_{mk} - \Gamma^m_{kl}A_{im}. \tag{85.14}$$

Análogamente se puede determinar la derivada covariante de un tensor de orden arbitrario. Se encuentra entonces la siguiente regla de diferenciación covariante: Para obtener la derivada covariante del tensor $A:::$ respecto de x^l se suma a la derivada ordinaria $\partial A:::/\partial x^l$, por cada índice covariante $i(A:_i:)$, un término $-\Gamma^k_{li}A:_k:$, y por cada índice contravariante $i(A:^i:)$, un término $+\Gamma^i_{kl}\,A:^k:$.

Es fácil comprobar que la derivada covariante de un producto se encuentra mediante la misma regla que la derivada ordinaria de un producto. Al hacerlo

hay que interpretar la derivada covariante de un escalar ϕ como una derivada ordinaria, esto es, como igual al vector covariante $\phi_k = \partial\phi/\partial x^k$, de acuerdo con el hecho de que para un escalar $\delta\phi = 0$, lo que implica $D\phi = d\phi$. Por ejemplo, la derivada covariante del producto $A_i B_k$ es igual a

$$(A_i B_k)_{;l} = A_{i;l} B_k + A_i B_{k;l}.$$

Si en una derivada covariante subimos el índice que simboliza la derivación, obtenemos la llamada *derivada contravariante*. Así,

$$A_i^{;k} = g^{kl} A_{i;l}, \qquad A^{i;k} = g^{kl} A^i{}_{;l}.$$

Es fácil demostrar que los símbolos de Christoffel son simétricos respecto de sus subíndices. En efecto, dado que la derivada covariante de un vector $A_{i;k}$ es un tensor, la diferencia $A_{i;k} - A_{k;i}$ es también un tensor. Supongamos que el vector A_i es el gradiente de un escalar, esto es, $A_i = \partial\phi/\partial x^i$. Dado que $\partial A_i/\partial x^k = \partial^2\phi/\partial x^k \partial x^i = \partial A_k/\partial x^i$, teniendo en cuenta (85.10) resulta

$$A_{k;i} - A_{i;k} = (\Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ki}) \frac{\partial\phi}{\partial x^l}.$$

En un sistema de coordenadas galileanas la derivada covariante se reduce a la derivada ordinaria y, por consiguiente, el primer miembro de nuestra igualdad se anula. Pero ya que $A_{k;i} - A_{i;k}$ es un tensor, al ser cero en un sistema de coordenadas debe ser también cero en cualquier otro sistema. Encontramos así que

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}. \tag{85.15}$$

Claro está, también se tiene

$$\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk}. \tag{85.16}$$

En general, hay en total 40 cantidades Γ^i_{kl} diferentes; en efecto, para cada uno de los cuatro valores del índice i hay 10 pares diferentes de valores de los índices k y l (contando como el mismo par el obtenido permutando k y l).

Para terminar este párrafo, daremos las fórmulas que permiten transformar los símbolos de Christoffel de un sistema de coordenadas a otro. Estas fórmulas se pueden obtener comparando las leyes de transformación de los dos miembros de la ecuación que define las derivadas covariantes e imponiendo la condición de que estas leyes sean las mismas en ambos miembros. Un cálculo sencillo conduce a la fórmula

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma'^m_{np} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}. \tag{85.17}$$

De ésta resulta inmediatamente que las cantidades Γ^i_{kl} se comportan como un tensor tan sólo en las transformaciones lineales [para las que el segundo término de (85.17) desaparece].

La fórmula (85.17) nos permite demostrar fácilmente la afirmación anterior de que es siempre posible elegir un sistema de coordenadas en el que todos los

Γ^i_{kl} se anulen en un punto asignado previamente (de dicho sistema se dice que es *localmente inercial* o *localmente geodésico* [véase § 87]). †

En efecto, elijamos el punto dado como origen de coordenadas, y sean $(\Gamma^i_{kl})_0$ los valores iniciales de los Γ^i_{kl} (en el sistema de coordenadas x^i). En el entorno de este punto, efectuemos la transformación

$$x'^i = x^i + \tfrac{1}{2}(\Gamma^i_{kl})_0 x^k x^l. \tag{85.18}$$

Entonces

$$\left(\frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\right)_0 = (\Gamma^i_{kl})_0$$

y, de acuerdo con (85.17), todos los Γ'^m_{np} se anulan.

Obsérvese que para la transformación (85.18) es:

$$\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\right)_0 = \delta^i_k,$$

de manera que no cambia el valor de ningún tensor (entre ellos el tensor g_{ik}) en el punto dado y así podemos reducir a cero los símbolos de Christoffel al mismo tiempo que reducimos las g_{ik} a la forma galileana.

§ 86. Relación entre los símbolos de Christoffel y el tensor métrico

Demostremos ahora que la derivada covariante del tensor métrico g_{ik} es igual a cero. Para ello observemos que la relación

$$DA_i = g_{ik} DA^k$$

es válida para el vector DA_i como para cualquier vector. Por otra parte, $A_i = g_{ik} A^k$, de manera que

$$DA_i = D(g_{ik}A^k) = g_{ik}DA^k + A^k Dg_{ik}.$$

Comparando con $DA_i = g_{ik} DA^k$ y recordando que el vector A^k es arbitrario

$$Dg_{ik} = 0.$$

Por lo tanto, también la derivada covariante

$$g_{ik;l} = 0. \tag{86.1}$$

Hay que considerar así g_{ik} como constante en la derivación covariante.

La identidad $g_{ik;l} = 0$ se puede utilizar para expresar los símbolos de Christoffel en función del tensor métrico g_{ik}. Para ello, y de acuerdo con la definición general (85.14) de la derivada covariante de un tensor, escribamos:

$$g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{kl} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{k,il} - \Gamma_{i,kl} = 0.$$

† Se puede también demostrar que, eligiendo convenientemente el sistema de coordenadas, es posible reducir todos los Γ^i_{kl} a cero no sólo en un punto, sino todo a lo largo de una línea dada.

Las derivadas de las g_{ik} se expresan así en función de los símbolos de Christoffel †. Escribamos estas derivadas permutando los índices i, k, l:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,kl},$$

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} = \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{l,ik},$$

$$-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = -\Gamma_{l,ki} - \Gamma_{k,li}.$$

Sumando estas ecuaciones y dividiendo por dos se encuentra (recordando que $\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk}$)

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right). \tag{86.2}$$

De aquí se sigue para los símbolos $\Gamma^i_{kl} = g^{im}\,\Gamma_{m,kl}$:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}\,g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right). \tag{86.3}$$

Estas fórmulas dan las expresiones buscadas de los símbolos de Christoffel en función del tensor métrico.

Deduciremos ahora una expresión del símbolo de Christoffel contracto Γ^i_{ki} que nos será útil más adelante. Para ello calculemos la diferencial dg del determinante g formado con las componentes del tensor g_{ik}; dg se puede obtener diferenciando cada una de las componentes del tensor g_{ik} y multiplicando el resultado por el correspondiente coeficiente en el desarrollo del determinante, es decir, por el correspondiente adjunto. Por otra parte, las componentes del tensor g^{ik}, inverso del g_{ik}, son iguales, como es sabido, a los adjuntos de los g_{ik} divididos por el valor del determinante. Por lo tanto, los adjuntos de los g_{ik} en el determinante g son iguales a gg^{ik}. Así, pues,

$$dg = gg^{ik}\,dg_{ik} = -gg_{ik}\,dg^{ik} \tag{86.4}$$

(dado que $g_{ik}\,g^{ik} = \delta^i_i = 4$, $g^{ik}\,dg_{ik} = -g_{ik}\,dg^{ik}$).

De (86.3) se deduce:

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2}\,g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m}\right).$$

† Elegir un sistema de coordenadas localmente geodésico significa, por consiguiente, que en el punto dado todas las derivadas primeras de las componentes del tensor métrico se anulan.

Permutando los índices m e i en los términos tercero y primero dentro del paréntesis, se ve que estos dos términos se reducen entre sí, de forma que

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k},$$

o bien, de acuerdo con (86.4),

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k}. \tag{86.5}$$

Conviene hallar también la expresión correspondiente de la magnitud $g^{kl}\Gamma^i_{kl}$. Se tiene:

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{kl} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) = g^{kl} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right).$$

Mediante (86.4) este resultado se puede llevar a la forma

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, g^{ik})}{\partial x^k}. \tag{86.6}$$

En varios cálculos es útil tener en cuenta que las derivadas del tensor contravariante g^{ik} están ligadas con las derivadas de g_{ik} por las relaciones

$$g_{il} \frac{\partial g^{lk}}{\partial x^m} = -g^{lk} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^m} \tag{86.7}$$

(que se obtienen derivando la igualdad $g_{il}\, g^{lk} = \delta^k_i$). Finalmente, señalaremos que las derivadas de g^{ik} se pueden expresar asimismo en función de las magnitudes Γ^i_{kl}. En efecto, de la identidad $g^{ik}{}_{;l} = 0$ se sigue desde luego que

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -\Gamma^i_{ml} g^{mk} - \Gamma^k_{ml} g^{im}. \tag{86.8}$$

Mediante las fórmulas que acabamos de obtener es posible llevar a una forma conveniente la expresión $A^i{}_{;i}$, esto es, la divergencia generalizada de un vector en coordenadas curvilíneas. Utilizando (86.5), se tiene:

$$A^i{}_{;i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{li} A^l = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^l \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^l}$$

o, finalmente,

$$A^i{}_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, A^i)}{\partial x^i}. \tag{86.9}$$

Una expresión análoga se deduce para la divergencia de un tensor antisimétrico A^{ik}. De (85.12) se sigue

$$A^{ik}{}_{;k} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} A^{mk} + \Gamma^k_{mk} A^{im}.$$

Pero, dado que $A^{mk} = -A^{km}$,

$$\Gamma^i_{mk} A^{mk} = -\Gamma^i_{km} A^{km} = 0.$$

Substituyendo la expresión (86.5) de Γ^k_{mk}, obtenemos, por consiguiente,

$$A^{ik}{}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, A^{ik})}{\partial x^k}. \tag{86.10}$$

Supongamos ahora que A_{ik} es un tensor simétrico; determinemos la expresión $A^k_{i;k}$ correspondiente a sus componentes mixtas. Se tiene:

$$A^k_{i;k} = \frac{\partial A^k_i}{\partial x^k} + \Gamma^k_{lk} A^l_i - \Gamma^l_{ik} A^k_l = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(A^k_i \sqrt{-g})}{\partial x^k} - \Gamma^l_{kl} A^k_l.$$

El último término es igual a

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right) A^{kl}.$$

Debido a la simetría del tensor A^{kl}, dos de los términos entre paréntesis se reducen entre sí y queda

$$A^k_{i;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, A^k_i)}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} A^{kl}. \tag{86.11}$$

En coordenadas galileanas, $\partial A_i/\partial x^k - \partial A_k/\partial x^i$ es un tensor antisimétrico. En coordenadas curvilíneas este tensor es $A_{i;k} - A_{k;i}$. Sin embargo, mediante la expresión de $A_{i;k}$ y dado que $\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}$, se tiene:

$$A_{i;k} - A_{k;i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}. \tag{86.12}$$

Finalmente, pasemos a coordenadas curvilíneas la suma $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x_i\, \partial x^i}$ de las derivadas segundas de un escalar ϕ. Es claro que en coordenadas curvilíneas esta suma se transforma en $\phi^{;i}_{;i}$. Pero $\phi_{;i} = \partial\phi/\partial x^i$, dado que la derivación covariante de un es-

calar se reduce a la derivación ordinaria. Subiendo el índice i, tenemos:

$$\phi^{;i} = g^{ik}\frac{\partial \phi}{\partial x^k},$$

y utilizando la fórmula (86.9), se encuentra:

$$\phi^{;i}_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik}\frac{\partial \phi}{\partial x^k}\right). \tag{86.13}$$

Conviene observar que el teorema de Gauss (83.17) para la transformación de la integral de un vector extendida a una hipersuperficie en una integral extendida a un volumen de cuatro dimensiones se puede escribir, en virtud de (86.9), en la forma

$$\oint A^i \sqrt{-g}\, dS_i = \int A^i{}_{;i}\sqrt{-g}\, d\Omega. \tag{86.14}$$

§ 87. Movimiento de una partícula en un campo gravitatorio

El movimiento de una partícula material libre se determina, en teoría de la relatividad especial, a partir del principio de mínima acción:

$$\delta S = -mc\,\delta \int ds = 0, \tag{87.1}$$

según el cual la partícula se mueve de manera que su línea de universo sea una extremal entre un par dado de puntos de universo, es decir, en nuestro caso una recta (en el espacio ordinario de tres dimensiones, a esta recta corresponde un movimiento rectilíneo y uniforme).

El movimiento de una partícula en un campo gravitatorio ha de determinarse de acuerdo con el principio de mínima acción en la misma forma (87.1), dado que el campo gravitatotio no es sino un cambio en la métrica del espacio-tiempo, que se manifiesta, a su vez, sólo en un cambio en la expresión de ds en función de las dx^i. Así, en un campo gravitatorio la partícula se mueve de manera tal que su punto de universo recorre una extremal o, como suele decirse, una *geodésica* del espacio de cuatro dimensiones x^0, x^1, x^2, x^3; sin embargo, dado que en presencia del campo gravitatorio el espacio-tiempo no es galileano, esta línea no será una « recta », y el movimiento real de la partícula en el espacio no es ni rectilíneo ni uniforme.

En vez de partir de nuevo directamente del principio de mínima acción (véase el problema al final de este párrafo), es más sencillo encontrar las ecuaciones del movimiento de una partícula en un campo gravitatorio mediante una generalización apropiada de la ecuación diferencial correspondiente al movimiento libre de

una partícula en la teoría de la relatividad especial, es decir, en un sistema de coordenadas cuadridimensional galileano. Estas ecuaciones son $du^i/ds = 0$ o $du^i = 0$, donde $u^i = dx^i/ds$ es la cuadrivelocidad. La generalización de esta ecuación al caso de coordenadas curvilíneas es, claro está,

$$Du^i = 0. \tag{87.2}$$

De la expresión (85.6) de la diferencial covariante de un vector se sigue:

$$du^i + \Gamma^i_{kl} u^k \, dx^l = 0.$$

Dividiendo esta ecuación por ds, encontramos:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0. \tag{87.3}$$

Ésta es precisamente la ecuación del movimiento buscada. Vemos, pues, que el movimiento de una partícula en un campo gravitatorio está determinado por las magnitudes Γ^i_{kl}. La derivada $d^2x^i/ds^2 = du^i/ds$ es la cuadriaceleración de la partícula. Por consiguiente, podemos llamar a la magnitud $-m\Gamma^i_{kl}u^k u^l$ la « cuadrifuerza » que actúa sobre la partícula en el campo gravitatorio. El tensor g_{ik} representa aquí el papel de los « potenciales » del campo gravitatorio — sus derivadas determinan la « intensidad » del campo Γ^i_{kl}.

En el § 85 se demostró que mediante una elección adecuada del sistema de coordenadas siempre se pueden reducir a cero todos los Γ^i_{kl} en un punto arbitrario del espacio-tiempo. Vemos ahora que la elección de un tal sistema de referencia localmente inercial significa la anulación del campo gravitatorio en el elemento infinitesimal dado de espacio-tiempo, y la posibilidad de dicha elección expresa el principio de equivalencia en la teoría relativista de la gravitación.

Como antes, definiremos el cuadrimpulso de una partícula en un campo gravitatorio mediante la igualdad,

$$p^i = mcu^i. \tag{87.4}$$

y su cuadrado es:

$$p_i p^i = m^2c^2. \tag{87.5}$$

† Haremos notar también la forma de la ecuación del movimiento expresada mediante las componentes covariantes de la cuadriaceleración. A partir de la condición $Du_i = 0$, se encuentra:

$$\frac{du_i}{ds} - \Gamma_{k,il} u^k u^l = 0.$$

Substituyendo aquí las expresiones de $\Gamma_{k,il}$ dadas por (86.2), dos de los términos se reducen entre sí y queda

$$\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} u^k u^l = 0.$$

Substituyendo aquí $-\partial S/\partial x^i$ en vez de p_i, encontramos la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula en un campo gravitatorio:

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k}-m^2c^2=0. \tag{87.6}$$

La ecuación de una geodésica en la forma (87.3) no es aplicable a la propagación de una señal luminosa, ya que a lo largo de la línea de universo correspondiente a la propagación de un rayo de luz el intervalo ds es igual a cero, de manera que en la ecuación (87.3) todos los términos se hacen infinito. Para obtener las ecuaciones del movimiento en una forma adecuada a este caso, nos apoyaremos en el hecho de que la dirección de propagación de un rayo luminoso en la óptica geométrica se determina mediante el vector de onda, que es tangente al rayo. Podemos, por consiguiente, escribir el vector de onda cuadridimensional en la forma $k^i = dx^i/d\lambda$, donde λ es un cierto parámetro que varía a lo largo del rayo. En la teoría de la relatividad especial, el vector de onda no varía a lo largo del mismo en la propagación de la luz en el vacío, esto es, $dk^i = 0$ (véase § 53). En un campo gravitatorio esta ecuación se transforma, evidentemente, en $Dk^i = 0$, o bien

$$\frac{dk^l}{d\lambda}+\Gamma^l_{ik}k^ik^k=0 \tag{87.7}$$

(a partir de estas mismas ecuaciones se determina el parámetro λ).

El cuadrado del módulo del cuadrivector de onda es igual a cero (véase § 48), esto es,

$$k_ik^i=0. \tag{87.8}$$

Substituyendo $\partial\psi/\partial x^i$ en lugar de k_i (ψ es el iconal), encontramos la ecuación del iconal en un campo gravitatorio:

$$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k}=0. \tag{87.9}$$

En el caso límite de pequeñas velocidades, las ecuaciones relativistas del movimiento de una partícula en un campo gravitatorio deben reducirse a las correspondientes ecuaciones no relativistas. Hay que tener en cuenta aquí que la hipótesis de que la velocidad es pequeña implica a su vez la condición de que el propio campo gravitatorio sea débil; si no lo fuera, una partícula colocada en él llegaría a adquirir una gran velocidad.

Veamos cómo está ligado, en este caso límite, el tensor métrico g_{ik} con el potencial no relativista ϕ del campo gravitatorio.

En mecánica no relativista, el movimiento de una partícula en un campo gra-

vitatorio está determinado por la función de Lagrange (81.1). Escribámosla ahora en la forma

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\phi, \tag{87.10}$$

sumándole la constante $-mc^2$. † Esto último es necesario a fin de que la función de Lagrange no relativista en ausencia del campo, $L = -mc^2 + mv^2/2$, coincida exactamente con aquélla a que se reduce la correspondiente función relativista $L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}$ en el límite para $v/c \to 0$.

La acción no relativista S para una partícula en un campo gravitatorio, por consiguiente, tiene la forma

$$S = \int L\,dt = -mc\int\left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c}\right)dt.$$

Comparando este resultado con la expresión $S = -mc\int ds$, vemos que en el caso límite considerado es

$$ds = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c}\right)dt.$$

Elevando al cuadrado y prescindiendo de los términos que tienden a cero para $c \to \infty$, se encuentra

$$ds^2 = (c^2 + 2\phi)\,dt^2 - d\mathbf{r}^2. \tag{87.11}$$

donde se tuvo en cuenta que $\mathbf{v}\,dt = d\mathbf{r}$.

Así, pues, en el caso límite la componente g_{00} del tensor métrico es igual a

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}. \tag{87.12}$$

En cuanto a las otras componentes, de (87.11) se seguiría que $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, $g_{0\alpha} = 0$. Sin embargo, en realidad, las correspondientes correcciones son, en general, del mismo orden de magnitud que las correcciones relativas a g_{00} (para más detalles, véase § 106). La imposibilidad de determinar estas correcciones siguiendo el método antes indicado está ligada con el hecho de que las correcciones a las $g_{\alpha\beta}$, que son del mismo orden de magnitud que la corrección relativa a g_{00}, conducirían a términos en la función de Lagrange de un orden de pequeñez más elevado (debido a que en la expresión de ds^2 las componentes $g_{\alpha\beta}$ no están multiplicadas por c^2, mientras que sí lo está g_{00}).

† El potencial ϕ está determinado, naturalmente, tan sólo salvo una constante aditiva arbitraria. En todo lo que sigue suponemos que esta constante se ha elegido de manera natural, de forma que el potencial tiende a cero lejos de los cuerpos que crean el campo.

PROBLEMA

Deducir la ecuación del movimiento (87.3) a partir del principio de mínima acción (87.1).

Solución. Tenemos,

$$\delta ds^2 = 2ds\,\delta ds = \delta(g_{ik}\,dx^i\,dx^k) = dx^i\,dx^k\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\,\delta x^l + 2g_{ik}\,dx^i\,d\delta x^k.$$

Por lo tanto,

$$\delta S = -mc\int\left\{\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\,\delta x^l + g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{d\delta x^k}{ds}\right\}ds =$$

$$= -mc\int\left\{\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\,\delta x^l - \frac{d}{ds}\left(g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\right)\delta x^k\right\}ds$$

(al integrar por partes, se tuvo en cuenta que $\delta x^k = 0$ en los límites). En el segundo término de la integral substituyamos el índice k por el índice l. Se encuentra entonces, igualando a cero el coeficiente de la variación arbitraria δx^l:

$$\frac{1}{2}u^i u^k\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{d}{ds}(g_{il}u^i) = \frac{1}{2}u^i u^k\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{il}\frac{du^i}{ds} - u^i u^k\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} = 0.$$

Observando que el tercer término se puede escribir en la forma

$$-\frac{1}{2}u^i u^k\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right),$$

e introduciendo los símbolos de Christoffel $\Gamma_{l,ik}$ de acuerdo con (86.2), obtenemos:

$$g_{il}\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{l,ik}\,u^i u^k = 0.$$

La ecuación (87.3) se obtiene a partir de ésta subiendo el índice l.

§ 88. Campo gravitatorio constante

De un campo gravitatorio se dice que es *constante* si es posible elegir un sistema de referencia en el que todas las componentes del tensor métrico son independientes de la coordenada temporal x^0; ésta se llama entonces *tiempo universal.*

La elección de un tiempo universal no es del todo unívoca. Así, si sumamos a x^0 una función arbitraria de las coordenadas espaciales, las g_{ik} seguirán sin contener x^0; esta transformación corresponde a la arbitrariedad en la elección del

origen del tiempo en cada punto del espacio †. Además, naturalmente, el tiempo universal se puede multiplicar por una constante arbitraria, es decir, la unidad para medirlo es arbitraria.

En rigor, únicamente el campo producido por un sólo cuerpo puede ser constante. En un sistema de varios cuerpos, su atracción gravitatoria mutua dará lugar a un movimiento, como resultado del cual el campo producido por ellos no puede ser constante.

Si el cuerpo que produce el campo está fijo (en el sistema de referencia en el que las g_{ik} no dependen de x^0), ambos sentidos del tiempo son equivalentes. Eligiendo de manera adecuada el origen del tiempo en todos los puntos del espacio, el intervalo ds no debe cambiar cuando cambiamos el signo de x^0 y, por consiguiente, todas las componentes $g_{0\alpha}$ del tensor métrico deben ser idénticamente nulas. Los campos gravitatorios constantes de este tipo se califican de *estáticos*.

Sin embargo, para que el campo producido por un cuerpo sea constante, no es necesario que el cuerpo se encuentre en reposo. Así, el campo de un cuerpo que presenta simetría axil y gira uniformemente en torno de su eje será también constante. Con todo, en este caso los dos sentidos del tiempo no son ya en modo alguno equivalentes — si se cambia el signo del tiempo, cambia también el signo de la velocidad angular. Por lo tanto, en estos campos gravitatorios constantes (que llamaremos campos *estacionarios*) las componentes $g_{0\alpha}$ del tensor métrico son, en general, diferentes de cero.

El significado del tiempo universal en un campo gravitatorio constante es el siguiente: un intervalo de tiempo universal entre dos sucesos que ocurren en un cierto punto del espacio coincide con el intervalo de tiempo universal entre otros dos sucesos cualesquiera que ocurren en cualquier otro punto del espacio, con tal que estos dos sucesos sean respectivamente simultáneos (en el sentido indicado en el § 84) con los sucesos del primer par. Pero al mismo intervalo de tiempo universal x^0 corresponde, en diferentes puntos del espacio, diferentes intervalos de tiempo propio τ. La relación entre tiempo universal y tiempo propio, dada por la fórmula

---

† Es fácil ver que en una transformación de este tipo la métrica espacial, como era de prever, no cambia.
En efecto, en la substitución,

$$x^0 \to x^0 + f(x^1, x^2, x^3)$$

con una función arbitraria $f(x^1\ x^2, x^3)$ las componentes g_{ik} se substituyen por

$$g_{\alpha\beta} \to g_{\alpha\beta} + g_{00} f_\alpha f_\beta + g_{0\alpha} f_\beta + g_{0\beta} f, \alpha,$$
$$g_{0\alpha} \to g_{0\alpha} + g_{00} f, \alpha,\ g_{00} \to g_{00},$$

donde $f_\alpha, \equiv \partial f/\partial x^\alpha$. Con ello, evidentemente, no cambia el tensor tridimensional (84.7).

(84.1), se puede escribir ahora en la forma

$$\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\, x^0, \tag{88.1}$$

aplicable a intervalos finitos cualesquiera.

En un campo gravitatorio débil podemos utilizar la expresión aproximada (87.12); (88.1) da entonces

$$\tau = \frac{x^0}{c}\sqrt{1+\frac{2\phi}{c^2}},$$

y con la misma precisión,

$$\tau = \frac{x^0}{c}\left(1+\frac{\phi}{c^2}\right). \tag{88.2}$$

El tiempo propio transcurre así tanto más lentamente cuanto menor es el potencial gravitatorio en un punto dado del espacio, es decir, cuanto mayor es su valor absoluto (más adelante, en el § 96, se demostrará que el potencial ϕ es negativo). Si de dos relojes idénticos, uno ha permanecido en un campo gravitatorio durante un cierto tiempo, el reloj que ha estado en el campo aparecerá luego retrasado.

Como ya se indicó antes, en un campo gravitatorio estático las componentes $g_{0\alpha}$ del tensor métrico son iguales a cero. Según los resultados del § 84, esto significa que en un campo de tales características la sincronización de los relojes es posible en todo el espacio. Obsérvese también que el elemento de distancia espacial dl en un campo estático es simplemente

$$dl^2 = -g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta. \tag{88.3}$$

En un campo estacionario las $g_{0\alpha}$ son diferentes de cero y la sincronización de los relojes en todo el espacio es imposible. Dado que las g_{ik} no dependen de x^0, la fórmula (84.14) para la diferencia entre los valores del tiempo universal correspondientes a dos sucesos simultáneos que ocurren en puntos diferentes del espacio se puede escribir en la forma

$$\Delta x^0 = -\int \frac{g_{0\alpha}\, dx^\alpha}{g_{00}} \tag{88.4}$$

aplicable a dos puntos cualesquiera de la línea a lo largo de la cual se lleva a cabo la sincronización de los relojes. En la sincronización de relojes a lo largo de un contorno cerrado, la diferencia entre los valores del tiempo universal que se encontraría al volver al punto de partida es igual a la integral

$$\Delta x^0 = -\oint \frac{g_{0\alpha}\, dx^\alpha}{g_{00}} \tag{88.5}$$

calculada a lo largo de dicho contorno †.

Consideremos la propagación de un rayo luminoso en un campo gravitatorio constante. Hemos visto en el § 53 que la frecuencia de la luz es igual a la derivada del iconal ψ respecto del tiempo (cambiada de signo). La frecuencia, expresada en función del tiempo universal x^0/c, es, por consiguiente, $\omega_0 = -c\dfrac{\partial\psi}{\partial x^0}$. Dado que la ecuación del iconal (87.9) en un campo constante no contiene x^0 explícitamente, la frecuencia ω_0 se conserva constante durante la propagación del rayo de luz. En cambio, la frecuencia medida en función del tiempo propio es igual a $\omega = -\dfrac{\partial\psi}{\partial\tau}$ y es diferente en puntos del espacio diferentes.

En virtud de la relación

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\frac{\partial x^0}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\frac{c}{\sqrt{g_{00}}},$$

tenemos,

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}}. \tag{88.6}$$

De aquí se sigue que, en un campo gravitatorio débil, se tendrá aproximadamente,

$$\omega = \omega_0\left(1-\frac{\phi}{c^2}\right). \tag{88.7}$$

Vemos así que la frecuencia de la luz aumenta cuando aumenta el valor absoluto del potencial del campo gravitatorio, es decir, a medida que nos acercamos a los cuerpos que producen el campo; recíprocamente, a medida que la luz se aleja de dichos cuerpos, la frecuencia disminuye. Si un rayo luminoso, emitido en un punto donde el potencial gravitatorio es ϕ_1 tiene (en este punto) la frecuencia ω, al llegar a un punto en el que el potencial es ϕ_2 tendrá una frecuencia (medida en unidades del tiempo propio en este punto) igual a

$$\frac{\omega}{1-\dfrac{\phi_1}{c^2}}\left(1-\frac{\phi_2}{c^2}\right) = \omega\left(1+\frac{\phi_1-\phi_2}{c^2}\right).$$

El espectro de rayas emitido por átomos que se encuentran, por ejemplo, en el Sol, presenta allí exactamente el mismo aspecto que presenta en la Tierra el espectro

---

† La integral (88.5) es idénticamente nula si la suma $g_{0\alpha}dx^\alpha/g_{00}$ es la diferencial exacta de una cierta función de las coordenadas espaciales. Sin embargo, este caso significaría simplemente que, en realidad, se trata de un campo estático y que todas las $g_{0\alpha}$ se pueden reducir a cero mediante una transformación de la forma $x^0 \to x^0 + \varphi(x^\alpha)$.

emitido por los mismos átomos situados en ella. Si, en cambio, observamos en la Tierra el espectro emitido por átomos situados en el Sol, entonces, conforme se sigue de lo dicho antes, sus rayas aparecerán corridas respecto de las rayas del mismo espectro emitido en la Tierra. Cada raya de frecuencia ω aparecerá, en efecto, corrida en un valor $\Delta\omega$ dado por la fórmula

$$\Delta\omega = \frac{\phi_1 - \phi_2}{c^2}\omega, \tag{88.8}$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 son los potenciales del campo gravitatorio en los puntos de emisión y de observación del espectro, respectivamente. Si observamos en la Tierra un espectro emitido en el Sol o en las estrellas, se tendrá $|\phi_1| > |\phi_2|$, y de (88.8) se sigue que $\Delta\omega < 0$, es decir, el corrimiento se produce en el sentido de las frecuencias más bajas. Este fenómeno se llama *corrimiento hacia el rojo.*

El origen de este fenómeno se puede explicar directamente partiendo de lo antes dicho acerca del tiempo universal. Dado que el campo es constante, el intervalo de tiempo universal durante el cual una cierta vibración de la onda luminosa se propaga de un punto dado del espacio a otro es independiente de x^0. Por lo tanto, es claro que el número de vibraciones que se producen por unidad de tiempo universal será el mismo en todos los puntos a lo largo del rayo. Pero a un mismo intervalo de tiempo universal corresponde un intervalo de tiempo propio tanto más largo cuanto más lejos nos encontramos de los cuerpos que producen el campo. Por consiguiente, la frecuencia, es decir, el número de vibraciones por unidad de tiempo propio, disminuirá a medida que la luz se aparta de dichas masas.

Durante el movimiento de una partícula en un campo constante, su energía se conserva, energía que está definida por $\left(-c\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)$, es decir, por la derivada de la acción respecto del tiempo universal; ello se sigue, por ejemplo, del hecho que x^0 no aparece explícitamente en la ecuación de Hamilton-Jacobi. La energía definida de esta manera es la componente temporal del cuadrivector impulso covariante $p_k = mcu_k = mcg_{ki}u^i$. En un campo estático $ds^2 = g_{00}\,dx_0^2 - dl^2$, y para la energía, que designamos aquí por $\mathcal{E}_0$, tenemos

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 g_{00}\frac{dx^0}{ds} = mc^2 g_{00}\frac{dx^0}{\sqrt{g_{00}(dx^0)^2 - dl^2}}.$$

Introduzcamos la velocidad de la partícula

$$v = \frac{dl}{d\tau} = \frac{c\,dl}{\sqrt{g_{00}}\,dx^0}$$

medida en función del tiempo propio, esto es, medida por un observador situado

en el punto dado. Obtenemos entonces para la energía

$$\mathcal{E}_0 = \frac{mc^2\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{88.9}$$

Ésta es la cantidad que se conserva durante el movimiento de la partícula.

Es fácil demostrar que la expresión (88.9) conserva también su validez para un campo estacionario, con tal que la velocidad v se mida en función del tiempo propio indicado por relojes sincronizados a lo largo de la trayectoria de la partícula. Si la partícula parte de un punto A en un instante del tiempo universal x^0 y llega al punto infinitamente próximo B en el instante x^0+dx^0, para determinar la velocidad debemos tomar ahora, no el intervalo de tiempo $(x^0+dx^0)-x^0 = dx^0$, sino la diferencia entre x^0+dx^0 y el instante $x^0-\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}dx^\alpha$ que es simultáneo, en el punto B, con el instante x_0 en el punto A:

$$(x^0+dx^0)-\left(x^0-\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}dx^\alpha\right) = dx^0+\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}dx^\alpha.$$

Multiplicando por $\sqrt{g_{00}}/c$, se obtiene el correspondiente intervalo de tiempo propio, de manera que la velocidad es:

$$v^\alpha = \frac{c\,dx^\alpha}{\sqrt{h}\,(dx^0-g_\alpha\,dx^\alpha)}. \tag{88.10}$$

donde hemos introducido las notaciones

$$h = g_{00}, \quad g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}. \tag{88.11}$$

para el vector tridimensional $\mathbf{g}$ (del que se habló ya en el § 84) y para el escalar tridimensional g_{00}. Las componentes covariantes de la velocidad $\mathbf{v}$ como vector tridimensional en el espacio con la métrica $\gamma_{\alpha\beta}$ y, en correspondencia con ello, el cuadrado del módulo de este vector deben entenderse en el sentido de †

$$v_\alpha = \gamma_{\alpha\beta}v^\beta, \quad v^2 = v_\alpha v^\beta. \tag{88.12}$$

†) En lo que sigue introduciremos repetidamente en los razonamientos, junto con los cuadrivectores y cuadritensores, también vectores y tensores tridimensionales definidos en el espacio dotado de la métrica $\gamma_{\alpha\beta}$; tales son, en particular, los vectores $\mathbf{g}$ y $\mathbf{v}$ ya definidos Mientras que en el primer caso las operaciones tensoriales (entre ellas el subir y el bajar índices) se efectúan mediante el tensor métrico g_{ik}, en el segundo caso se llevan a cabo con el tensor $\gamma_{\alpha\beta}$. Para evitar posibles confusiones que podrían resultar en relación con esto, designaremos las magnitudes tridimensionales por símbolos que no se utilizan para representar las magnitudes en cuatro dimensiones.

Obsérvese que, con esta definición, el intervalo ds se expresa en función de la velocidad de la manera ordinaria:

$$ds^2 = g_{00}\,(dx^0)^2 - 2g_{0\alpha}\,dx^0\,dx^\alpha - g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta = \\ = h\,(dx^0 - g_\alpha\,dx^\alpha)^2 - dl^2 = h(dx^0 - g_\alpha\,dx^\alpha)^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), \qquad (88.13)$$

Las componentes de la cuadrivelocidad $u^i = \dfrac{dx^i}{ds}$ son

$$u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \qquad u^0 = \frac{1}{\sqrt{h}\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} + \frac{g_\alpha v^\alpha}{c\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \qquad (88.14)$$

En cuanto a la energía, ésta es igual a

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 g_{0i} u^i = mc^2 h\,(u^0 - g_\alpha u^\alpha),$$

y después de substituir (88.14) toma la forma (88.9).

En el caso límite de un campo gravitatorio débil y pequeñas velocidades, substituyendo $g_{00} = 1 + \dfrac{2\varphi}{c^2}$ en (89.9) se obtiene, aproximadamente,

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + m\varphi, \qquad (88.15)$$

donde $m\varphi$ es la energía potencial de la partícula en el campo gravitatorio, lo que está de acuerdo con la función de Lagrange (87.10)

Problemas

1. Determinar la fuerza que actúa sobre una partícula en un campo gravitatorio constante.

Solución. Para las componentes Γ^i_{kl} que necesitamos se encuentran las siguientes expresiones:

$$\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2}h^{;\alpha},$$

$$\Gamma^\alpha_{0\beta} = \frac{h}{2}(g^\alpha_{;\beta} - g^{;\alpha}_\beta) - \frac{1}{2}g_\beta h^{;\alpha}, \qquad (1)$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \lambda^\alpha_{\beta\gamma} + \frac{h}{2}\,[g_\beta\,(g^{;\alpha}_\gamma - g^\alpha_{;\gamma} + g_\gamma(g^{;\alpha}_\beta - g^a_{;\beta})] + \frac{1}{2}g_\beta g_\gamma h^{;\alpha}.$$

En ellas todas las operaciones tensoriales (derivación covariante, subida y bajada de índices) se efectúan en el espacio de tres dimensiones con métrica $\gamma_{\alpha\beta}$, y afectan al vector tridimensional g^α y al escalar tridimensional h (88.11); $\lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ es el símbolo de Christoffel de tres dimensiones construido a partir de las componentes del tensor $\gamma_{\alpha\beta}$ exactamente de la misma manera como se construye Γ^i_{kl} a partir de las componentes g_{ik}; en los cálculos, se han utilizado las fórmulas (84.9-12)

Substituyendo (1) en la ecuación del movimiento

$$\frac{du^\alpha}{ds} = -\Gamma^\alpha_{00}(u^0)^2 - 2\Gamma^\alpha_{0\beta}u^0u^\beta - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}u^\beta u^\gamma$$

y utilizando la expresión (88.14) de las componentes de la cuadrivelocidad, después de algunas sencillas transformaciones se obtiene:

$$\frac{d}{ds}\frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{h^{;\alpha}}{2h\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{\sqrt{h}\,(g^\alpha{}_{;\beta} - g_\beta{}^{;\alpha})v^\beta}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{\lambda^\alpha_{\beta\gamma}v^\beta v^\gamma}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}. \tag{2}$$

La fuerza **f** que actúa sobre la partícula es la derivada de su impulso **p** respecto del tiempo propio (sincronizado), definida por la derivada covariante tridimensional:

$$f^\alpha = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{Dp^\alpha}{ds} = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{d}{ds}\frac{mv^\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \lambda^\alpha_{\beta\gamma}\frac{mv^\beta v^\gamma}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

De (2) se sigue, según esto (por conveniencia hemos bajado el índice α):

$$f_\alpha = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{-\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\ln\sqrt{h} + \sqrt{h}\left(\frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta}\right)\frac{v^\beta}{c}\right\},$$

o, en notación tridimensional ordinaria, †

$$\mathbf{f} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{-\nabla\ln\sqrt{h} + \sqrt{h}\,\frac{\mathbf{v}}{c}\times(\nabla\times\mathbf{g})\right\}. \tag{3}$$

† En coordenadas curvilíneas tridimensionales, el tensor antisimétrico unidad se define por

$$\eta_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{\gamma}\,e_{\alpha\beta\gamma}, \quad \eta^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,e^{\alpha\beta\gamma},$$

donde $e_{123} = e^{123} = 1$ y en la permutación de dos índices cambian de signo [cf. (83.13-14)]. Según esto, el vector $\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$, definido como vector dual del tensor antisimétrico $c_{\beta\gamma} = a_\beta b_\gamma - a_\gamma b_\beta$, tiene por componentes:

$$c_\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\,e_{\alpha\beta\gamma}c^{\beta\gamma} = \sqrt{\gamma}\,e_{\alpha\beta\gamma}a^\beta c^\gamma, \quad c^\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}e^{\alpha\beta\gamma}c_{\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}e^{\alpha\beta\gamma}a_\beta c_\gamma.$$

Recíprocamente,

$$c_{\alpha\beta} = \sqrt{\gamma}\,e_{\alpha\beta\gamma}c^\gamma, \quad c^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}e^{\alpha\beta\gamma}c_\gamma.$$

Obsérvese que si el cuerpo está en reposo, la fuerza que actúa sobre él [el primer término de (3)] deriva de un potencial. Para pequeñas velocidades, el segundo término en (3) tiene la forma $mc\sqrt{h}\,\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{g})$, análogo a la fuerza de Coriolis que aparecería (en ausencia del campo) en un sistema de coordenadas que girara con velocidad angular

$$\boldsymbol{\Omega}=\frac{c}{2}\sqrt{h}\,\nabla\times\mathbf{g}.$$

2. Deducir el principio de Fermat para la propagación de un rayo en un campo gravitatorio constante.

Solución. El principio de Fermat (§ 53) afirma que:

$$\delta\int k_\alpha\,dx^\alpha=0,$$

donde la integral se toma a lo largo del rayo y el integrando se debe expresar en función de la frecuencia ω_0, que es constante a lo largo de aquél, y de las diferenciales de las coordenadas. Observando que $k_0=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x^0}=\dfrac{\omega_0}{c}$, escribiremos:

$$\frac{\omega_0}{c}=k_0=g_{0i}k^i=g_{00}k^0+g_{0\alpha}k^\alpha=h(k^0-g_\alpha k^\alpha).$$

Substituyendo este resultado en la relación $k_ik^i=g_{ik}k^ik^k=0$, puesta en la forma

$$-h(k^0-g_\alpha k^\alpha)^2+\gamma_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta=0,$$

obtenemos:

$$-\frac{1}{h}\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2+\gamma_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta=0.$$

Teniendo también en cuenta que el vector k^α debe ser paralelo al vector dx^α, se sigue de aquí:

$$k^\alpha=\frac{\omega_0}{c\sqrt{h}}\frac{dx^\alpha}{dl},$$

En particular, hay que entender rot **a**, en este mismo sentido, como vector dual del tensor $a_{\beta\,;\,\alpha}-a_{\alpha\,;\,\beta}=\partial a_\beta/\partial x^\alpha-\partial a_\alpha/\partial x^\beta$ de modo que sus componentes contravariantes son

$$(\text{rot }\mathbf{a})^\alpha=\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}e^{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta}-\frac{\partial a_\beta}{\partial x^\gamma}\right).$$

Recordaremos también, en relación con esto, que la divergencia tridimensional de un vector es

$$\text{div }\mathbf{a}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{\gamma}\,a^\alpha)$$

(cf. (86.9)).

Para evitar confusiones al comparar con las fórmulas que frecuentemente se aplican para las operaciones vectoriales tridimensionales en coordenadas curvilíneas ortogonales (véase, por ejemplo, «Electrodinámica de los medios continuos», apéndice), indicaremos que en estas fórmulas se entiende por componentes de un vector las cantidades $\sqrt{g_{11}}\,A^1$ $(=\sqrt{A_1A^1})$, $\sqrt{g_{22}}\,A^2$, $\sqrt{g_{33}}\,A^3$.

donde dl (84.6) es el elemento de distancia espacial a lo largo del rayo. Para obtener la expresión de k_α, hagamos

$$k^\alpha = g^{\alpha i}k_i = g^{\alpha 0}k_0 + g^{\alpha\beta}k_\beta = -g^\alpha \frac{\omega_0}{c} - \gamma^{\alpha\beta}k_\beta,$$

de manera que,

$$k_\alpha = -\gamma_{\alpha\beta}\left(k^\beta + \frac{\omega_0}{c}g^\beta\right) = -\frac{\omega_0}{c}\left(\frac{\gamma_{\alpha\beta}}{\sqrt{h}}\frac{dx^\beta}{dl} + g_\alpha\right).$$

Finalmente, multiplicando por dx^α, obtenemos el principio de Fermat en la forma (prescindiendo del factor constante $\frac{\omega_0}{c}$):

$$\delta\int\left(\frac{dl}{\sqrt{h}} + g_\alpha\, dx^\alpha\right) = 0.$$

En un campo estático se tiene, simplemente,

$$\delta\int\frac{dl}{\sqrt{h}} = 0.$$

Conviene llamar la atención sobre el hecho de que en un campo gravitatorio el rayo no se propaga a lo largo de la línea más corta en el espacio, ya que ésta se definiría por la ecuación $\delta\int dl = 0$.

§ 89. Rotación

Un caso particular de campo gravitatorio estacionario es el que se manifiesta al pasar a un sistema de referencia en rotación uniforme.

Para definir el intervalo ds, pasaremos de un sistema en reposo (sistema inercial) al sistema en rotación uniforme. En función de las coordenadas r', ϕ', z', t del sistema en reposo (utilizamos coordenadas cilíndricas r', ϕ', z'), el intervalo tiene la forma

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dr'^2 - r'^2\,d\phi'^2 - dz'^2. \tag{89.1}$$

Sean r, ϕ, z las coordenadas cilíndricas en el sistema en rotación. Si el eje de rotación coincide con los ejes Z y Z', se tendrá $r' = r$, $z' = z$, $\phi' = \phi + \Omega t$, donde Ω es la velocidad angular de rotación. Substituyendo en (89.1), se encuentra la expresión pedida del intervalo en un sistema de referencia en rotación:

$$ds^2 = (c^2 - \Omega^2 r^2)\,dt^2 - 2\Omega r^2\,d\phi\,dt - dz^2 - r^2\,d\phi^2 - dr^2. \tag{89.2}$$

Es necesario observar que este último sistema se puede utilizar únicamente hasta distancias iguales a c/Ω. En efecto, de (89.2) se deduce que para $r>c/\Omega$, la componente g_{00} pasa a ser negativa, lo que no es admisible. La inaplicabilidad del sistema de referencia en rotación a grandes distancias está ligada con el hecho de que, a distancias suficientemente grandes, la velocidad sería mayor que la velocidad de la luz y, por consiguiente, un sistema de estas características no se puede construir con cuerpos reales.

Como en todo campo estacionario, en un cuerpo en rotación los relojes no se pueden sincronizar de manera unívoca en todos los puntos. Si se procede a la sincronización a lo largo de una curva cerrada cualquiera, al volver al punto de partida se encuentra un tiempo que difiere del inicial en [véase (88.5)]

$$\Delta t = -\frac{1}{c}\oint \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}\,dx^{\alpha} = \frac{1}{c^2}\oint \frac{\Omega r^2 d\phi}{1-\dfrac{\Omega^2 r^2}{c^2}}$$

o, suponiendo que $\Omega r/c \ll 1$ (es decir, que la velocidad de rotación es pequeña comparada con la velocidad de la luz),

$$\Delta t = \frac{\Omega}{c^2}\int r^2 d\phi = \pm\frac{2\Omega}{c^2}S, \tag{89.3}$$

donde S es el área de la proyección del contorno sobre un plano perpendicular al eje de rotación (vale el signo $+$ o $-$ según se recorra el contorno en el sentido de la rotación o en el sentido opuesto).

Supongamos que un rayo de luz se propaga a lo largo de un cierto contorno cerrado. Calculemos, hasta términos del orden de v/c, el tiempo t que transcurre entre la partida del rayo luminoso y su llegada al punto inicial. La velocidad de la luz, por definición, es siempre igual a c, si los tiempos se han sincronizado a lo largo de la curva cerrada dada y si en cada punto utilizamos el tiempo propio. Dado que la diferencia entre tiempo propio y tiempo universal es del orden de v^2/c^2, al calcular el intervalo de tiempo pedido t hasta términos del orden de v/c se puede prescindir de esta diferencia. Tenemos, por consiguiente,

$$t = \frac{L}{c} \pm \frac{2\Omega}{c^2}S,$$

donde L es la longitud del contorno. De aquí se sigue que la velocidad de la luz, medida por la razón L/t, es igual a

$$c \pm 2\Omega\frac{S}{L}. \tag{89.4}$$

Esta fórmula, lo mismo que la primera aproximación del efecto Doppler, tambien se puede deducir fácilmente de manera puramente clásica.

PROBLEMA

Determinar el elemento de distancia espacial en un sistema de coordenadas en rotación.

Solución. Mediante (84.6) y (84.7) se encuentra

$$dl^2 = dr^2+dz^2+\frac{r^2 d\phi^2}{1-\Omega^2\frac{r^2}{c^2}},$$

lo que determina la geometría espacial en el sistema de referencia en rotación. Obsérvese que la razón de la longitud de la circunferencia de un círculo situado en un plano z = constante (con centro en el eje de rotación) a su radio r es:

$$2\pi/\sqrt{1-\Omega^2 r^2/c^2},$$

es decir, mayor que 2π.

§ 90. Ecuaciones de la electrodinámica cuando existe un campo gravitatorio

Las ecuaciones del campo electromagnético de la teoría de la relatividad especial se pueden generalizar fácilmente de manera que sean aplicables en un sistema de coordenadas curvilíneas cuadridimensional arbitrario, es decir, al caso en que existe un campo gravitatorio.

El tensor del campo electromagnético en la teoría de la relatividad especial está definido por $F_{ik} = (\partial A_k/\partial x^i)-(\partial A_i/\partial x^k)$. Es evidente que ahora debemos definirlo por la igualdad $F_{ik} = A_{k;i}-A_{i;k}$. Pero en virtud de (86.12),

$$F_{ik} = A_{k;i}-A_{i;k} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \tag{90.1}$$

y, por consiguiente, no cambia la relación entre F_{ik} y el potencial A_k. Tampoco cambia de forma, pues, el primer par de ecuaciones de Maxwell (26.5): †

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0. \tag{90.2}$$

Para poder escribir el segundo par de ecuaciones de Maxwell, debemos definir primero el cuadrivector corriente en coordenadas curvilíneas. El procedimiento

† Es fácil ver que esta ecuación puede escribirse también en la forma $F_{ik;l} + F_{kl;i} + F_{li;k} = 0$ que pone en evidencia su covariancia.

es completamente análogo al segundo en el § 28. El elemento espacial de volumen construido mediante los elementos de coordenadas espaciales dx^1, dx^2, dx^3, es $\sqrt{\gamma}\,dV$, donde γ es el determinante del tensor métrico espacial (84.7) y $dV = dx^1\,dx^2\,dx^3$ (véase la nota de la pág. 324). Introduzcamos la densidad de carga ρ definida por $de = \rho\sqrt{\gamma}\,dV$, donde de es la carga que se encuentra en el elemento de volumen $\sqrt{\gamma}\,dV$. Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por dx^i, tenemos:

$$de\,dx^i = \varrho\,dx^i\sqrt{\gamma}\,dx^1\,dx^2\,dx^3 = \frac{\varrho}{\sqrt{g_{00}}}\sqrt{-g}\,d\Omega\,\frac{dx^i}{dx^0}$$

[hemos utilizado la fórmula $-g = \gamma\,g_{00}$ (84.10)]. El producto $\sqrt{-g}\,d\Omega$ es el elemento invariante de cuadrivolumen, de forma que el cuadrivector corriente viene definido por la expresión

$$j^i = \frac{\varrho c}{\sqrt{g_{00}}}\frac{dx^i}{dx^0} \tag{90.3}$$

(¡las cantidades dx^i/dx^0 — que son la velocidad de variación de las coordenadas con el « tiempo », x^0 — no constituyen de suyo un cuadrivector!). La componente j^0 del cuadrivector corriente, multiplicada por $\sqrt{g_{00}}/c$, es la densidad espacial de carga.

Para cargas puntuales, la densidad ρ se expresa por una suma de funciones-δ análoga a la que encontramos en (28.1). Sin embargo, es necesario ahora precisar la definición de estas funciones en el caso de coordenadas curvilíneas. Entenderemos por $\delta(\mathbf{r})$, como antes, el producto $\delta(x^1)\,\delta(x^2)\,\delta(x^3)$ con independencia del sentido geométrico de las coordenadas x^1, x^2, x^3; en estas condiciones, es igual a la unidad la integral según dV (y no según $\sqrt{\gamma}\,dV$): $\int \delta(\mathbf{r})\,dV = 1$. Con esta definición de las funciones-δ, la densidad de carga es

$$\varrho = \sum_a \frac{e_a}{\sqrt{\gamma}}\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a),$$

y el cuadrivector corriente

$$j^i = \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g}}\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)\frac{dx^i}{dx^0}. \tag{90.4}$$

La conservación de la carga se expresa por la ecuación de continuidad, que difiere de (29.4) únicamente en la substitución de las derivadas ordinarias por las covariantes:

$$j^i{}_{;\,i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\,j^i\right) = 0 \tag{90.5}$$

[se ha utilizado la fórmula (86.9)].

De manera análoga se generaliza el segundo par de ecuaciones de Maxwell (30.2); substituyendo en ellas las derivadas ordinarias por las covariantes, se encuentra:

$$F^{ik}{}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}\, F^{ik}) = -\frac{4\pi}{c} j^i \tag{90.6}$$

[se ha utilizado la fórmula (86.10)].

Finalmente, las ecuaciones del movimiento de una partícula cargada en un campo gravitatorio y otro electromagnético se obtienen substituyendo en (23.4) la cuadriaceleración du^i/ds por Du^i/ds:

$$mc \frac{Du^i}{ds} = mc \left(\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl} u^k u^l \right) = \frac{e}{c} F^{ik} u_k. \tag{90.7}$$

PROBLEMA

Escribir, en forma tridimensional, las ecuaciones de Maxwell en un campo gravitatorio dado (con la métrica $\gamma_{\alpha\beta}$ en el espacio de tres dimensiones); introduciendo los trivectores **E**, **D** y los tritensores antisimétricos $B_{\alpha\beta}$ y $H_{\alpha\beta}$ de acuerdo con las definiciones:

$$E_\alpha = F_{0\alpha}, \qquad B_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta},$$
$$D^\alpha = -\sqrt{g_{00}} F^{0\alpha}, \quad H^{\alpha\beta} = \sqrt{g_{00}} F^{\alpha\beta}. \tag{1}$$

Solución. Las magnitudes introducidas de esta manera no son independientes. Escribiendo en forma explícita las igualdades

$$F_{0\alpha} = g_{0l} g_{\alpha m} F^{lm}, \quad F^{\alpha\beta} = g^{\alpha l} g^{\beta m} F_{lm},$$

introduciendo al hacerlo el tensor métrico tridimensional $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + h g_\alpha g_\beta$ [con **g** y h dados por (88.11)] y utilizando las fórmulas (84.9) y (84.12), obtendremos:

$$D_\alpha = \frac{E_\alpha}{\sqrt{h}} + g^\beta H_{\alpha\beta}, \quad B^{\alpha\beta} = \frac{H^{\alpha\beta}}{\sqrt{h}} + g^\beta E^\alpha - g^\alpha E^\beta. \tag{2}$$

Introduzcamos los vectores **B**, **H** duales de los tensores $B_{\alpha\beta}$ y $H_{\alpha\beta}$ según la definición:

$$B^\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} B_{\beta\gamma}, \quad H_\alpha = -\frac{1}{2} \sqrt{\gamma}\, e_{\alpha\beta\gamma} H^{\beta\gamma} \tag{3}$$

(cf. la nota de la pág. 352); el signo menos se introduce para que, en coordenadas galileanas, los vectores **H** y **B** coincidan con las definiciones ordinarias de la intensidad del campo magnético y de la inducción magnética). Entonces (2) se puede escribir en la forma:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{h}} + [\mathbf{H} \times \mathbf{g}], \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{h}} + [\mathbf{g} \times \mathbf{E}]. \tag{4}$$

Substituyendo las magnitudes definidas por (1) en (90.2), se obtienen las ecuaciones:

$$\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial B_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} = 0,$$

$$\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial x^{0}} + \frac{\partial E_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial E_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = 0$$

o bien, pasando a las magnitudes duales (3):

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma}\, \mathbf{B}) \tag{5}$$

($x^0 = ct$; la definición de las operaciones rot y div se da en la nota de la pág. 352). Análogamente, a partir de (90.6) se encuentran las ecuaciones

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{\gamma}\, D^{\alpha}) = 4\pi\varrho,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} (\sqrt{\gamma}\, H^{\alpha\beta}) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^{0}} (\sqrt{\gamma} D^{\alpha}) = -4\pi\varrho \frac{dx^{\alpha}}{dx^{0}},$$

o bien, en notación vectorial tridimensional:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\varrho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma}\, \mathbf{D}) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{s}, \tag{6}$$

donde $\mathbf{s}$ es el vector de componentes $s^{\alpha} = \rho dx^{\alpha}/dt$.

Escribamos también para la densidad la ecuación de continuidad (90.5) en forma tridimensional:

$$\frac{l}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\gamma}\, \varrho) + \operatorname{div} \mathbf{s} = 0. \tag{7}$$

Conviene hacer notar la analogía (claro está, puramente formal), de las ecuaciones (5), (6) con las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético en medios materiales. En particular, en un campo gravitatorio estático, en los términos que contienen las derivadas respecto del tiempo desaparece $\sqrt{\gamma}$ y la relación (4) se reduce a $\mathbf{D} = \mathbf{E}/\sqrt{h}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}/\sqrt{h}$. Cabe decir que, en lo que concierne a su acción sobre un campo electromagnético, un campo gravitatorio estático representa el papel de un medio con permitividad y permeabilidad tales que $\varepsilon = \mu = 1/\sqrt{h}$.

CAPÍTULO 11

LAS ECUACIONES DEL CAMPO GRAVITATORIO

§ 91. El tensor de curvatura

Volvamos de nuevo al concepto de corrimiento paralelo (o translación) de un vector. Conforme dijimos en el § 85, en el caso general de un espacio no euclídeo, la translación infinitesimal de un vector se define como un corrimiento en el que las componentes del mismo no cambian en un sistema de coordenadas que es galileano en el elemento de volumen infinitesimal dado.

Si $x^i = x^i(s)$ es la ecuación paramétrica de una curva (s es longitud de arco contada a partir de un cierto punto), el vector $u^i = dx^i/ds$ es un vector unitario tangente a la curva. Si la curva que estamos considerando es una geodésica, a lo largo de ella es $Du^i = 0$. Esto significa que si el vector u^i se somete a una translación desde el punto x^i de una curva geodésica al punto $x^i + dx^i$ de la misma, coincide entonces con el vector $u^i + du^i$ tangente a la curva en el punto $x^i + dx^i$. Así, pues, cuando la tangente a una geodésica se mueve a lo largo de una curva se desplaza paralelamente a sí misma.

Por otra parte, en la translación de dos vectores se conserva, evidentemente, el « ángulo » que forman. Por lo tanto, podemos decir que en la translación de cualquier vector a lo largo de una curva geodésica, el ángulo formado por el vector y la tangente a la misma no varía. Con otras palabras, en la translación de un vector su componente a lo largo de una geodésica debe ser la misma en todos los puntos de la trayectoria.

Una circunstancia, muy importante, que se da en un espacio no euclídeo es que la translación de un vector desde un punto dado a otro conduce a resultados diferentes si la translación se lleva a cabo a lo largo de caminos distintos. En particular, de ello se sigue que si desplazamos un vector paralelamente a sí mismo a lo largo de un contorno cerrado, al volver al punto inicial no coincidirá con el vector de partida.

Para aclarar esta situación consideremos un espacio no euclídeo bidimensional, es decir, una superficie curva. La figura 19 presenta una porción de dicha superficie

limitada por tres curvas geodésicas. Sometamos el vector 1 a una translación a lo largo del contorno constituido por estas tres curvas. Al recorrer el arco AB, el vector 1, que forma constantemente el mismo ángulo con la curva, se transforma en el vector 2. De la misma manera, al recorrer el arco BC pasa a ser el vector 3. Finalmente al pasar de C a A a lo largo del arco CA, formando un ángulo constante con esta curva, el vector considerado pasa a ser el $1'$, que no coincide con el vector 1.

Deduzcamos la fórmula general que da el cambio de un vector después de una translación a lo largo de un contorno cerrado infinitesimal cualquiera. Este cambio ΔA_k se puede escribir, evidentemente, en la forma $\oint dA_k$, donde la integral se toma a lo largo del contorno dado. Substituyendo en vez de dA_k la expresión (85.5) se tiene:

$$\Delta A_k = \oint \Gamma^i_{kl} A_i dx^l ; \tag{91.1}$$

el vector A_i que aparece en el integrando cambia a medida que lo trasladamos a lo largo del contorno.

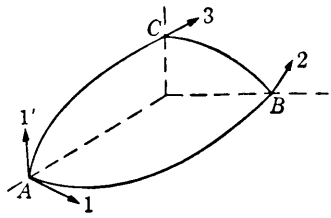

FIG. 19.

Con vistas a la ulterior transformación de esta integral debemos observar lo siguiente. Los valores del vector A_i en puntos interiores al contorno no están definidos unívocamente; dependen del camino a lo largo del cual llegamos al punto en cuestión. Sin embargo, conforme veremos a partir del resultado obtenido más adelante, esta falta de unicidad depende de términos de segundo orden. Por lo tanto, con una precisión de primer orden — que es suficiente para la transformación —, podemos considerar las componentes del vector A_i en puntos interiores al contorno infinitesimal como unívocamente determinadas por sus valores sobre el propio contorno mediante las fórmulas $\delta A_i = \Gamma^n_{il} A_n dx^l$, es decir, por las derivadas

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma^n_{il} A_n . \tag{91.2}$$

Aplicando ahora el teorema de Stokes (6.19) a la integral (91.1) y teniendo en cuenta que el área limitada por el contorno es infinitamente pequeña, Δf^{lm}, obtenemos:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\Gamma^i_{km}A_i)}{\partial x^l} - \frac{\partial(\Gamma^i_{kl}A_i)}{\partial x^m}\right]\Delta f^{lm}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l}A_i - \frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}A_i + \Gamma^i_{km}\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^i_{kl}\frac{\partial A_i}{\partial x^m}\right]\Delta f^{lm}.$$

Substituyendo los valores de las derivadas (91.2) se encuentra finalmente:

$$\Delta A_k = \tfrac{1}{2}R^i_{klm}A_i\Delta f^{lm}, \tag{91.3}$$

donde R^i_{klm} es un tensor de cuarto orden:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}. \tag{91.4}$$

Es claro que R^i_{klm} es un tensor, puesto que en (91.3) el primer miembro es un vector — la diferencia ΔA_k de dos vectores en un mismo punto. El tensor R^i_{klm} se llama *tensor de curvatura* o *tensor de Riemann.*

Es fácil obtener una fórmula análoga para un vector contravariante A^k. Para ello observemos que, dado que en una translación un escalar no cambia, deberá ser $\Delta(A^kB_k) = 0$, donde B_k es un vector covariante cualquiera. Teniendo en cuenta (91.3), resulta entonces

$$\Delta(A^kB_k) = A^k\Delta B_k + B_k\Delta A^k = \tfrac{1}{2}A^kB_iR^i_{klm}\Delta f^{lm} + B_k\Delta A^k =$$

$$= B_k(\Delta A^k + \tfrac{1}{2}A^iR^k_{ilm}\Delta f^{lm}) = 0,$$

o, puesto que el vector B_k es arbitrario,

$$\Delta A^k = -\tfrac{1}{2}R^k_{ilm}A^i\Delta f^{lm}. \tag{91.5}$$

Si derivamos dos veces un vector A_i, de manera covariante, respecto de x^k y respecto de x^l, el resultado dependerá en general del orden en que se efectúe la derivación, al contrario de lo que ocurre en el caso de la derivación ordinaria. El resultado a que se llega es que la diferencia $A_{i;k;l} - A_{i;l;k}$ está determinada por el mismo tensor de curvatura que acabamos de introducir. En efecto, vale la fórmula

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = A_mR^m_{ikl}, \tag{91.6}$$

que se verifica fácilmente mediante un cálculo directo en un sistema de coordenadas localmente geodésico. De manera análoga, para un vector contravariante se tiene †:

$$A^i_{;k;l} - A^i_{;l;k} = -A^mR^i_{mkl}. \tag{91.7}$$

† La fórmula (91.7) se puede también obtener directamente a partir de (91.6) subiendo el índice i y teniendo en cuenta las propiedades de simetría del tensor R_{iklm} (§ 92).

Finalmente, es fácil obtener fórmulas similares para las derivadas segundas de tensores [la manera más fácil de llegar a ellas consiste en considerar, por ejemplo, un tensor de la forma $A_i B_k$ y utilizar las fórmulas (91.6) y (91.7); debido al carácter lineal, las fórmulas así obtenidas deben ser válidas para un tensor arbitrario A_{ik}]. Así

$$A_{ik;\,l;\,m} - A_{ik;\,m;\,l} = A_{in} R^n_{klm} + A_{nk} R^n_{ilm} \tag{91.8}$$

En un espacio plano cuadridimensional, claro está, el tensor de curvatura es igual a cero. En efecto, en él podemos elegir las coordenadas de manera que en todo el espacio todos los $\Gamma^i_{kl} = 0$, y, por consiguiente, también $R^i_{klm} = 0$. En virtud del carácter tensorial de R^i_{klm}, este tensor es entonces también igual a cero en cualquier otro sistema de coordenadas. Este resultado está ligado con el hecho de que en un espacio plano la traslación de un vector de un punto a otro es una operación univalente, de manera que el recorrer un contorno cerrado el vector no cambia.

El teorema recíproco es también válido: si $R^i_{klm} = 0$, el espacio es plano. En efecto, en un espacio cualquiera podemos elegir un sistema de coordenadas que es galileano en una región infinitesimal dada. Si $R^i_{klm} = 0$, la translación es una operación univalente y entonces, mediante una translación del sistema galileano desde la región infinitesimal dada a todo el resto del espacio, podemos construir un sistema galileano válido para todo él, lo que prueba que el espacio es plano.

Por consiguiente, la anulación o no anulación del tensor de curvatura es un criterio que nos permite decidir si un espacio es plano o curvo.

Obsérvese que si bien en un espacio curvo podemos siempre elegir un sistema de coordenadas localmente geodésico en un punto dado, esto es, tal que en dicho punto todos los Γ^i_{kl} se anulan, no se anula con ellos el tensor de curvatura en dicho punto (dado que las derivadas de los Γ^i_{kl} no se anulan a la vez que los Γ^i_{kl}).

§ 92. **Propiedades del tensor de curvatura**

De la expresión (91.4) del tensor R^i_{klm} se sigue inmediatamente que el tensor de curvatura es antisimétrico respecto de los índices l y m:

$$R^i_{klm} = -R^i_{kml}. \tag{92.1}$$

Además, es fácil comprobar la validez de la siguiente identidad:

$$R^i_{klm} + R^i_{mkl} + R^i_{lmk} = 0. \tag{92.2}$$

Junto con el tensor de curvatura mixto $R^i_{kl\,m}$ se emplea también el tensor de curvatura covariante †

$$R_{iklm} = g_{in} R^n_{klm}. \tag{92.3}$$

Mediante simples transformaciones es fácil obtener para él la siguiente expresión:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l}\right) + g_{np}(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im} - \Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}). \tag{92.4}$$

[en la practica, de ordinario, es más conveniente escribir el último término en la forma $g^{np}\,(\Gamma_{n,\,kl},\ \Gamma_{p,\,im} - \Gamma_{n,\,km}\ \Gamma_{p,\,il})$]

De aquí se deducen inmediatamente las siguientes propiedades de simetría:

$$R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml}, \tag{92.5}$$

$$R_{iklm} = R_{lmik}. \tag{92.6}$$

es decir, el tensor es antisimétrico respecto de cada par de índices *ik* y *lm* y simétrico en la permutación de estos dos pares de índices entre sí. De aquí se sigue, en particular, que todas las componentes R_{iklm}, en las que $i = k$ o $l = m$, son iguales a cero.

Finalmente, para R_{iklm} como para R^i_{klm} vale la identidad (92.2):

$$R_{iklm} + R_{imkl} + R_{ilmk} = 0. \tag{92.7}$$

Además, en virtud de las relaciones (92.5)-(92.6) se deduce de aquí que si permutamos cíclicamente una terna cualquiera de índices en $R_{ikl\,m}$ y sumamos las componentes que así se obtienen, el resultado será igual a cero.

Finalmente, demostremos la *identidad de Bianchi:*

$$R^n_{ikl;\,m} + R^n_{imk;\,l} + R^n_{ilm;\,k} = 0. \tag{92.8}$$

Para ello resulta conveniente utilizar un sistema de coordenadas localmente geodésico. Debido a su carácter tensorial, la relación (92.8) será entonces válida en cualquier otro sistema si lo es en aquél. Derivando (91.4) y haciendo luego en el resultado $\Gamma^i_{kl} = 0$, encontramos para el punto en cuestión

$$R^n_{ikl;\,m} = \frac{\partial R^n_{ikl}}{\partial x^m} = \frac{\partial^2 \Gamma^n_{il}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma^n_{ik}}{\partial x^m \partial x^l}.$$

† En este caso sería más correcto utilizar la notación $R^i{}_{kl\,m}$, que indica claramente la posición del índice que ha sido elevado.

Mediante esta expresión es fácil comprobar que, en efecto, se cumple (92.8).

A partir del tensor de curvatura podemos construir, por contracción, un tensor de segundo orden. Esta contracción se puede llevar a cabo de una sola manera: la contracción del tensor R_{iklm} respecto de los índices i y k o l y m da cero debido a la antisimetría respecto de estos dos índices, mientras que la contracción para otro par cualquiera de índices conduce siempre al mismo resultado, salvo el signo. Definiremos el tensor R_{ik} (llamado *tensor de Ricci*) mediante la igualdad †

$$R_{ik} = g^{lm} R_{limk} = R^{l}_{ilk}. \tag{92.9}$$

De acuerdo con (91.4), se tiene:

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^{l}_{ik}}{\partial x^{l}} - \frac{\partial \Gamma^{l}_{il}}{\partial x^{k}} + \Gamma^{l}_{ik}\Gamma^{m}_{lm} - \Gamma^{m}_{il}\Gamma^{l}_{km}. \tag{92.10}$$

Este tensor, es, evidentemente, simétrico:

$$R_{ik} = R_{ki}. \tag{92.11}$$

Finalmente, contrayendo R_{ik}, obtenemos el invariante

$$R = g^{ik} R_{ik} = g^{il} g^{km} R_{iklm}. \tag{92.12}$$

que se llama *curvatura escalar* del espacio.

Las componentes del tensor R_{ik} satisfacen una identidad diferencial que se obtiene contrayendo la identidad de Bianchi (92.8) respecto de los pares de índices ik y ln:

$$R^{l}_{m;\,l} = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^{m}}. \tag{92.13}$$

En virtud de las relaciones (92.5-7), no todas las componentes del tensor de curvatura son independientes. Determinemos el número de las que sí lo son.

La definición del tensor de curvatura dada por las fórmulas precedentes se refiere a un espacio de un número arbitrario de dimensiones. Consideremos primero el caso de un espacio bidimensional, es decir, una superficie ordinaria; designemos en este caso (para distinguirlo de las magnitudes cuadridimensionales) el tensor de curvatura por P_{abcd} y el tensor métrico, por γ_{ab}, donde los índices a, b, ... toman los valores 1, 2. Dado que en cada uno de los pares ab y cd dos índices deben tener valores distintos, es evidente que todas las componentes no nulas del tensor de curvatura o coinciden entre sí o difieren en el signo. Así, pues, en este caso se tiene

† Se emplea también otra definición del tensor R_{ik}, que consiste en contraer R_{iklm} respecto del primero y último índices. Esta definición difiere de la que hemos adoptado sólo en signo.

tan sólo una componente independiente, por ejemplo, P_{1212}. Es fácil hallar que el escalar de curvatura es entonces igual a

$$P = \frac{2P_{1212}}{\gamma}, \quad \gamma \equiv |\gamma_{ab}| = \gamma_{11}\gamma_{22} - (\gamma_{12})^2. \tag{92.14}$$

La cantidad $P/2$ coincide con la llamada curvatura de Gauss de la superficie, K:

$$\frac{P}{2} = K = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}, \tag{92.15}$$

donde ρ_1, ρ_2 son los radios principales de curvatura de la superficie en el punto en cuestión (recordemos que ρ_1 y ρ_2 se toman con igual signo si sus correspondientes centros de curvatura se encuentran situados a un mismo lado de la superficie, mientras que tienen signos opuestos si dichos centros se encuentran a lados distintos de la misma; en el primer caso, $K > 0$ y en el segundo, $K < 0$) †.

Pasemos al tensor de curvatura en un espacio de tres dimensiones; designémoslo por $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$, y por $\gamma_{\alpha\beta}$ el tensor métrico, donde los índices α, β, ... toman los valores 1, 2, 3. Los pares de índices $\alpha\beta$ y $\gamma\delta$ toman en total tan sólo tres sistemas de índices esencialmente distintos: 23, 31, 12 (la permutación de los índices en un par cambia únicamente el signo de la componente del tensor). Dado que el tensor $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ es simétrico respecto de la permutación de estos pares, se tienen en total $3 \cdot 2/2 = 3$ componentes independientes con pares distintos de índices y también 3 componentes con pares iguales. La identidad (92.7) no añade nada nuevo a estas limitaciones.

De esta manera, en el espacio de tres dimensiones, el tensor de curvatura tiene seis componentes independientes. Este mismo número de componentes posee el tensor simétrico $P_{\alpha\beta}$. Por consiguiente, mediante las relaciones lineales $P_{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta} P_{\gamma\alpha\delta\beta}$ todas las componentes del tensor $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ se pueden expresar en función de $P_{\alpha\beta}$ y del tensor métrico $\gamma_{\alpha\beta}$ (véase problema 1). Si se elige el sistema de coordenadas de modo que sea cartesiano en el punto dado, haciéndolo girar se puede reducir el tensor de curvatura $P_{\alpha\beta}$ a sus principales ††Así, pues, la curvatura de un espacio

† Es facil obtener la fórmula (92.15) escribiendo la ecuación de la superficie cerca del punto dado ($x = y = 0$) en la forma $z = \frac{x^2}{2\rho_1} + \frac{y^2}{2\rho_2}$. Entonces, el cuadrado del elemento de longitud sobre ella es:

$$dl^2 = \left(1 + \frac{x^2}{\varrho_1^2}\right) dx^2 + \left(1 + \frac{y^2}{\varrho_2^2}\right) dy^2 + 2\frac{xy}{\varrho_2 \varrho_1} dx\, dy$$

El cálculo de P_{1212} en el punto $x = y = 0$ según la fórmula (92.4) (en la que sólo son necesarios los términos que contienen las derivadas segundas de $\gamma_{\alpha\beta}$) conduce a (92.15).

†† Para calcular en la práctica los valores principales del tensor $P_{\alpha\beta}$ no es necesario efectuar el paso a un sistema de coordenadas cartesiano en el punto dado. Estos valores se pueden determinar como raíces λ de la ecuación $|P_{\alpha\beta} - \lambda\gamma_{\alpha\beta}| = 0$.

curvo tridimensional viene determinado en cada punto por tres cantidades †).

Finalmente, pasemos al espacio de cuatro dimensiones. Los pares de índices *ik* y *lm* toman en este caso seis sistemas distintos de valores: 01, 02, 03, 23, 31, 12. Por ello se tienen seis componentes R_{iklm} con iguales pares de índices y $6 \cdot 5/2 =$ quince componentes con pares distintos. Sin embargo, estas últimas no son todavía independientes entre sí: tres componentes en las que los cuatro índices son distintos están ligadas, en virtud de (92.7), por una misma identidad:

$$R_{0123} + R_{0312} + R_{0231} = 0. \tag{92.16}$$

De esta manera, en el cuadriespacio el tensor de curvatura tiene en total 20 componentes independientes.

Eligiendo el sistema de coordenadas de modo que sea galileano en el punto dado y aplicando las transformaciones que hacen girar este sistema (con lo cual los valores de g_{ik} en el punto dado no cambian), puede conseguirse la anulación de seis componentes del tensor de curvatura (seis es el número de rotaciones independientes del cuadrisistema de coordenadas). Así, pues, en el caso general la curvatura del cuadriespacio viene determinada en cada punto por 14 cantidades.

Si $R_{ik} = 0$ ††, en un sistema de coordenadas arbitrario el tensor de curvatura tiene sólo 10 componentes independientes. Aplicando una transformación de coordenadas, se puede entonces reducir el tensor R_{iklm} (en el punto dado del cuadriespacio) a una forma « canónica » en la que sus componentes se expresan, en el caso general, en función de cuatro cantidades independientes; en ciertos casos particulares este número puede incluso resultar menor [la clasificación de los posibles tipos canónicos del tensor R_{iklm} fue descubierta por A. Z. Petrov (1950); véase el problema 3].

Pero si $R_{ik} \neq 0$, esta misma clasificación valdrá para el tensor de curvatura después de separar de él una determinada parte que se expresa en función de las com-

---

† El conocimiento del tensor $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ permite determinar la curvatura gaussiana K de cualquier superficie del espacio. Indicaremos aquí únicamente que si x^1, x^2, x^3 es un sistema ortogonal de coordenadas,

$$K = \frac{P_{1212}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - (\gamma_{12})^2}$$

es la curvatura gaussiana del «plano» perpendicular (en el punto dado del mismo) al eje x^3; por «plano» se entiende la superficie formada por geodésicas (que pasan por un punto y normales en él a una misma dirección).

†† Veremos más adelante, § 95, que el tensor de curvatura para el campo gravitatorio en el vacío posee esta propiedad.

ponentes R_{ik}. En efecto, construyamos el tensor †.

$$C_{iklm} = R_{iklm} - \frac{1}{2} R_{il}g_{km} + \frac{1}{2} R_{im}g_{kl} + \frac{1}{2}R_{kl}g_{im} - \\ - \frac{1}{2} R_{km}g_{il} + \frac{1}{6} R\,(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl}). \qquad (92.17)$$

Es fácil ver que este tensor tiene todas las propiedades de simetría del tensor R_{iklm} y que se anula en la contracción respecto de un par de índices (il o km).

Problemas

1. Expresar el tensor de curvatura de cuarto orden $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ del espacio de tres dimensiones en función del tensor de segundo orden $P_{\alpha\beta}$.

Solución. Veamos de representar $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ en la forma

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = A_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - A_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} + A_{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma} - A_{\beta\gamma}\gamma_{\alpha\delta},$$

que satisface las condiciones de simetría; $A_{\alpha\beta}$ es aquí un tensor simétrico cuya relación con $P_{\alpha\beta}$ se determina contrayendo la expresión que acabamos de escribir respecto de los índices α y γ. Se encuentra así

$$P_{\alpha\beta} = A\gamma_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta},\quad A_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{4} P\gamma_{\alpha\beta},$$

y, finalmente,

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = P_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - P_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} + P_{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma} - P_{\beta\gamma}\gamma_{\alpha\delta} + \frac{P}{2}\,(\gamma_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} - \gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta}).$$

2. Calcular las componentes de los tensores R_{iklm} y R_{ik} para una métrica en la que $g_{ik} = 0$ para $i \neq k$ (B. K. Harrison, 1960).

Solución. Representemos las componentes no nulas del tensor métrico en la forma

$$g_{ii} = e_i e^{2F_i},\quad e_0 = -1,\quad e_\alpha = 1.$$

El cálculo, de acuerdo con la fórmula (92.4), da las siguientes expresiones para las componentes no nulas del tensor de curvatura:

$$R_{lilk} = e_l e^{2F_l}\,[F_{l,k}F_{k,i} + F_{i,k}F_{l,i} - F_{l,i}F_{l,k} - F_{l,i,k}],\ i \neq k \neq l;$$

$$R_{lili} = e_l e^{2F_l}(F_{i,i}F_{l,i} - F_{l,i}^2 - F_{l,i,i}) + e_i e^{2F_i}(F_{l,l}F_{i,l} - F_{i,l}^2 - F_{i,l,l}) - \\ - e_l e^{2F_l} \sum_{m \neq i,\,l} e_i e_m e^{2(F_i - F_m)} F_{i,m}F_{l,m},\ i \neq l$$

† Esta farragosa expresión se puede escribir de manera más compacta en la forma:

$$C_{iklm} = R_{iklm} - R_{l[ig}g_{k]m} + R_{m[ig}g_{k]l} + \frac{1}{3} Rg_{l[ig}g_{k]m}$$

donde los paréntesis rectangulares significan la antisimetrización respecto de los índices que abarcan:

$$A_{[ik]} = \frac{1}{2}\,(A_{ik} - A_{ki}).$$

(¡sin sumar respecto de índices repetidos!). Los subíndices precedidos de una coma representan la derivación ordinaria respecto de las correspondientes coordenadas.

Contrayendo el tensor de curvatura respecto de dos índices, obtenemos:

$$R_{ik} = \sum_{l \neq i,k} (F_{l,k}F_{k,i} + F_{i,k}F_{l,i} - F_{l,i}F_{l,k} - F_{l,i,k}), \quad i \neq k;$$

$$R_{ii} = \sum_{l \neq i} [F_{i,i}F_{l,i} - F_{l,i}^2 - F_{l,i,i} + e_i e_l e^{2(F_i - F_l)} (F_{l,l}F_{i,l} - F_{i,l}^2 - F_{i,l,l} - F_{i,l} \sum_{m \neq i,l} F_{m,l})].$$

3. Estudiar los tipos posibles de formas canónicas del tensor de curvatura para $R_{ik} = 0$.

Solución. Supondremos en lo que sigue que la métrica se ha reducido a la forma galileana en el punto dado del espacio cuadridimensional. Representaremos el conjunto de las 20 componentes independientes del tensor R_{iklm} como conjunto de componentes de tres tensores de tres dimensiones definidos de la manera siguiente:

$$A_{\alpha\beta} = R_{0\alpha 0\beta}, \quad C_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} e_{\alpha\gamma\delta} e_{\beta\lambda\mu} R_{\gamma\delta\lambda\mu}, \quad B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} e_{\alpha\gamma\delta} R_{0\beta\gamma\delta} \tag{1}$$

($e_{\alpha\beta\gamma}$ es el tensor antisimétrico unidad; dado que la métrica tridimensional es cartesianas, al sumar no es necesario distinguir entre superíndices y subíndices). Los tensores $A_{\alpha\beta}$ y $C_{\alpha\beta}$, por definición, son simétricos; el tensor $B_{\alpha\beta}$ es antisimétrico, y su traza igual a cero en virtud de (92.16). De acuerdo con la definición (1) tenemos, por ejemplo

$$B_{11} = R_{0123}, \quad B_{12} = R_{0131}, \quad B_{13} = R_{0112}, \quad C_{11} = R_{2323}, \ldots$$

Es fácil ver que las condiciones $R_{km} = g^{il} R_{iklm} = 0$ equivalen a las relaciones siguientes entre las componentes de los tensores tridimensionales que hemos introducido en (1):

$$A_{\alpha\alpha} = 0, \quad B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}, \quad A_{\alpha\beta} = -C_{\beta\alpha}. \tag{2}$$

Introduzcamos, además, el tensor complejo simétrico

$$D_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(A_{\alpha\beta} + 2iB_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta}) = A_{\alpha\beta} + iB_{\alpha\beta}. \tag{3}$$

Esta unión de los dos tensores reales tridimensionales $A_{\alpha\beta}$ y $B_{\alpha\beta}$ en un solo tensor complejo corresponde precisamente al procedimiento seguido en el § 25 cuando combinamos los dos vectores **E** y **H** para formar el vector complejo **F**, y la relación resultante entre $D_{\alpha\beta}$ y el cuadritensor $R_{ikl\,m}$ corresponde a la relación entre **F** y el cuadritensor F_{ik}. Se sigue de aquí que las transformaciones cuadridimensionales (transformaciones de Lorentz) del tensor $R_{ikl\,m}$ son equivalentes a rotaciones complejas de tres dimensiones aplicadas al tensor $D_{\alpha\beta}$.

Para estas rotaciones podemos definir valores propios $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ y vectores propios n_α (en general, complejos) como soluciones del sistema de ecuaciones

$$D_{\alpha\beta} n_\beta = \lambda n_\alpha. \tag{4}$$

Las cantidades λ son invariantes del tensor de curvatura. Dado que la traza $D_{\alpha\alpha} = 0$, la suma de las tres raíces de la ecuación (4) es también igual a cero: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

Según sea el número de vectores propios independi entes n_α, llegamos a la siguiente clasificación de los casos de reducción posibles del tensor R_{iklm} a las *formas canónicas de Petrov*, I-III.

(I) Existen tres vectores propios independientes. Sus cuadrados $n_\alpha n^\alpha$ son diferentes de cero; mediante una rotación adecuada podemos reducir el tensor $D_{\alpha\beta}$, y con él $A_{\alpha\beta}$ y $B_{\alpha\beta}$, a la forma diagonal:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda_1' & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2' & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1' - \lambda_2' \end{pmatrix}, \quad B_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda_1'' & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2'' & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1'' - \lambda_2'' \end{pmatrix} \tag{I}$$

En este caso el tensor de curvatura posee cuatro invariantes independientes: λ_1', λ_2', λ_1'', λ_2''. †

Los invariantes complejos $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ se expresan algebraicamente en función de los escalares complejos

$$I_1 = \frac{1}{48}\left(R_{iklm}R^{iklm} - iR_{iklm}\overset{*}{R}{}^{iklm}\right),$$

$$I_2 = \frac{1}{96}\left(R_{iklm}R^{lmpr}R_{pr}{}^{ik} + iR_{iklm}R^{lmpr}\overset{*}{R}{}_{pr}{}^{ik}\right),$$

donde un asterisco encima de una letra designa el tensor dual:

$$\overset{*}{R}_{iklm} = \frac{1}{2} E_{ikpr}R^{pr}{}_{lm}.$$

Calculando I_1, I_2 mediante (1), obtendremos:

$$I_1 = \frac{1}{3}\left(\lambda^{(1)2} + \lambda^{(2)2} + \lambda^{(1)}\lambda^{(2)}\right), \quad I_2 = \frac{1}{2}\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}\left(\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}\right). \tag{5}$$

Estas fórmulas permiten calcular $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ partiendo de los valores R_{iklm} en cualquier sistema de referencia.

(II) Existen dos vectores propios independientes. El cuadrado de uno de ellos es entonces igual a cero, de manera que no es posible elegirlo como eje de coordenadas. Sin embargo, podemos suponer que pertenece al plano x^1, x^2; entonces es $n_2 = i\,n_1$, $n_3 = 0$. La ecuación (4) correspondiente da $D_{11} + i\,D_{12} = \lambda$, $D_{22} - i\,D_{12} = \lambda$, de manera que $D_{11} = \lambda - i\mu$, $D_{22} = \lambda + i\mu$, $D_{12} = \mu$.

La cantidad compleja $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ es un escalar y no podemos cambiar su valor. Pero a la cantidad μ se le puede atribuir un valor cualquiera no nulo mediante una rotación compleja adecuada, y, sin limitar la generalidad, podemos así suponer que es real. Resulta de esta manera el siguiente tipo canónico:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda' & \mu & 0 \\ \mu & \lambda' & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda' \end{pmatrix}, \quad B_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda'' - \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda'' + \mu & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda'' \end{pmatrix} \tag{II}$$

† El caso degenerado en el que $\lambda_1' = \lambda_2'$, $\lambda_1'' = \lambda_2''$ se llama del tipo *D*.

Existen en este caso dos invariantes. λ' y λ''. Además, según (5) : $I_1=\lambda^2$, $I_2=\lambda^3$ de modo que $I_1^3=I_2^2$.

(III) Existe un solo vector propio y su cuadrado es igual a cero. Todos los valores propios son entonces idénticos y, en consecuencia, iguales a cero. Las soluciones de las ecuaciones (7) se pueden reducir a la forma $D_{11}=D_{22}=D_{12}=0$, $D_{13}=\mu$, $D_{23}=i\mu$, de modo que

$$A_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & \mu & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(III)}$$

En este caso el tensor de curvatura carece de invariantes y nos encontramos ante una situación peculiar: el espacio de cuatro dimensiones es curvo, pero no existe ningún invariante que se pueda utilizar como medida de su curvatura. [La misma situación se presenta en el caso (II) con $\lambda'=\lambda''=0$, caso degenerado que se llama del tipo *N*].

§ 93. La función acción del campo gravitatorio

Para hallar las ecuaciones que determinan el campo gravitatorio es necesario, en primer lugar, determinar la acción S_g de dicho campo. Las ecuaciones buscadas se obtienen entonces variando la suma de las acciones del campo y de las partículas materiales.

Al igual que en el caso del campo electromagnético, la acción S_g debe expresarse en forma de una integral escalar $\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$, extendida a todo el espacio y a todos los valores de la coordenada temporal entre dos valores dados. Para determinar este escalar partiremos de que las ecuaciones del campo gravitatorio deben contener derivadas de los « potenciales » de orden no superior al segundo (de manera análoga a como ocurre en el caso del campo electromagnético). Dado que las ecuaciones del campo se obtienen variando la acción, es necesario que el integrando G contenga derivadas de las g_{ik} de orden no superior al primero; por consiguiente G debe contener solamente el tensor g_{ik} y las cantidades Γ^i_{kl}.

Sin embargo, es imposible construir un escalar a partir de las cantidades g_{ik} y Γ^i_{kl} únicamente. Esto se ve sin más que considerar que, mediante una elección adecuada del sistema de coordenadas, podemos siempre reducir a cero todas las cantidades Γ^i_{kl} en un punto dado. Existe, sin embargo, el escalar R (la curvatura del espacio cuadridimensional), que si bien contiene, además de las g_{ik} y sus derivadas primeras, las derivadas segundas de las g_{ik}, es lineal respecto de éstas. Gracias a este carácter, la integral invariante $\int R\sqrt{-g}\,d\Omega$ se puede transformar, mediante el teorema de Gauss, en la integral de una expresión que no contiene derivadas segundas. En efecto, $\int R\sqrt{-g}\,d\Omega$ se puede representar en la forma

$$\int R\sqrt{-g}\,d\Omega=\int G\sqrt{-g}\,d\Omega+\int\frac{\partial(\sqrt{-g}\,w^i)}{\partial x^i}\,d\Omega,$$

donde G contiene solamente el tensor g_{ik} y sus derivadas primeras, y el integrando de la segunda integral tiene la forma de la divergencia de una cierta magnitud w^i (los pormenores del cálculo se dan al final de este párrafo). Según el teorema de

Gauss, esta última integral se puede transformar en una integral extendida a una hipersuperficie que rodea el cuadrivolumen en el que se efectúa la integración de las otras dos integrales. Cuando se varía la acción, la variación del segundo término del segundo miembro se anula, ya que en el principio de mínima acción las variaciones del campo en los límites de la región de integración son iguales a cero. En consecuencia, podemos escribir:

$$\delta \int R\sqrt{-g}\, d\Omega = \delta \int G\sqrt{-g}\, d\Omega.$$

El primer miembro es un escalar; por consiguiente, la expresión que aparece en el segundo miembro es también un escalar (la magnitud G no lo es, claro está).

La magnitud G cumple la condición antes impuesta, dado que contiene solamente las g_{ik} y sus primeras derivadas. Podemos escribir, por consiguiente,

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\delta \int G\sqrt{-g}\, d\Omega = -\frac{c^3}{16\pi k}\delta \int R\sqrt{-g}\, d\Omega, \qquad (93.1)$$

donde k es una nueva constante universal. Al igual que en el caso de la acción del campo electromagnético (§ 27), se puede ver que la constante k debe ser positiva (véase el final de este párrafo).

La constante k se llama *constante de la gravitación.* Las dimensiones de k se deducen de (93.1). Las dimensiones de la acción son $g \cdot cm^2 \cdot s^{-1}$; se puede considerar que todas las coordenadas tienen las dimensiones de una longitud y que las g_{ik} son magnitudes de dimensión nula, con lo que las dimensiones de R son cm^{-2}. Resulta, pues, que las dimensiones de k son $cm^3 \cdot g^{-1} \cdot s^{-2}$. Su valor numérico es:

$$k = 6{,}67 \cdot 10^{-8}\ cm^3 \cdot g^{-1}\ s^{-2} \qquad (93.2)$$

Obsérvese que pudiéramos haber hecho k igual a la unidad (o a cualquier otra constante de dimensión nula). Sin embargo, esto hubiera fijado el valor de la unidad de masa †.

Finalmente, calculemos la magnitud G que aparece en (93.1). De la expresión (92.10) de R_{ik} se sigue

$$\sqrt{-g}\, R = \sqrt{-g}\, g^{ik} R_{ik} = \sqrt{-g}\left\{ g^{ik}\frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - g^{ik}\frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + g^{ik}\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - g^{ik}\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} \right\}.$$

† Si se hace $k = c^2$, la masa se mide en centímetros, con 1 cm $= 1{,}35 \times 10^{28}$ g. A veces se utiliza en lugar de k la cantidad

$$\varkappa = \frac{8\pi k}{c^2} = 1.86 \times 10^{-27}\ cm\ g^{-1},$$

que se llama constante gravitatoria de Einstein.

En los dos primeros términos del segundo miembro tenemos:

$$\sqrt{-g}\,g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,g^{ik}\Gamma^l_{ik}) - \Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,g^{ik}),$$

$$\sqrt{-g}\,g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,g^{ik}\Gamma^l_{il}) - \Gamma^l_{il}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,g^{ik}).$$

Prescindiendo de los términos que dan lugar a una divergencia se encuentra:

$$\sqrt{-g}\,G = \Gamma^m_{im}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,g^{ik}) - \Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,g^{ik}) - (\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm})g^{ik}\sqrt{-g}.$$

De las fórmulas (86.5)-(86.8) resulta que los dos primeros términos del segundo miembro son iguales a $\sqrt{-g}$ multiplicada por

$$2\Gamma^l_{ik}\Gamma^i_{lm}g^{mk} - \Gamma^m_{im}\Gamma^i_{kl}g^{kl} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}g^{ik} = g^{ik}(2\Gamma^l_{mk}\Gamma^m_{il} - \Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm})$$
$$= 2g^{ik}(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}).$$

Finalmente, se tiene:

$$G = g^{ik}(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}). \tag{93.3}$$

Las componentes del tensor métrico son las cantidades que determinan el campo gravitatorio. Por consiguiente, en el principio de mínima acción que le corresponde, las cantidades que se varían son las g_{ik}. Sin embargo, es necesario formular aquí la siguiente reserva fundamental. Se trata, simplemente, de que no podemos ahora afirmar que en un campo realmente existente la integral de acción presenta un mínimo (y no solamente un extremo) respecto de *todas* las posibles variaciones de las g_{ik}. Ello está ligado con el hecho de que no todo cambio en las g_{ik} corresponde a un cambio en la métrica del espacio-tiempo, es decir, a un cambio real del campo gravitatorio. Las componentes g_{ik} cambian también en una simple transformación de coordenadas ligada meramente con el paso de un sistema a otro en el mismo espacio-tiempo. Cada una de estas transformaciones de coordenadas es, en términos generales, un conjunto de cuatro funciones independientes (una por cada coordenada). A fin de excluir dichos cambios en las g_{ik}, cambios que no están asociados a un cambio de la métrica, podemos imponer cuatro condiciones suplementarias y exigir que estas condiciones se cumplan en el proceso de variación. Así, cuando se aplica a un campo gravitatorio, el principio de mínima acción afirma solamente que es posible imponer condiciones suplementarias a las g_{ik} tales que, cuando se cumplen, la acción presenta un mínimo respecto de las variaciones de las g_{ik} †.

Teniendo presentes estas observaciones, demostraremos ahora que la constante de gravitación debe ser positiva. En cuanto a las cuatro condiciones suplementarias

† Hay que subrayar, sin embargo, que nada de lo que acabamos de decir afecta a la deducción de las ecuaciones del campo a partir del principio de mínima acción (§ 95). Estas ecuaciones resultan ya de la condición que la acción presente un extremo (es decir, que se anule su variación primera), y no precisamente un mínimo. Por lo tanto podemos variar al deducirlas todas las g_{ik} independientemente.

citadas, impondremos la anulación de las tres componentes $g_{0\alpha}$ y la constancia del determinante $|g_{\alpha\beta}|$ formado con las componentes $g_{\alpha\beta}$:

$$g_{0\alpha} = 0, \ |g_{\alpha\beta}| = \text{const};$$

en virtud de la última de estas condiciones tendremos:

$$g^{\nu\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}|g_{\alpha\beta}| = 0.$$

Nos interesan aquí los términos del integrando de la expresión de la acción que contienen derivadas de las g_{ik} respecto de x^0 (cf. pág. 97). Un cálculo sencillo que tiene en cuenta (93.3) prueba que estos términos de G son:

$$-\frac{1}{4}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^0}\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^0}.$$

Es fácil ver que esta cantidad es esencialmente negativa. En efecto, eligiendo un sistema espacial de coordenadas que sea cartesiano en un punto dado del espacio y en un instante dado (de manera que $g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$), se obtiene

$$-\frac{1}{4}g^{00}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}\right)^2$$

y como $g^{00} = 1/g_{00} > 0$, es evidente el signo de esta cantidad.

Mediante un cambio suficientemente rápido de las componentes $g_{\alpha\beta}$ con el tiempo x^0 (en el intervalo de tiempo definido por los límites de integración respecto de x^0) se puede conseguir que la cantidad $-G$ sea tan grande como se quiera. Si la constante k fuese negativa, la acción disminuiría entonces sin límite (tomando valores negativos de valor absoluto arbitrariamente grande), esto es, no podría presentar un mínimo.

§ 94. El tensor energía-impulso

En el § 32 se dio la regla general para calcular el tensor energía-impulso de un sistema físico cualquiera cuya acción se presenta como integral de la forma (32.1) extendida al espacio de cuatro dimensiones. En coordenadas curvilíneas esta integral se debe escribir en la forma

$$S = \frac{1}{c}\int \Lambda \sqrt{-g}\, d\Omega \tag{94.1}$$

(en coordenadas galileanas $g = -1$ y S se reduce a $\int \Lambda\, dV\, dt$). La integración se extiende a todo el espacio (tridimensional) y al intervalo de tiempo determinado por los dos instantes dados, es decir, a la región infinita del espacio cuadridimensional limitada por dos hipersuperficies.

Conforme se discutió ya en el § 32, el tensor energía-impulso, definido por la fórmula (32.5), no es, en general, simétrico, cual debiera ser. Para simetrizarlo, hemos de sumar a (32.5) términos convenientes de la forma $\frac{\partial}{\partial x^l}\psi_{ikl}$ donde ψ_{ikl} es antisimétrico respecto de los índices k y l. Daremos ahora otro método para calcular el tensor energía-impulso, método que tiene la ventaja de conducir directamente a la expresión correcta.

En (94.1) pasemos de las coordenadas x^i a las coordenadas $x'^i = x^i + \xi^i$, donde las ξ^i son cantidades pequeñas. En esta transformación, las g^{ik} cambian de acuerdo con las fórmulas:

$$g'^{ik}(x'^l) = g^{lm}(x^l)\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^k}{\partial x^m} = g^{lm}\left(\delta^i_l + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}\right)\left(\delta^k_m + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\right)$$

$$\approx g^{ik}(x^l) + g^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kl}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}.$$

El tensor g'^{ik} es aquí función de las x'^l, mientras que el tensor g^{ik} es función de las coordenadas de partida x^l. Para expresar todos los términos como funciones de las mismas variables, desarrollemos $g'^{ik}(x^l + \xi^l)$ en potencias de ξ^l. Además, si prescindimos de los términos de orden superior en ξ^l, podemos substituir g'^{ik} por g^{ik} en todos los términos que contienen ξ^l. Se encuentra así:

$$g'^{ik}(x) = g^{ik}(x^l) - \xi^l\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + g^{il}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} + g^{kl}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}.$$

Es fácil comprobar directamente que los tres últimos términos del segundo miembro se pueden escribir como suma $\xi^{i;k} + \xi^{k;i}$ de las derivadas contravariantes de las componentes ξ^i. Obtenemos de esta manera la transformación de las g^{ik} en la forma final:

$$g'^{ik} = g^{ik} + \delta g^{ik}, \quad \delta g^{ik} = \xi^{i;k} + \xi^{k;i}. \tag{94.2}$$

Para las componentes covariantes se tiene:

$$g'_{ik} = g_{ik} + \delta g_{ik}, \quad \delta g_{ik} = -\xi_{i;k} - \xi_{k;i} \tag{94.3}$$

(de manera que, salvo términos de orden superior al primero, queda satisfecha la condición $g'_{il}\, g'^{kl} = \delta_i^k$).†

Dado que la acción S es un escalar, S no cambia en una transformación de coordenadas. Por otra parte, el cambio δS en la acción como consecuencia de una transformación de coordenadas se puede escribir de la siguiente manera. Como en el § 32, sea q una cualquiera de las magnitudes que definen el sistema físico al que se refiere la acción S. En una transformación de coordenadas, las cantidades q cambian en δq. Al calcular δS no es necesario escribir los términos que contienen los cambios en q. Todos estos términos deben reducirse entre sí en virtud de las « ecuaciones del movimiento » del sistema físico, ya que estas ecuaciones se obtienen precisamente igualando a cero la variación de S respecto de las cantidades q. Por lo tanto, basta escribir los términos asociados a cambios en las g_{ik}. Utilizando, como de costumbre, el teorema de Gauss y haciendo $\delta g^{ik} = 0$ en los límites de integración, se encuentra δS en la forma ††.

$$\delta S = \frac{1}{c}\int \left\{ \frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial g^{ik}}\,\delta g^{ik} + \frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial \dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\,\delta \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right\} d\Omega$$

$$= \frac{1}{c}\int \left\{ \frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\,\frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial \dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} \right\} \delta g^{ik}\, d\Omega.$$

† Obsérvese que las ecuaciones

$$\xi^{j;k} + \xi^{k;i} = 0$$

determinan las transformaciones infinitesimales de coordenadas que no cambian una métrica dada. Se las suele llamar ecuaciones de Killing.

†† Es necesario subrayar que la notación de derivación respecto de las componentes del tensor simétrico g_{ik}, que introducimos aquí, posee, en cierto sentido, un carácter simbólico. En efecto, la derivada $\partial F/\partial g_{ik}$ (F es una función de las g_{ik}) expresa, en esencia, solamente el hecho de que $dF = \dfrac{\partial F}{\partial g_{ik}}\, dg_{ik}$. Pero en la suma $\dfrac{\partial F}{\partial g_{ik}}\, dg_{ik}$, los términos que contienen las diferenciales dg_{ik} de las componentes del tensor simétrico con $i \neq k$, aparecen dos veces. Por lo tanto, al derivar la expresión de F respecto de una determinada componente g_{ik} con $i \neq k$, obtendríamos un valor que es el doble del que representamos por $\partial F/\partial g_{ik}$. Esta observación debe tenerse en cuenta si se atribuyen valores determinados a los índices i, k, en fórmulas en las que figuran las derivadas respecto de g_{ik}.

Introduzcamos ahora la notación

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,T_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l}\,\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} - \frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial g^{ik}}. \tag{94.4}$$

δS toma entonces la forma †

$$\delta S = \frac{1}{2c}\int T_{ik}\,\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega = -\frac{1}{2c}\int T^{ik}\delta g_{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega \tag{94.5}$$

(obsérvese que $g^{ik}\,\delta g_{lk} = -g_{lk}\,\delta g^{ik}$, y que, por consiguiente, $T^{ik}\,\delta g_{ik} = -T_{ik}\,\delta g^{ik}$). Substituyendo en vez de δg^{ik} la expresión (94.2) tenemos, valiéndonos de la simetría del tensor T_{ik},

$$\delta S = \frac{1}{2c}\int T_{ik}(\xi^{i;k}+\xi^{k;i})\sqrt{-g}\,d\Omega = \frac{1}{c}\int T_{ik}\xi^{i;k}\sqrt{-g}\,d\Omega.$$

Transformemos esta expresión de la siguiente manera:

$$\delta S = \frac{1}{c}\int (T_i^k\xi^i)_{;k}\sqrt{-g}\,d\Omega - \frac{1}{c}\int T^k_{i;k}\xi^i\sqrt{-g}\,d\Omega. \tag{94.6}$$

Recordando (86.9), la primera integral se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{c}\int \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,T_i^k\xi^i)\,d\Omega,$$

y transformarla luego en una integral extendida a una hipersuperficie. Dado que ξ^i se anula en los límites de integración, esta integral se reduce a cero,

Así, igualando δS a cero, se encuentra

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int T^k_{i;k}\xi^i\sqrt{-g}\,d\Omega = 0.$$

Debido a la arbitrariedad de las ξ^i, se sigue entonces que

$$T^k_{i;k} = 0. \tag{94.7}$$

† Conviene llamar la atención sobre el hecho de que, en el caso que estamos considerando, las diez cantidades δg_{ik} no son independientes, ya que resultan de una transformación de coordenadas, en número de cuatro solamente. Por ello, de la anulación de δS no se sigue en modo alguno que $T_{ik} = 0$.

Comparando este resultado con la ecuación (32.4) $\partial T_{ik}/\partial x^k = 0$, válida en coordenadas galileanas, vemos que el tensor T_{ik}, definido por la fórmula (94.4), debe identificarse con el tensor de energía-impulso — salvo acaso un factor constante. Es fácil comprobar, por ejemplo efectuando el cálculo a partir de la fórmula (94.4) del campo electromagnético $\left(\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{ik} F^{ik} = -\frac{1}{16\pi} F_{ik} F_{lm} g^{il} g^{km}\right)$, que este factor es igual a la unidad, esto es, que T_{ik}, dado por (94.4), es exactamente el tensor energía-impulso.

La fórmula (94.4) nos permite así calcular el tensor energía-impulso derivando la función Λ respecto de las componentes del tensor métrico (y de sus derivadas). El tensor T_{ik} obtenido de esta manera es simétrico. La fórmula (94.4) resulta conveniente para el cálculo del tensor energía-impulso, no sólo en el caso en que existe campo gravitatorio, sino también cuando no existe, cuando el tensor métrico no posee un significado independiente y el paso a coordenadas curvilíneas se efectúa formalmente como un paso intermedio en el cálculo de T_{ik}.

La expresión (33.1) del tensor energía-impulso del campo electromagnético se debe escribir, en coordenadas curvilíneas, en la forma

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F_k{}^l + \frac{1}{4} F_{lm}F^{lm} g_{ik}\right). \tag{94.8}$$

Análogamente, las componentes covariantes del tensor energía-impulso de los cuerpos macroscópicos (35.2) son iguales a

$$T_{ik} = (p+\epsilon) u_i u_k - p g_{ik}. \tag{94.9}$$

Obsérvese que la cantidad T_{00} es siempre positiva †:

$$T_{00} \geqslant 0. \tag{94.10}$$

Desde este punto de vista, nada puede decirse con carácter general acerca del signo de la componente mixta $T_0{}^0$.

---

† En efecto, tenemos $T_{00} = \varepsilon u_0^2 + p(u_0^2 - g_{00})$. El primer término es siempre positivo, evidentemente. En el segundo término haremos $u_0 = g_{00}u^0 + g_{0\alpha}u^\alpha = \dfrac{g_{00}\,dx^0 + g_{0\alpha}\,dx^\alpha}{ds}$, obteniéndose así, después de una simple transformación, $g_{00}p\left(\dfrac{dl}{ds}\right)^2$, donde dl es el elemento de distancia espacial (84.6); de aquí se sigue, sin más, que también el segundo término de T_{00} es positivo. Al mismo resultado se llega para el tensor (94.8).

PROBLEMA

Estudiar los posibles tipos de reducción a la forma canónica de un tensor simétrico de segundo orden.

Solución. La reducción de un tensor simétrico A_{ik} a los ejes principales significa hallar los «vectores propios» n^i para los que

$$A_{ik}n^k = \lambda n_i. \tag{1}$$

Los correspondientes valores principales λ se obtienen como raíces de la ecuación de cuarto grado

$$\left| A_{ik} - \lambda g_{ik} \right| = 0 \tag{2}$$

y son invariantes del tensor. Tanto las cantidades λ como los vectores propios pueden resultar complejos. (Las componentes del propio tensor A_{ik}, sin embargo, se suponen reales, claro está).

A partir de las ecuaciones (1) es fácil demostrar por procedimientos conocidos que los dos vectores $n_i^{(1)}$ y $n_i^{(2)}$ que corresponden a dos valores principales distintos $\lambda^{(1)}$ y $\lambda^{(2)}$, son ortogonales entre sí:

$$n_i^{(1)}n^{(2)i} = 0. \tag{3}$$

En particular, si la ecuación (2) tiene raíces λ y λ^* complejas conjugadas, a las que corresponden vectores complejo-conjugados n_i y n_i^*, debe ser

$$n_i n^{i*} = 0. \tag{4}$$

El tensor A_{ik} se expresa en función de sus valores principales y de los correspondientes vectores propios por la fórmula

$$A_{ik} = \sum \lambda \frac{n_i n_k}{n_l n^l} \tag{5}$$

(con tal que ninguno de los $n_1 n^1$ sea igual a cero — véase más adelante).

Según sea el carácter de las raíces de la ecuación (2) pueden presentarse los siguientes tres casos distintos.

I) Los cuatro valores principales λ son reales. Entonces, son también reales los vectores n^i, y dado que todos ellos son ortogonales entre sí, tres de ellos deben poseer direcciones espaciales y uno una dirección temporal (se les puede normalizar, según esto, por las condiciones $n_l n^l = -1$ y $n_l n^l = 1$). Eligiendo las direcciones de los ejes de coordenadas a lo largo de estos vectores, reduciremos el tensor a la forma

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda^{(0)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(3)} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

II) La ecuación (2) tiene dos raíces reales ($\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$) y dos complejas conjugadas ($\lambda' \pm i\lambda''$). Los vectores complejo-conjugados n_i, n_i^* que corresponden a éstas los escribiremos en la forma $a_i \pm ib_i$; dado que están determinados tan sólo salvo un factor complejo arbitrario, es posible normalizarlos por la condición $n_i n^i = n_i^* n^{i*} = 1$. Teniendo también en cuenta (4), para los dos vectores reales encontramos las condiciones:

$$a_i a^i + b_i b^i = 0, \quad a_i b^i = 0, \quad a_i a^i - b_i b^i = 1,$$

de donde $a_i a^i = 1/2$, $b_i b^i = -1/2$, es decir, uno de estos vectores es temporal y el otro espacial †. Eligiendo los ejes de coordenadas a lo largo de los vectores a^i, b^i, $n^{(2)i}$, $n^{(3)i}$, el tensor se reduce [de acuerdo con (5)] a la forma

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda' & \lambda'' & 0 & 0 \\ \lambda'' & -\lambda' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(3)} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

III) Si el cuadrado de uno de los vectores n^i es igual a cero ($n_l n^l = 0$), este vector no se puede elegir como dirección de un eje de coordenadas. Sin embargo, cabe elegir uno de los planos x^0x^α de forma que el vector n^i se encuentra en él. Sea éste el plano x^0x^1. Entonces, de $n_l n^l = 0$ se sigue que $n^0 = n^1$, y en virtud de las ecuaciones (1) tenemos:

$$A_{00} + A_{01} = \lambda, \quad A_{10} + A_{11} = -\lambda,$$

es decir,

$$A_{00} = \lambda + \mu, \quad A_{11} = -\lambda + \mu, \quad A_{01} = -\mu,$$

donde μ es una cantidad no-invariante que cambia en los giros en el plano x^0x^1; mediante una rotación adecuada, es siempre posible conseguir que dicha cantidad sea real. Eligiendo los ejes x^2x^3 según los otros vectores (espaciales) $n^{(2)i}$, $n^{(3)i}$, reducimos el tensor a la forma

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu & -\mu & 0 & 0 \\ -\mu & -\lambda + \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(3)} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Este caso corresponde a la igualdad de las dos raíces ($\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(1)}$) de la ecuación (2).

Obsérvese que para el tensor físico energía-impulso T_{ik} de la materia que se mueve con velocidades menores que la velocidad de la luz, puede presentarse solamente el primer caso; esto se debe a que ha de existir siempre un sistema de referencia en el cual la corriente de energía de la materia, es decir, las componentes $T_{\alpha 0}$, es igual a cero. En cambio, para el tensor energía-impulso de las ondas electromagnéticas se da siempre el tercer caso, con $\lambda = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} = 0$ (cf. pág. 115); se puede demostrar que, de no ser así, existiría un sistema de referencia respecto del cual la corriente de energía sería mayor que el producto de su densidad por c.

§ 95. Las ecuaciones del campo gravitatorio

Podemos pasar ahora a deducir las ecuaciones del campo gravitatorio. Estas ecuaciones se obtienen a partir del principio de mínima acción $\delta(S_m + S_g) = 0$, donde S_g y S_m son las acciones del campo gravitatorio y de la materia, respectivamente. La variación afecta ahora al campo gravitatorio, esto es, a las cantidades g_{ik},

† Dado que sólo uno de los vectores puede ser temporal, de aquí se sigue que la ecuación (2) no puede tener dos pares de raíces complejas conjugadas.

Calculemos la variación δS_g. Se tiene

$$\delta \int R\sqrt{-g}\, d\Omega = \delta \int g^{ik} R_{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega$$
$$= \int \{R_{ik}\sqrt{-g}\, \delta g^{ik} + R_{ik} g^{ik} \delta \sqrt{-g} + g^{ik}\sqrt{-g}\, \delta R_{ik}\} d\Omega.$$

De la fórmula (86.4) se deduce:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{ik}\delta g^{ik};$$

y substituyendo este resultado en la expresión anterior se encuentra:

$$\delta \int R\sqrt{-g}\, d\Omega = \int (R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\, d\Omega + \int g^{ik}\, \delta R_{ik}\sqrt{-g}\, d\Omega. \quad (95.1)$$

Para calcular δR_{ik} observemos que si bien las cantidades Γ^i_{kl} no constituyen un tensor, sus variaciones $\delta\Gamma^i_{kl}$ sí lo forman. En efecto, $\Gamma^k_{il} A_k\, dx^l$ es el cambio que experimenta un vector debido a la translación [véase (85.5)] desde un punto P a un punto infinitamente próximo P'. Por consiguiente, $\delta\Gamma^k_{il} A_k\, dx^l$ es la diferencia entre dos vectores que resulta de dos corrimientos paralelos (uno con las Γ^i_{kl} no variadas y el otro con las Γ^i_{kl} variadas) desde el punto P al mismo punto P'. Pero la diferencia entre dos vectores aplicados al mismo punto es un vector; por consiguiente $\delta\Gamma^i_{kl}$ es un tensor.

Adoptemos un sistema de coordenadas localmente geodésico. Entonces en este punto todos los $\Gamma^i_{kl} = 0$. Mediante la expresión (92.10) de R_{ik} se tiene (recordando que las derivadas primeras de las g^{ik} son ahora iguales a cero)

$$g^{ik}\delta R_{ik} = g^{ik}\left\{\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^l_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k}\delta\Gamma^l_{il}\right\} = g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^k_{ik} = \frac{\partial w^l}{\partial x^l},$$

donde

$$w^l = g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\delta\Gamma^k_{ik}.$$

Dado que w^l es un vector, podemos escribir la relación obtenida, en un sistema arbitrario de coordenadas, en la forma

$$g^{ik}\delta R_{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\, w^l)$$

[substituyendo $\partial w^l/\partial x^l$ por $w^l{}_{;l}$ y utilizando (86.9)]. En consecuencia, la segunda integral del segundo miembro de (95.1) es igual a

$$\int g^{ik}\delta R_{ik}\sqrt{-g}\, d\Omega = \int \frac{\partial(\sqrt{-g}\, w^l)}{\partial x^l}\, d\Omega,$$

y según el teorema de Gauss se puede transformar en la integral de $\mathfrak{u}^l$ extendida a una hipersuperficie que rodee al volumen de cuatro dimensiones. Dado que las variaciones del campo son nulas en los límites de integración, este término es igual a cero. Así, la variación δS_g es igual a †

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,\delta\Omega. \tag{95.2}$$

Nótese que si hubiéramos partido de la expresión

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$$

de la acción del campo, hubiéramos obtenido entonces, como es fácil ver,

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int\left\{\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}\delta g^{ik}\,d\Omega.$$

Comparando este resultado con (95.2), se encuentra la siguiente relación:

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left\{\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}. \tag{95.3}$$

Para la variación de la acción correspondiente a la materia podemos escribir, de acuerdo con (94.5):

$$\delta S_m = \frac{1}{2c}\int T_{ik}\,\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega, \tag{95.4}$$

donde T_{ik} es el tensor energía-impulso de la materia (incluido el campo electromagnético). La interacción gravitatoria representa un papel tan sólo en el caso de cuerpos con una masa suficientemente grande (debido a la pequeñez de la constante de la gravitación). En el estudio del campo gravitatorio se trata así, por lo general, de cuerpos macroscópicos. De acuerdo con esto, es necesario adoptar generalmente para T_{ik} la expresión (94.9).

---

† Obsérvese aquí el siguiente hecho curioso. Si se calculara la variación $\delta\int R\sqrt{-g}\,d\Omega$ [con R_{ik} dado por (92.10)], considerando los Γ^i_{kl} como variables independientes y las g_{ik} como constantes, y se tuviera en cuenta luego la expresión (86.3) de los Γ^i_{kl}, obtendríamos, como se comprueba fácilmente, un resultado idénticamente nulo. Recíprocamente, la relación entre los Γ^i_{kl} y el tensor métrico se podría establecer imponiendo la condición de que se anule dicha variación.

El principio de mínima acción $\delta S_m + \delta S_g = 0$ nos conduce, por lo tanto, teniendo en cuenta las relaciones (95.2) y (95.4), a la igualdad:

$$\frac{c^3}{16\pi k}\int\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R-\frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega = 0,$$

de donde, dada la arbitrariedad de las δg^{ik}:

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}, \tag{95.5}$$

o, en componentes mixtas,

$$R_i^k-\frac{1}{2}\delta_i^k R = \frac{8\pi k}{c^4}T_i^k. \tag{95.6}$$

Éstas son precisamente las *ecuaciones del campo gravitatorio* buscadas — las ecuaciones fundamentales de la teoría de la relatividad general. Se las llama *ecuaciones de Einstein.*

Contrayendo (95.6) respecto de los índices i y k, se encuentra,

$$R = -\frac{8\pi k}{c^4}T; \tag{95.7}$$

($T = T_i^i$). Por consiguiente, las ecuaciones del campo se pueden escribir también en la forma

$$R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}T\right). \tag{95.8}$$

Obsérvese que las ecuaciones del campo gravitatorio no son lineales. El principio de superposición no es válido, pues, para los campos gravitatorios, en contraposición con el caso del campo electromagnético en la teoría de la relatividad especial.

Sin embargo, es necesario no perder de vista que, de hecho, se trata por lo gegeneral de campos gravitatorios débiles, para los que las ecuaciones del campo son lineales en primera aproximación (véase el párrafo siguiente); para tales campos, y en esta aproximación, el principio de superposición es válido.

En el espacio vacío $T_{ik} = 0$, y las ecuaciones del campo gravitatorio se reducen a

$$R_{ik} = 0. \tag{95.9}$$

Recordemos que esto no significa, en modo alguno, que en el vacío el espaciotiempo sea plano; para ello deberían cumplirse las condiciones más fuertes $R^i_{klm} = 0$.

El tensor energía-impulso del campo electromagnético tiene la propiedad de que $T_i^i = 0$ [véase (33.2)]. De (95.7) se sigue entonces que cuando existe un campo electromagnético y no existe masa alguna, la curvatura escalar del espacio-tiempo es igual a cero.

Conforme sabemos, la divergencia del tensor energía-impulso es nula:

$$T_{i;k}^k = 0 \tag{95.10}$$

Por consiguiente, la divergencia del primer miembro de la ecuación (95.6) debe ser también igual a cero. Esto se deduce directamente de la identidad (92.13)

Las ecuaciones (95.10) están así contenidas, esencialmente, en las ecuaciones del campo (95.6). Por otra parte, las ecuaciones (95.10), que expresan la ley de conservación de la energía y del impulso, contienen las ecuaciones del movimiento del sistema físico al que se refiere el tensor energía-impulso (es decir, las ecuaciones del movimiento de las partículas materiales o el segundo par de ecuaciones de Maxwell). Las ecuaciones del campo gravitatorio contienen también, por consiguiente, las ecuaciones de la materia que produce este campo. Las ecuaciones del campo electromagnético (ecuaciones de Maxwell), en cambio, contienen tan sólo la ecuación de conservación de la carga total (ecuación de continuidad), pero no las ecuaciones del movimiento de las cargas que lo producen.

Por lo tanto, en el caso del campo electromagnético, la distribución y movimiento de las cargas puede fijarse arbitrariamente, con tal que se conserve la carga total; si se fija la distribución de esta carga, el campo producido por ellas queda determinado por las ecuaciones de Maxwell. En un campo gravitatorio, en cambio, la distribución y el movimiento de la materia que lo produce no se pueden fijar de manera arbitraria — por el contrario, deben determinarse (resolviendo las ecuaciones del campo para condiciones iniciales dadas) a la vez que el campo producido por esta misma materia.

Hay que observar, sin embargo que las ecuaciones de Einstein del campo gravitatorio no determinan por completo la distribución y el movimiento de la materia. En efecto, dichas ecuaciones no incluyen las ecuaciones de estado de la materia, es decir, las ecuaciones que ligan la presión con la densidad. Estas ecuaciones deben darse junto con las ecuaciones del campo†.

---

† En realidad, una ecuación de estado liga entre sí no dos, sino tres cantidades termodinámicas, por ejemplo la presión, la densidad y la temperatura de la materia. Sin embargo, en las aplicaciones de la teoría de la gravitación ello carece de importancia, en general, ya que las ecuaciones de estado aproximadas que se emplean en este caso no dependen de hecho de la temperatura (como, por ejemplo, la ecuación $p = 0$ para la materia rarificada, la ecuación ultrarrelativista límite $p = \varepsilon/3$ para la materia fuertemente comprimida, etc.).

Las cuatro coordenadas x^i se pueden someter a una transformación arbitraria. Mediante esta transformación es posible fijar arbitrariamente cuatro de las diez componentes del tensor g_{ik}. Por lo tanto, hay sólo seis cantidades independientes g_{ik}. Además, las cuatro componentes de la cuadrivelocidad u^i, que aparece en el tensor energía-impulso de la materia, están ligadas entre sí por la relación $u^i u_i = 1$, de modo que sólo tres de ellas son independientes. Así, las diez ecuaciones del campo (95.5) determinan efectivamente las diez incógnitas, a saber, las seis componentes g_{ik}, las tres componentes u^i y la densidad ϵ/c^2 de la materia (o su presión p). Para el campo gravitatorio en el vacío quedan en total seis incógnitas (seis componentes g_{ik}) y, de acuerdo con esto, disminuye el número de ecuaciones independientes del campo: las diez ecuaciones $R_{ik} = 0$ están ligadas entre sí por las cuatro identidades (92.13).

Veamos algunas particularidades de la estructura de las ecuaciones de Einstein. Estas ecuaciones constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales entre derivadas parciales de segundo orden. Sin embargo, en las ecuaciones no intervienen las derivadas respecto del tiempo de todas las 10 componentes g_{ik}. En efecto, en la expresión (92.4) resulta evidente que las derivadas segundas respecto del tiempo aparecen tan sólo en las componentes $R_{0\alpha 0\beta}$ del tensor de curvatura, precisamente en el término de la forma $-(1/2)\ddot{g}_{\alpha\beta}$ (con un punto designamos la derivación respecto de x^0); en cambio, no encontramos en ellas las derivadas segundas de las componentes $g_{0\alpha}$ y g_{00} del tensor métrico. Es claro, por consiguiente, que el tensor R_{ik}, que se obtiene por contracción del tensor de curvatura, y con él también las ecuaciones (95.5), contienen las derivadas segundas respecto del tiempo de únicamente las seis componentes espaciales $g_{\alpha\beta}$.

Es también fácil ver que estas derivadas aparecen tan sólo en las ecuaciones-$\frac{\beta}{\alpha}$ (95.6), es decir, en las ecuaciones

$$R_\alpha^\beta - \frac{1}{2}\delta_\alpha^\beta R = -\frac{8\pi k}{c^4} T_\alpha^\beta. \tag{95.11}$$

En cambio, las ecuaciones $\frac{0}{0}$ y $\frac{0}{\alpha}$, esto es, las ecuaciones

$$R_0^0 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi k}{c^4} T_0^0, \quad R_\alpha^0 = \frac{8\pi k}{c^4} T_\alpha^0, \tag{95.12}$$

contienen tan sólo derivadas de primer orden respecto del tiempo. Cabe cerciorarse de ello comprobando que, al formar por contracción de R_{iklm} las cantidades R_α^0 y $R_0^0 - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}(R_0^0 - R_\alpha^\alpha)$, las componentes de la forma $R_{0\alpha 0\beta}$, en efecto, desaparecen. Todavía más fácil resulta ver que así es partiendo de la identidad (92.13), escribiéndola en la forma

$$\left(R_i^0 - \frac{1}{2}\delta_i^0 R\right)_{;\,0} = -\left(R_i^\alpha - \frac{1}{2}\delta_i^\alpha R\right)_{;\,\alpha} \tag{95.13}$$

($i = 0, 1, 2, 3$). Las derivadas respecto del tiempo de orden más elevado que intervienen en el segundo miembro de esta igualdad son las de segundo orden (que figuran en las propias cantidades R_i^a, R). Dado que (95.13) es una identidad, también su primer miembro debe contener, por consiguiente, derivadas respecto del tiempo de orden no superior al segundo. Pero en él figura ya de manera explícita una derivada respecto del tiempo; por lo tanto, las propias expresiones $R_i^0 - \frac{1}{2}\delta_i^0 R$ pueden sólo contener derivadas con relación al tiempo de orden no superior al primero.

Además, los primeros miembros de las ecuaciones (95.12) tampoco contienen las derivadas primeras $\dot{g}_{0\alpha}$ y $\dot{g}_{00}$ (sino solamente las derivadas $\dot{g}_{\alpha\beta}$). En efecto, de todos los $\Gamma_{i,\,kl}$ sólo $\Gamma_{\alpha,\,00}$ y $\Gamma_{0,00}$ contienen tales derivadas, y estas componentes, a su vez, intervienen únicamente en las componentes del tensor de curvatura de la forma $R_{0\alpha0\beta}$, que, conforme ya sabemos, desaparecen al formar los primeros miembros de las ecuaciones (95.12).

Si interesa resolver las ecuaciones de Einstein para condiciones iniciales dadas (respecto del tiempo), se plantea la cuestión de para cuántas cantidades se pueden dar arbitrariamente las distribuciones iniciales en el espacio.

Las condiciones iniciales para las ecuaciones de segundo orden deben incluir las distribuciones iniciales tanto de las propias magnitudes que se derivan, como de sus derivadas primeras respecto del tiempo. Sin embargo, dado que en el presente caso las ecuaciones contienen derivadas segundas de tan sólo las seis componentes $g_{\alpha\beta}$, en las condiciones iniciales no se pueden dar arbitrariamente todos los valores g_{ik} y $\dot{g}_{ik}$. Así, es posible dar (junto con la velocidad y densidad de la materia) los valores iniciales de las funciones $g_{\alpha\beta}$ y $\dot{g}_{\alpha\beta}$, con lo cual, y a partir de las 4 ecuaciones (95.12) se determinan los valores iniciales admisibles $g_{0\alpha}$ y g_{00}; en las ecuaciones (95.11), en cambio, subsisten todavía como arbitrarios los valores iniciales $\dot{g}_{0\alpha}$.

Sin embargo, entre las condiciones iniciales dadas de esta manera figuran también funciones cuyo carácter arbitrario se debe simplemente a la arbitrariedad en la elección del cuadrisistema de coordenadas. Con todo, sólo tiene sentido físico el número de funciones arbitrarias « físicamente diferentes », número que no es posible disminuir mediante la elección del sistema de referencia, cualquiera que fuese. Por consideraciones físicas es fácil ver que este número es igual a 8: las condiciones iniciales deben fijar la distribución de la densidad de materia y las tres componentes de su velocidad y, además, otras cuatro magnitudes que caractericen el campo gravitatorio libre (no vinculado con la materia; véase más adelante, § 102); para el campo gravitatorio libre en el vacío, como condiciones iniciales deben darse solamente estas últimas cuatro magnitudes.

Problema

Escribir las ecuaciones de un campo gravitatorio constante expresando todas las operaciones de derivación según las coordenadas espaciales en forma de derivadas covariantes en el espacio con métrica $\gamma_{\alpha\beta}$ (84.7).

Solución. Introduzcamos las notaciones $g_{00} = h$, $g_{0\alpha} = -hg_\alpha$ (88.11) y la velocidad tridimensional v^α (89.10). En lo que sigue todas las operaciones de subir y bajar índices, al igual que la

derivación covariante, se efectúan en el espacio tridimensional con métrica $\gamma_{\alpha\beta}$ y se aplican a los vectores tridimensionales g_α, v^α y al escalar tridimensional h.

Las ecuaciones buscadas deben ser invariantes respecto de la transformación

$$x^\alpha \to x^\alpha, \quad x^0 \to x^0 + f(x^\alpha), \tag{1}$$

que no cambia el carácter estacionario del campo. Pero en una transformación de este tipo, como es fácil ver (véase la nota de la pág. 346) $g_\alpha \to g_\alpha - \partial f/\partial x^\alpha$, mientras que el escalar h y el tensor $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + hg_\alpha g_\beta$ no cambian. Es claro, por ello, que las ecuaciones buscadas, cuando se expresan en función de $\gamma_{\alpha\beta}$, h y g_α, sólo pueden contener g_α en forma de combinación de derivadas que constituyen un tensor antisimétrico tridimensional,

$$f_{\alpha\beta} = g_{\beta;\alpha} - g_{\alpha;\beta} = \frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta}, \tag{2}$$

invariante respecto de dicha transformación. Teniendo en cuenta esta circunstancia, es posible simplificar considerablemente los cálculos suponiendo (después de calcular todas las derivadas que aparecen en R_{ik}) $g_\alpha = 0$ y $g_{\alpha;\beta} + g_{\beta;\alpha} = 0$ †.)

Los símbolos de Christoffel son:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^\alpha h_{;\alpha}, \quad \Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2} h^{;\alpha},$$

$$\Gamma^0_{\alpha 0} = \frac{1}{2h} h_{;\alpha} + \frac{h}{2} g^\beta f_{\alpha\beta} + \ldots, \quad \Gamma^\alpha_{0\beta} = \frac{h}{2} f_\beta{}^\alpha - \tfrac{1}{2} g_\beta h^{;\alpha},$$

$$\Gamma^0_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha}\right) - \frac{1}{2h}(g_\alpha h_{;\beta} + g_\beta h_{;\alpha}) + g_\gamma \lambda^\gamma_{\alpha\beta} + \ldots,$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \lambda^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{h}{2}(g_\beta f_\gamma{}^\alpha + g_\gamma f_\beta{}^\alpha) + \ldots$$

Los términos que se han omitido aquí (y en vez de los cuales aparecen los puntos supensivos) son cuadráticos en las componentes del vector g_α: es evidente que estos términos desaparecerán al hacer $g_\alpha = 0$ después de efectuar las derivaciones en R_{ik} (92.10). En los cálculos se han utilizado las fórmulas (84.9), (84.12-13); $\lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ son los símbolos de Christoffel tridimensionales construidos a partir de la métrica $\gamma_{\alpha\beta}$.

El tensor T_{ik} se calcula según la fórmula (94.9) con u^i dada por (88.14) (suponiendo también en todo ello $g_\alpha = 0$).

---

† Para evitar interpretaciones erróneas subrayaremos que este procedimiento simplificado de efectuar los cálculos que conduce a las ecuaciones correctas del campo, sería inadecuado para calcular una componente cualquiera R_{ik}, dado que éstas no son invariantes respecto de la transformación (1). En las ecuaciones (3)-(5) aparecen en los primeros miembros aquellas componentes del tensor de Ricci a las que efectivamente son iguales las expresiones escritas. Estas componentes son invariantes respecto de la transformación (1).

Como resultado de los cálculos, de (95.8) se deducen las siguientes ecuaciones

$$\frac{1}{h} R_{00} = \frac{1}{\sqrt{h}} (\sqrt{h})^{;\alpha}_{;\alpha} + \frac{h}{4} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} = \frac{8\pi k}{c^4} \left(\frac{\varepsilon + p}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} - \frac{\varepsilon - p}{2} \right), \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{h}} R^{\alpha}_{0} = -\frac{\sqrt{h}}{2} f^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - \frac{3}{2} f^{\alpha\beta} (\sqrt{h})_{;\beta} = \frac{8\pi k}{c^4} \frac{p + \varepsilon}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} \frac{v^{\alpha}}{c}, \tag{4}$$

$$R^{\alpha\beta} = P^{\alpha\beta} + \frac{h}{2} f^{\alpha\gamma} f^{\beta}{}_{\gamma} - \frac{1}{\sqrt{h}} (\sqrt{h})\ ;\alpha;\beta =$$

$$= \frac{8\pi k}{c^4} \left[\frac{(p + \varepsilon)\, v^{\alpha} v^{\beta}}{c^2 \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2} \right)} + \frac{\varepsilon - p}{2} \gamma^{\alpha\beta} \right]. \tag{5}$$

Aquí $P^{\alpha\beta}$ es el tensor tridimensional construido con las componentes $\gamma_{\alpha\beta}$ de la misma manera que R^{ik} se construye a partir de g_{ik} †).

§ 96. La ley de Newton

En las ecuaciones del campo gravitatorio que acabamos de obtener llevaremos a cabo ahora el paso al límite representado por la mecánica no relativista. Conforme se dijo en el § 87, la hipótesis de que las velocidades de todas las partículas son pequeñas exige que también el campo gravitatorio sea débil.

La componente g_{00} del tensor métrico (la única que necesitamos) se determinó, para el caso límite que estamos considerando, en el § 87:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}.$$

Además, para las componentes del tensor energía-impulso podemos utilizar la expresión (35.4) $T^{k}_{i} = \mu c^2 u_i u^k$, donde μ es la densidad de masa del cuerpo (suma de las masas en reposo de las partículas que se encuentran en la unidad de volumen;

---

† Las ecuaciones de Einstein pueden también escribirse de manera análoga en el caso general en que la métrica depende del tiempo. Junto con las derivadas espaciales aparecerán también en ellas las derivadas de las cantidades $\gamma_{\alpha\beta}$, g_{α}, h respecto del tiempo. Véase *A. L. Zel'manov*, DAN SSSR **107**, 815 (1956).

para abreviar, prescindimos del subíndice 0 en μ). En cuanto a la cuadrivelocidad u^i, dado que también, claro está, el movimiento macroscópico se considera pequeño, hay que prescindir de todas sus componentes espaciales y conservar únicamente la componente temporal, esto es, debemos hacer $u^\alpha = 0$, $u^0 = u_0 = 1$. De todas las componentes T_i^k subsiste así tan sólo

$$T_0^0 = \mu c^2. \tag{96.1}$$

El escalar $T = T_i^i$ será igual a este mismo valor μc^2.

Escribamos las ecuaciones del campo en la forma (95.8):

$$R_i^k = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k T\right);$$

para $i = k = 0$

$$R_0^0 = \frac{4\pi k}{c^2}\mu.$$

Es fácil comprobar que, en la aproximación que estamos considerando, todas las demás ecuaciones se reducen idénticamente a cero.

Para calcular R_0^0 mediante la fórmula general (92.10), obsérvese que los términos que contienen las derivadas de las cantidades Γ_{kl}^i son, en cualquier caso, cantidades de segundo orden. Los términos que contienen derivadas respecto de $x^0 = ct$ son pequeños (comparados con los términos con derivadas respecto de las coordenadas x^α), ya que contienen una potencia más de $1/c$. Queda así tan sólo $R_{00} = R_0^0 = \partial\Gamma_{00}^\alpha/\partial x^\alpha$. Substituyendo

$$\Gamma_{00}^\alpha \simeq -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\beta} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha},$$

se encuentra

$$R_0^0 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^{\alpha 2}} \equiv \frac{1}{c^2}\Delta\phi.$$

Las ecuaciones del campo dan así,

$$\Delta\phi = 4\pi k\mu. \tag{96.2}$$

Ésta es también la ecuación del campo gravitatorio en mecánica no relativista. Es del todo análoga a la ecuación de Poisson (36.4) para el potencial eléctrico, con la única diferencia que en vez de la densidad de carga aparece aquí la densidad de masa multiplicada por $-k$. Por lo tanto, podemos escribir sin más la solución general de la ecuación (96.2), por analogía con (36.8), en la forma

$$\phi = -k\int\frac{\mu dV}{R} \tag{96.3}$$

Esta fórmula determina el potencial del campo gravitatorio de una distribución de masa arbitraria en la aproximación no relativista.

En particular, para el potencial del campo de una única partícula de masa m tenemos:

$$\phi = -\frac{km}{R} \tag{96.4}$$

y, en consecuencia, la fuerza $F = -m' \frac{\partial \phi}{\partial R}$, que actúa en este campo sobre otra partícula (de masa m'), es igual a

$$F = -\frac{kmm'}{R^2}. \tag{96.5}$$

Ésta es la conocida *ley de la gravitación de Newton.*

La energía potencial de una partícula en un campo gravitatorio es igual a su masa multiplicada por el potencial del campo, de manera análoga a como la energía potencial en un campo eléctrico es igual al producto de la carga por el potencial del campo. Por consiguiente, por analogía con (37.1), podemos escribir la energía potencial de una distribución de masa arbitraria en la forma:

$$U = \frac{1}{2} \int \mu \phi \, dV. \tag{96.6}$$

Para el potencial newtoniano de un campo gravitatorio constante a gran distancia de las masas que lo producen podemos dar un desarrollo análogo al obtenido en los §§ 40-41 para el campo electrostático. Elijamos como origen de coordenadas el centro de masa. Entonces la integral $\int \mu \mathbf{r} \, dV$, que es análoga al momento dipolar de un sistema de cargas, se anula idénticamente. Así, en contraste con el caso del campo electrostático, en el campo gravitatorio podemos siempre excluir el « término dipolar ». En consecuencia, el desarrollo del potencial ϕ tiene la forma:

$$\phi = -k \left\{ \frac{M}{R_0} + \frac{1}{6} D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} + \cdots \right\}, \tag{96.7}$$

donde $M = \int \mu \, dV$ es la masa total del sistema, y las cantidades

$$D_{\alpha\beta} = \int \mu (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \, dV \tag{96.8}$$

se pueden llamar componentes del *tensor momento cuadripolar másico* †. Éstas están ligadas con el *tensor momento de inercia* ordinario

$$J_{\alpha\beta} = \int \mu (r^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta)\, dV$$

por las relaciones evidentes

$$D_{\alpha\beta} = J_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} - 3J_{\alpha\beta}. \tag{96.9}$$

La determinación del potencial newtoniano correspondiente a una distribución dada de masas es el objeto de una de las ramas de la física matemática; la exposición de los diferentes métodos que hacen posible aquella determinación no es tema del presente libro. Con carácter de información general, daremos aquí únicamente las fórmulas para el potencial del campo gravitatorio producido por un elipsoide homogéneo††.

Sea

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > b > c. \tag{96.10}$$

la ecuación de la superficie del elipsoide. El potencial del campo en un punto arbitrario exterior al cuerpo viene dado entonces por la siguiente fórmula:

$$\phi = -\pi\mu abck \int_\xi^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right) \frac{ds}{R_s} \tag{96.11}$$

$$R_s = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)},$$

donde ξ es la raíz positiva de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1. \tag{96.12}$$

El potencial del campo dentro del elipsoide resulta de la fórmula

$$\phi = -\pi\mu abck \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right) \frac{ds}{R_s}, \tag{96.13}$$

---

† Todos los índices α, β se han escrito aquí como subíndices, sin distinguir entre componentes co- y contravariantes, de acuerdo con el hecho de que todas las operaciones se efectúan en el espacio newtoniano ordinario (euclídeo).

†† La deducción de estas fórmulas se puede encontrar en el libro de L. N. Sretenskii, *Teoriia n'iutonovskogo notentsiala (Teoría del potencial newtoniano)*, Gostejizdat, 1946.

que difiere de (96.11) en que el límite inferior se substituye por cero; obsérvese que esta expresión es una función cuadrática de las coordenadas x, y, z.

La energía gravitatoria del cuerpo se obtiene, según (96.6), integrando la expresión (96.13) en el volumen del elipsoide. Esta integral se puede calcular siguiendo métodos elementales †, y da:

$$U = \frac{3km^2}{8}\int_0^\infty \left[\frac{1}{5}\left(\frac{a^2}{a^2+s}+\frac{b^2}{b^2+s}+\frac{c^2}{c^2+s}\right)-1\right]\frac{ds}{R_s}$$

$$= \frac{3km^2}{8}\int_0^\infty \left[\frac{2}{5}\,sd\left(\frac{1}{R_s}\right)-\frac{2}{5}\frac{ds}{R_s}\right] \qquad (96.14)$$

$\left(m = \frac{4\pi}{3}\,abc\,\mu$ es la masa total del cuerpo$\right)$; integrando el primer término por partes, obtenemos, finalmente:

$$U = -\frac{3km^2}{10}\int_0^\infty \frac{ds}{R_s}. \qquad (96.15)$$

Todas las integrales que aparecen en las fórmulas (96.11)-(96.14) se pueden expresar en función de integrales elípticas de primer y segundo género. Para elipsoides de rotación, dichas integrales se expresan como combinación de funciones elementales. En particular, la energía gravitatoria de un elipsoide de rotación achatado ($a = b > c$) es:

$$U = -\frac{3km^2}{5\sqrt{a^2-c^2}}\arccos\frac{c}{a}, \qquad (96.16)$$

y para un elipsoide de rotación alargado ($a > b = c$) se tiene:

$$U = -\frac{3km^2}{5\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arcosh}\frac{a}{c}. \qquad (96.17)$$

Para una esfera ($a = c$) ambas fórmulas dan el valor $U = -3km^2/5a$, que, claro está, se puede obtener también con métodos elementales ††.

---

† La manera más simple de efectuar la integración de los cuadrados x^2, y^2, z^2 es aplicar la substitución $x = ax'$, $y = by'$, $z = cz'$, que reduce la integral extendida al volumen del elipsoide a una integral extendida al volumen de la esfera de radio unidad.

†† El potencial del campo en el interior de una esfera homogénea de radio a es:

$$\phi = -2\pi k\mu\left(a^2-\frac{r^2}{3}\right).$$

PROBLEMA

Determinar la forma de equilibrio de una masa gravitatoria de líquido homogénea que gira como un todo.

Solución. La condición de equilibrio es la constancia sobre la superficie del cuerpo de la suma del potencial gravitatorio y el potencial de las fuerzas centrífugas:

$$\phi - \frac{\Omega^2}{2}(x^2+y^2) = \text{const.}$$

(Ω es la velocidad angular; el eje de rotación es el eje Z). La forma buscada es la de un elipsoide de rotación achatado. Para determinar sus parámetros, substituyamos (96.13) en la condición de equilibrio y eliminemos z^2 mediante la ecuación (96.10); esto da:

$$(x^2+y^2)\left[\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)^2\sqrt{c^2+s}} - \frac{\Omega^2}{2\pi\mu k a^2 c} - \frac{c^2}{a^2}\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)(c^2+s)^{3/2}}\right] = \text{const},$$

de donde se sigue que la expresión entre paréntesis rectos debe anularse. Efectuando la integración, se obtiene:

$$\frac{(a^2+2c^2)c}{(a^2-c^2)^{3/2}} \arccos\frac{c}{a} - \frac{3c^2}{a^2-c^2} = \frac{\Omega^2}{2\pi k\mu} = \frac{25}{6}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\frac{M^2\mu^{1/3}}{m^{10/3}k}\left(\frac{c}{a}\right)^{4/3}$$

($M = \frac{2}{5}ma^2\Omega$ es el momento cinético del cuerpo respecto del eje Z), ecuación que determina la razón de semiejes c/a para valores dados de Ω o M. La dependencia de la razón c/a respecto de M es invertible; c/a crece con monotonía al crecer M.

Sin embargo, la forma simétrica que acabamos de hallar resulta ser estable (respecto de pequeñas perturbaciones) únicamente para valores no demasiado grandes de M†. La estabilidad se pierde para $M = 2{,}89\,k^{1/2}m^{5/3}\mu^{-1/6}$ (cuando $c/a = 0{,}58$). Si M sigue creciendo, la forma de equilibrio pasa a ser la de un elipsoide general con valores de b/a y c/a que decrecen gradualmente (a partir de 1 y a partir de 0,58, respectivamente). Esta forma, a su vez, pasa a ser inestable para $M = 3{,}84\,k^{1/2}m^{5/3}\mu^{-1/6}$ (cuando $a:b:c = 1:0{,}43:0{,}34$).

§ 97. Campo gravitatorio central

Consideremos un campo gravitatorio central. Cualquier distribución de materia que presente simetría esférica puede producir un campo de esta naturaleza; para que así sea, claro está, no sólo la distribución, sino también el movimiento de la materia deben presentar dicho tipo de simetría, es decir, la velocidad en cada punto debe tener la dirección del radio que pasa por él.

La simetría central del campo significa que la métrica de espacio-tiempo, esto es, la expresión del intervalo ds, debe ser la misma para todos los puntos situados a igual distancia del centro. En el espacio euclídeo esta distancia es igual al radio vector; en un espacio no euclídeo, como el que se tiene en presencia de un campo

† Referencias bibliográficas acerca de esta cuestión pueden encontrarse en el libro de H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cap. XII.

gravitatorio, no hay, en cambio, ninguna cantidad que tenga todas las propiedades del radio vector euclídeo (por ejemplo, el ser igual, a la vez, a la distancia desde el centro y a la longitud de la circunferencia dividida por 2π). Por lo tanto, la elección de un « radio vector » es ahora arbitraria.

Si utilizamos coordenadas espaciales « esféricas » r, θ, ϕ, la expresión más general con simetría esférica para ds^2 es

$$ds^2 = h(r, t)\, dr^2 + k(r, t)\,(\operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2 + d\theta^2) + l(r, t)\, dt^2 + a(r, t)\, dr\, dt, \qquad (97.1)$$

donde a, h, k, l son ciertas funciones del « radio vector » r y del « tiempo » t. Pero debido a la arbitrariedad en la elección del sistema de referencia en teoría de la relatividad general, podemos todavía someter las coordenadas a una transformación cualquiera que no destruya la simetría central de ds^2; esto significa que podemos pasar de las coordenadas r y t a otras r', t' mediante las fórmulas

$$r = f_1(r', t'), \quad t = f_2(r', t'),$$

donde f_1, f_2 son funciones cualesquiera de las nuevas coordenadas r', t'.

Valiéndonos de esta posibilidad, eligiremos la coordenada r y el tiempo t de manera tal que, en primer lugar, el coeficiente $a(r, t)$ de $dr\, dt$ en la expresión de ds^2 se anule y, en segundo lugar, el coeficiente $k(r, t)$ se reduzca simplemente a $-r^2$ †. Esta última condición implica que el radio vector r se defina de tal manera que la longitud de la circunferencia con centro en el origen de coordenadas sea igual a $2\pi r$ (el elemento de arco de circunferencia en el plano $\theta = \pi/2$ es igual a $dl = r\, d\phi$). Es conveniente escribir las cantidades h y l en forma exponencial, a saber, $-e^{\lambda}$ y $c^2 e^{\nu}$, respectivamente, donde λ y ν son ciertas funciones de r y t. Obtenemos así la siguiente expresión para ds^2:

$$ds^2 = e^{\nu} c^2\, dt^2 - r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2) - e^{\lambda}\, dr^2. \qquad (97.2)$$

Llamando x^0, x^1, x^2, x^3, respectivamente, a las coordenadas ct, r, θ, ϕ, tenemos para las componentes no nulas del tensor métrico las expresiones

$$g_{00} = e^{\nu}, \quad g_{11} = -e^{\lambda}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \operatorname{sen}^2\theta,$$

Evidentemente,

$$g^{00} = e^{-\nu}, g^{11} = -e^{-\lambda}, \quad g^{22} = -r^{-2}, \quad g^{33} = -r^{-2}(\operatorname{sen}^{-2}\theta)$$

---

† Estas condiciones no determinan unívocamente la elección de la coordenada temporal. En efecto, es posible someterla todavía a una transformación arbitraria $t = f(t')$ que no contenga r.

Con estos valores es fácil calcular los Γ^i_{kl} a partir de la fórmula (86.3). El cálculo conduce a las siguientes expresiones (el apóstrofo significa derivación respecto de r, mientras que un punto encima de un símbolo significa derivación respecto de ct):

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2}, \qquad \Gamma^0_{10} = \frac{\nu'}{2}, \qquad \Gamma^2_{33} = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta,\\
&\Gamma^0_{11} = \frac{\dot\lambda}{2}e^{\lambda-\nu}, \qquad \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda}, \qquad \Gamma^1_{00} = \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda},\\
&\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\theta, \qquad \Gamma^0_{00} = \frac{\dot\nu}{2}.\\
&\Gamma^1_{10} = \frac{\dot\lambda}{2}, \qquad \Gamma^1_{33} = -r\operatorname{sen}^2\theta e^{-\lambda}.
\end{aligned} \tag{97.3}$$

Todas las demás componentes (excepto aquellas que difieren de las que acabamos de escribir en la permutación de los índices k y l) son iguales a cero.

Para obtener las ecuaciones de la gravitación debemos calcular las componentes del tensor R^i_k de acuerdo con la fórmula (92.10). Un simple cálculo conduce a las ecuaciones siguientes:

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^1_1 = -e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}, \tag{97.4}$$

$$\begin{aligned}
\frac{8\pi k}{c^4}T^2_2 = \frac{8\pi k}{c^4}T^3_3 = &-\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu''+\frac{\nu'^2}{2}+\frac{\nu'-\lambda'}{r}-\frac{\nu'\lambda'}{2}\right)+\\
&+\frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\ddot\lambda+\frac{\dot\lambda^2}{2}-\frac{\dot\lambda\dot\nu}{2}\right),
\end{aligned} \tag{97.5}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^0_0 = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}\right)+\frac{1}{r^2}, \tag{97.6}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^1_0 = -e^{-\lambda}\frac{\dot\lambda}{r} \tag{97.7}$$

(las demás componentes de la ecuación (95.6) se anulan idénticamente.) Las componentes del tensor energía-impulso se pueden expresar mediante (94.9) en función de la densidad de energía de la materia ϵ, su presión p y velocidad radial v.

Las ecuaciones del campo gravitatorio (97.4-7) se pueden integrar exactamente en el caso, muy importante, de un campo central en el vacío, esto es, fuera de las masas que producen el campo (K. Schwarzschild, 1916). Igualando a cero el tensor energía-impulso, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}=0, \tag{97.8}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}=0, \tag{97.9}$$

$$\dot{\lambda}=0 \tag{97.10}$$

[no escribimos la cuarta ecuación, esto es, la ecuación (97.5), por ser consecuencia de las otras tres].

De (97.10) se sigue, sin más, que λ no depende del tiempo. Por otra parte, sumando las ecuaciones (97.8) y (97.9), se encuentra $\lambda'+\nu'=0$, esto es;

$$\lambda+\nu=f(t), \tag{97.11}$$

donde $f(t)$ es función sólo del tiempo. Pero, al elegir el intervalo ds^2 en la forma (97.2), queda todavía la posibilidad de aplicar al tiempo una transformación arbitraria de la forma $t=f(t')$. Una tal transformación equivale a sumar a ν una función arbitraria del tiempo, y mediante ella podemos siempre conseguir que se anule la función $f(t)$ en (97.11). Sin pérdida de la generalidad cabe así hacer $\lambda+\nu=0$, esto es, $\lambda=-\nu$. Obsérvese que el campo gravitatorio central en el vacío resulta automáticamente estático.

La ecuación (97.9) se integra fácilmente y da:

$$e^{-\lambda}=e^{\nu}=1+\frac{\text{const}}{r}. \tag{97.12}$$

Como debe ser, en el infinito ($r\to\infty$), $e^{-\lambda}=e^{\nu}=1$, esto es, lejos de los cuerpos gravitatorios la métrica pasa automáticamente a ser galileana. La constante se expresa fácilmente en función de la masa del cuerpo imponiendo la condición de que a grandes distancias, donde el campo es débil, valga la ley de Newton.† Con

† Para el campo dentro de una cavidad esférica en una distribución de materia que presente dicha simetría debe ser const = 0 ya que en caso contrario la métrica presentaría una singularidad en $r=0$. Así, pues, la métrica dentro de tal cavidad resulta automáticamente galileana, es decir, en la cavidad no existe campo gravitatorio (como en la teoría newtoniana).

otras palabras, debe tenerse $g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$, donde el potencial ϕ tiene su valor newtoniano (96.4), $\phi = -\frac{km}{r}$ (m es la masa total del cuerpo que produce el campo).

De aquí se sigue, evidentemente, que $\text{const} = -\frac{2km}{c^2}$. Esta magnitud tiene las dimensiones de una longitud y ha recibido el nombre de *radio gravitatorio* del cuerpo, r_g:

$$r_g = \frac{2\,km}{c^2} \tag{97.13}$$

Obtenemos, así, finalmente, para el intervalo ds,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2 dt^2 - r^2(\operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}. \tag{97.14}$$

Esta expresión determina completamente el campo gravitatorio producido en el vacío por una distribución cualquiera de masas que presente simetría central. Hay que subrayar que esta solución vale, no sólo para masas en reposo, sino también para masas en movimiento, con tal que este movimiento presente también la simetría central (por ejemplo, vibraciones simétricas respecto de un punto). Obsérvese que la métrica (97.14) depende sólo de la masa total del cuerpo que crea el campo, al igual que en el problema análoga de la teoría newtoniana.

La métrica espacial está determinada por la expresión del elemento de distancia espacial:

$$dl^2 = r^2(\operatorname{sen}^2\theta \cdot d\phi^2 + d\theta^2) + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}. \tag{97.15}$$

El sentido geométrico de la coordenada r viene determinado por el hecho de que en la métrica (97.15) la longitud de una circunferencia de centro en el centro del campo es igual a $2\pi r$. En cambio, la distancia entre dos puntos r_1 y r_2 sobre un mismo radio viene dada por la integral

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} > r_2 - r_1. \tag{97.16}$$

Además, resulta también que $g_{00} \leqslant 1$. Teniendo en cuenta la fórmula (84.1) $d\tau = \sqrt{g_{00}}\, dt$ que define el tiempo propio, se deduce de aquí que

$$d\tau \leqslant dt. \tag{97.17}$$

El signo de igualdad vale sólo en el infinito, donde t coincide con el tiempo propio. Por lo tanto, a distancias finitas de las masas se presenta una « dilatación » del tiempo comparado con el tiempo en el infinito.

Finalmente, daremos una expresión aproximada de ds^2 válida a gran distancia del origen de coordenadas:

$$ds^2 = ds_0^2 - \frac{2km}{c^2 r}(dr^2 + c^2\,dt^2). \tag{97.18}$$

El segundo término equivale a una pequeña corrección a la métrica galileana ds_0^2. A distancias grandes de las masas que lo producen, todo campo se comporta como un campo central. Por consiguiente, (97.18) determina la métrica a gran distancia de un sistema cualquiera de cuerpos.

Ciertas consideraciones generales cabe hacer también acerca del comportamiento de un campo gravitatorio central en el interior de las masas que lo producen. De la ecuación (97.6) se deduce que para $r \to 0$, λ debe también tender a cero, por lo menos como r^2; de no ser así, el segundo miembro de la ecuación tendería a infinito para $r \to 0$, esto es, T_0^0 presentaría un punto singular en $r = 0$, lo que es físicamente absurdo. Integrando formalmente (97.6) con la condición en el límite $\lambda|_{r=0} = 0$, obtenemos:

$$\lambda = -\ln\left\{1 - \frac{8\pi k}{c^4 r}\int_0^r T_0^0 r^2\,dr\right\}. \tag{97.19}$$

Dado que $T_0^0 = e^{-\nu} T_{00} \geqslant 0$, es claro que $\lambda \geqslant 0$, esto es,

$$e^{\lambda} \geqslant 1. \tag{97.20}$$

Además, restando miembro a miembro la ecuación (97.6) de la (97.4), se obtiene:

$$\frac{e^{-\lambda}}{r}(\nu' + \lambda') = \frac{8\pi k}{c^4}(T_0^0 - T_1^1) = \frac{(\epsilon + p)\left(1 + \dfrac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} \geqslant 0,$$

es decir, $\nu' + \lambda' \geqslant 0$. Pero para $r \to \infty$ (lejos de las masas) la métrica pasa a ser galileana, esto es, $\nu \to 0$, $\lambda \to 0$. Por lo tanto, de $\nu' + \lambda' \geqslant 0$ se deduce que en todo el espacio

$$\nu + \lambda \leqslant 0. \tag{97.21}$$

Dado que $\lambda \geqslant 0$, se sigue entonces que $\nu \leqslant 0$, o sea

$$e^{\nu} \leqslant 1. \tag{97.22}$$

Las desigualdades a que hemos llegado prueban que las propiedades (97.16) y (97.17) de la métrica espacial y de la marcha de los relojes en un campo central en

el vacío son también válidas para el campo en el interior de las masas gravitatorias.

Si el campo gravitatorio se debe a un cuerpo esférico de « radio » a, para $r>a$ tendremos $T_0^0 = 0$. En aquellos puntos en que $r>a$, la fórmula (97.19) nos da, por consiguiente,

$$\lambda = -\ln\left\{1 - \frac{8\pi k}{c^4 r}\int_0^a T_0^0 r^2\, dr\right\}.$$

Por otra parte, podemos aplicar aquí la expresión (97.14) correspondiente al vacío, según la cual

$$\lambda = -\ln\left(1 - \frac{2km}{c^2 r}\right).$$

Igualando las dos expresiones, se encuentra la fórmula

$$m = \frac{4\pi}{c^2}\int_0^a T_0^0 r^2\, dr, \tag{97.23}$$

que da la masa total del cuerpo en función de su tensor energía-impulso.

PROBLEMAS

1. Determinar la curvatura espacial en un campo gravitatorio central en el vacío.

Solución. Las componentes del tensor de curvatura espacial $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ se pueden expresar en función de las componentes del tensor $P_{\alpha\beta}$ (y de $\gamma_{\alpha\beta}$), de modo que es suficiente calcular las componentes del tensor $P_{\alpha\beta}$ (véase problema 1, § 92). El tensor $P_{\alpha\beta}$ se expresa en función de $\gamma_{\alpha\beta}$ de la misma manera que R_{ik} en función de g_{ik}. Con los valores de las $\gamma_{\alpha\beta}$ dados por (97.15) obtenemos, después de algunos cálculos, los siguientes valores de las componentes del tensor:

$$P_\theta^\theta = P_\phi^\phi = \frac{r_g}{2r^3}. \quad P_r^r = -\frac{r_g}{r^3},$$

y $P_\beta^\alpha = 0$ para $\alpha \neq \beta$, de forma que el tensor P_α^β es diagonal. Obsérvese que P_θ^θ, P_ϕ^ϕ son positivas, mientras que P_r^r es negativa, y que $P \equiv P_\alpha^\alpha = 0$.

Según la fórmula obtenida en el problema 1 del § 92, se encuentra:

$$P_{r\theta r\theta} = (P_r^r + P_\theta^\theta)\gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta} = -P_\phi^\phi\gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta},$$

$$P_{r\phi r\phi} = -P_\theta^\theta\gamma_{rr}\gamma_{\phi\phi}, \quad P_{\theta\phi\theta\phi} = -P_r^r\gamma_{\theta\theta}\gamma_{\phi\phi}.$$

De aquí se sigue (véase la nota en la pág. 368) que para «planos» perpendiculares a los radios, la curvatura de Gauss es

$$K = \frac{P_{\theta\phi\theta\phi}}{\gamma_{\theta\theta}\gamma_{\phi\phi}} = -P_r^r > 0$$

(esto significa que en el caso de triángulos pequeños trazados sobre una porción de «plano» cerca de su intersección con el radio perpendicular al mismo, la suma de los ángulos es mayor que π). En cambio, para «planos» que pasan por el centro, la curvatura de Gauss es $K < 0$; esto significa que la suma de los ángulos de triángulos pequeños trazados en uno cualquiera de estos «planos» es menor que π (hay que subrayar, sin embargo, que esta última propiedad no es válida para triángulos que contienen el centro — la suma de los ángulos en uno de estos triángulos es mayor que π).

2. Determinar la forma de la superficie de rotación sobre la cual la geometría sería la misma que sobre un « plano » que pasa por el origen de un campo gravitatorio central en el vacío.

Solución. La geometría sobre la superficie de rotación $z = z(r)$ viene determinada (en coordenadas cilíndricas) por el elemento de longitud:

$$dl^2 = dr^2+dz^2+r^2d\phi^2 = dr^2(1+z'^2)+r^2d\phi^2.$$

De la comparación con el elemento de longitud (97.15) en el « plano » $\theta = \pi/2$,

$$dl^2 = r^2d\phi^2+\frac{dr^2}{1-\frac{r_g}{r}},$$

se sigue,

$$1+z'^2 = \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1},$$

de donde,

$$z = 2\sqrt{r_g(r-r_g)}.$$

Para $r = r_g$ esta función presenta una singularidad—un punto de ramificación. La razón de ello estriba en que la métrica espacial (97.15), en contraste con la métrica del espacio-tiempo (97.14), presenta realmente una singularidad en $r = r_g$.

Las propiedades generales, puestas de manifiesto en el problema que precede, de la geometría en «planos» que pasan por el centro del campo, pueden hallarse también considerando la curvatura del modelo intuitivo que acabamos de construir.

3. Transformar el intervalo (97.14) pasando a un sistema de coordenadas tal que el elemento de distancia espacial dl sea proporcional a su expresión euclídea (métrica conforme-euclídea).

Solución. Haciendo

$$r = \left(1+\frac{r_g}{4r_1}\right)^2 r_1,$$

de (97.14) se deduce

$$ds^2 = \left(\frac{1-\frac{r_g}{4r_1}}{1+\frac{r_0}{4r_1}}\right)^2 c^2\,dt^2-\left(1+\frac{r_g}{4r_1}\right)^4(dr_1^2+r_1^2d\theta^2+r_1^2\operatorname{sen}^2\theta\,d\phi^2).$$

Las coordenadas r_1, θ, Φ se llaman *coordenadas esféricas isótropas*; en vez de ellas cabe introducir también coordenadas cartesianas isótropas x, y, z. En particular, a grandes distancias ($r_1 \gg r_g$) tenemos aproximadamente

$$ds^2 = \left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2\,dt^2-\left(1+\frac{r_g}{r}\right)\left(dx^2+dy^2+dz^2\right).$$

§ 98. Movimiento en un campo gravitatorio central

Consideremos el movimiento de un cuerpo en un campo gravitatorio central. Como en todo campo de estas características, el movimiento tiene lugar en un « plano » que pasa por el origen de coordenadas; eligiremos este plano como plano $\theta = \pi/2$.

Para determinar la trayectoria del cuerpo (de masa m), nos valdremos de la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2c^2 = 0.$$

Mediante las g^{ik} dadas en la expresión del intervalo (97.14) se encuentra la siguiente ecuación:

$$e^{-\nu}\left(\frac{\partial S}{c\partial t}\right)^2 - e^{\nu}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - m^2c^2 = 0, \tag{98.1}$$

donde,

$$e^{\nu} = 1 - \frac{r_g}{r} \tag{98.2}$$

(m' es la masa del cuerpo que produce el campo; r_g es su radio gravitatorio). Siguiendo el método general de resolución de la ecuación de Hamilton-Jacobi, buscaremos una S que sea de la forma

$$S = -\mathcal{E}_0 t + M\phi + S_r(r), \tag{98.3}$$

con energía constante $\mathcal{E}_0$ y momento cinético M. Substituyendo esta expresión en (98.1), se encuentra la ecuación

$$e^{-\nu}\frac{\mathcal{E}_0^2}{c^2} - \frac{M^2}{r^2} - e^{\nu}\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2 = m^2c^2,$$

de donde,

$$S_r = \int \sqrt{\frac{\mathcal{E}_0^2}{c^2}e^{-2\nu} - \left(m^2c^2 + \frac{M^2}{r^2}\right)e^{-\nu}}\cdot dr = \\ = \int \left[\frac{r^2(\mathcal{E}_0^2 - m^2c^4) + m^2c^4 r r_0}{c^2(r-r_g)^2} - \frac{M^2}{r(r-r_g)}\right]^{1/2} dr. \tag{98.4}$$

La trayectoria viene determinada, como es sabido †, por la ecuación $\dfrac{\partial S}{\partial M} = \text{const}$, de la que se deduce

$$\phi = \int \frac{M dr}{r^2\sqrt{\dfrac{\mathcal{E}_0^2}{c^2} - \left(m^2c^2 + \dfrac{M^2}{r^2}\right)\left(1 - \dfrac{r_g}{r}\right)}}. \tag{98.5}$$

† Véase *Mecánica*, § 47.

Esta integral se reduce a una integral elíptica.

Para el movimiento de un planeta en el campo de atracción del Sol, la teoría relativista conduce tan sólo a una corrección insignificante respecto de la teoría de Newton, ya que las velocidades de los planetas son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. En el integrando de la ecuación de la trayectoria (98.5), esto último se refleja en el pequeño valor de la razón r_g/r, donde r_g es el radio gravitatorio del Sol.†

Para hallar las correcciones relativistas que afectan a la trayectoria, es conveniente partir de la expresión (98.4) correspondiente a la parte radial de la acción, antes de derivar respecto de M.

Efectuemos un cambio de la variable de integración haciendo,

$$r(r-r_g) = r'^2, \text{ esto es }, \; r-\frac{r_g}{2} \cong r',$$

como consecuencia del cual el segundo término del radicando toma la forma M^2/r'^2. Desarrollemos el primer término en serie de potencias de r_g/r', con lo que se obtiene, dentro del orden de precisión requerido:

$$S_r = \int \left[\left(2\mathcal{E}'m+\frac{\mathcal{E}'^2}{c^2}\right)+\frac{1}{r}(2m^2m'k+4\mathcal{E}'mr_g)-\frac{1}{r^2}\left(M^2-\frac{3m^2c^2r_g^2}{2}\right)\right]^{1/2} dr, \tag{98.6}$$

donde para abreviar hemos prescindido del apóstrofo en r' e introducido la energía no relativista $\mathcal{E}'$ (sin la energía en reposo).

Los términos correctivos en los coeficientes de los dos primeros términos del radicando se traducen sólo en el efecto, no particularmente interesante, de cambiar la relación entre la energía y el impulso de la partícula y los parámetros de su órbita newtoniana (elipse). Pero el cambio en el coeficiente de $1/r^2$ se manifiesta en un efecto más fundamental — en un corrimiento sistemático (secular) del perihelio de la órbita.

Dado que la trayectoria está definida por la ecuación $\phi+\dfrac{\partial S_r}{\partial M}=\text{const}$, el cambio del ángulo ϕ después de una revolución del planeta en su órbita es

$$\Delta\phi = -\frac{\partial}{\partial M}\Delta S_r,$$

† Para el Sol, $r_g = 3$ km; para la Tierra, $r_g = 0{,}44$ cm.

donde ΔS_r es el cambio correspondiente en S_r. Desarrollando S_r en potencias de la pequeña corrección al coeficiente de $1/r^2$, se obtiene:

$$\Delta S_r = \Delta S_r^{(0)} - \frac{3m^2c^2r_\vartheta^2}{4M}\frac{\partial \Delta S_r^{(0)}}{\partial M},$$

donde $\Delta S_r^{(0)}$ corresponde al movimiento en la elipse cerrada fija. Derivando esta relación respecto de M y teniendo en cuenta que

$$-\frac{\partial}{\partial M}\Delta S_r^{(0)} = \Delta\phi^{(0)} = 2\pi,$$

se encuentra:

$$\Delta\phi = 2\pi + \frac{3\pi m^2c^2r_0^2}{2M^2} = 2\pi + \frac{6\pi k^2m^2m'^2}{c^2M^2}.$$

El segundo término es el corrimiento angular buscado $\delta\phi$ de la elipse newtoniana durante una revolución, es decir, el corrimiento del perihelio de la órbita. Expresándolo en función de la longitud a del semieje mayor y de la excentricidad e de la elipse mediante la fórmula $\frac{M^2}{km'm^2} = a(1-e^2)$, se obtiene †:

$$\delta\phi = \frac{6\pi km'}{c^2a(1-e^2)}. \tag{98.7}$$

Consideremos ahora la trayectoria de un rayo luminoso en un campo gravitatorio central. Esta trayectoria viene determinada por la ecuación del iconal (87.9)

$$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} = 0,$$

que difiere de la ecuación de Hamilton-Jacobi tan sólo en que en esta última hay que hacer $m = 0$. Por lo tanto, la trayectoria del rayo se puede obtener inmediatamente a partir de (98.5) haciendo $m = 0$; al mismo tiempo, en lugar de la energía $\mathcal{E}_0 = -\frac{\partial S}{\partial t}$ de la partícula debemos escribir la frecuencia de la luz, $\omega_0 = -\frac{\partial\psi}{\partial t}$. Introduciendo también en vez de la constante M una constante ϱ definida por $\varrho = cM/\omega_0$, se obtiene:

$$\phi = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{r^2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)}}. \tag{98.8}$$

† Los valores numéricos del corrimiento, determinado por la fórmula (98.7), para Mercurio y la Tierra son iguales, respectivamente, a 43,0″ y 3,8″ por siglo. Medidas astronómicas dan 43,1″ ± 0,4″ y 5,0″ ± 1,2″, en excelente acuerdo con la teoría.

Si prescindimos de las correcciones relativistas ($r_g \to 0$), esta ecuación da $r = \varrho/\cos\phi$, es decir, una recta que pasa a una distancia ϱ del origen. Para estudiar las correcciones relativistas procederemos de la misma manera que en el caso anterior.

Para la parte radial del iconal tenemos [cf. (98.4)]:

$$\psi_r(r) = \frac{\omega_0}{c}\int \sqrt{\frac{r^2}{(r-r_g)^2} - \frac{\varrho^2}{r(r-r_g)}}\, dr.$$

Efectuando exactamente las mismas transformaciones que antes llevaron de (98.4) a (98.6), se obtiene

$$\psi_r(r) = \frac{\omega_0}{c}\int \sqrt{1 + \frac{2r_g}{r} - \frac{\varrho^2}{r^2}}\, dr.$$

Desarrollando ahora el integrando en potencias de r_g/r, se tiene:

$$\psi_r = \psi_r^{(0)} + \frac{r_g\omega_0}{c}\int \frac{dr}{\sqrt{r^2-\varrho^2}} = \psi_r^{(0)} + \frac{r_g\omega_0}{c}\,\operatorname{arcosh}\frac{r}{\varrho},$$

donde $\psi_r^{(0)}$ corresponde al rayo clásico rectilíneo.

El cambio total en ψ_r durante la propagación de la luz desde una distancia muy grande R al punto $r = \varrho$ más próximo al centro para volver de nuevo a la distancia R es igual a

$$\Delta\psi_r = \Delta\psi_r^{(0)} + 2\frac{r_g\omega_0}{c}\,\operatorname{arcosh}\frac{R}{\varrho}.$$

El cambio correspondiente del ángulo polar ϕ a lo largo del rayo se obtiene derivando respecto de $M = \varrho\omega_0/c$:

$$\Delta\phi = -\frac{\partial\Delta\psi_r}{\partial M} = -\frac{\partial\Delta\psi_r^{(0)}}{\partial M} + \frac{2r_gR}{\varrho\sqrt{R^2-\varrho^2}}.$$

Finalmente, pasando al límite para $R \to \infty$, y observando que al rayo rectilíneo corresponde $\Delta\phi = \pi$, obtenemos:

$$\Delta\phi = \pi + \frac{2r_g}{\varrho}.$$

Esto significa que el rayo de luz se curva bajo la influencia del campo de atracción: su trayectoria es una curva que presenta la concavidad hacia el centro (el

rayo es « atraido » hacia él), de manera que el ángulo formado por sus dos asíntotas difiere de π en

$$\delta\phi = \frac{2r_g}{\varrho} = \frac{4km'}{c^2\varrho}; \tag{98.9}$$

Con otras palabras, el rayo de luz que pasa a una distancia ϱ del centro del campo sufre una desviación dada por el ángulo $\delta\phi$ †.

§ 99. El sistema de referencia síncrono

Conforme sabemos por lo dicho en el § 84, la condición que debe cumplirse para que sea posible sincronizar relojes en puntos diferentes del espacio es que las componentes $g_{0\alpha}$ del tensor métrico sean iguales a cero. Si, además, $g_{00} = 1$, la coordenada temporal $x^0 = t$ es el tiempo propio en cada punto del espacio ††. Un sistema de referencia que satisface las condiciones

$$g_{0\alpha} = 0, \quad g_{00} = 1 \tag{99.1}$$

se califica de síncrono. El elemento de intervalo en uno de estos sistemas viene dado por la expresión

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \tag{99.2}$$

donde las componentes de la métrica espacial coinciden (salvo el signo) con las componentes $g_{\alpha\beta}$:

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} \tag{99.3}$$

En el sistema de referencia síncrono las líneas temporales son geodésicas del espacio cuadridimensional. El cuadrivector $u^i = dx^i/ds$, que es tangente a la línea de universo x^1, x^2, $x^3 = \text{const}$, tiene por componentes $u^\alpha = 0$, $u^0 = 1$, y satisface automáticamente las ecuaciones de las geodésicas:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl} u^k u^l = \Gamma^i_{00} = 0,$$

ya que de las condiciones (99.1) se sigue que los símbolos de Christoffel Γ^α_{00} y Γ^0_{00} se anulan idénticamente.

Es también fácil ver que estas líneas son normales a las hipersuperficies $t = \text{const}$. En efecto, el cuadrivector normal a una de ellas, $n_i = c\,\partial t/\partial x^i$, tiene componentes covariantes $n_\alpha = 0$, $n_0 = 1$. En virtud de las condiciones (99.1), las correspondientes componentes contravariantes son $n^\alpha = 0$, $n^0 = 1$, es decir, coinciden con las componentes del cuadrivector u^i, que es tangente a las líneas temporales.

† Para un rayo que pasa rasante al borde del sol, es $\delta\phi = 1{,}75''$.

†† En este párrafo suponemos $c = 1$.

Recíprocamente, estas propiedades se pueden utilizar para la construcción geométrica de un sistema de referencia sincrono en un espacio-tiempo cualquiera. Para ello eligiremos como hipersuperficie inicial una hipersuperficie espacial, cualquiera, es decir, una hipersuperficie cuyas normales son en cada punto vectores temporales (vectores interiores al cono de luz con vértice en dicho punto); todos los elementos de intervalo sobre una de estas hipersuperficies son espaciales. Construyamos luego la familia de geodésicas normales a esta hipersuperficie. Si elejimos ahora estas líneas como líneas coordenadas temporales y tomamos como coordenada temporal t la longitud del arco de geodésica medido desde la hipersuperficie inicial, obtenemos un sistema de referencia síncrono.

Es claro que esta construcción, y con ella la elección de un sistema de referencia síncrono, es en principio siempre posible.

Además, esta elección no es todavía la única posible. Una métrica de la forma (99.2) admite cualquier transformación de las coordenadas espaciales que no afecte al tiempo, y también admite las transformaciones asociadas con la arbitrariedad en la elección de la hipersuperficie inicial para la construcción geométrica.

La transformación que lleva a un sistema de referencia síncrono puede, en principio, efectuarse analíticamente utilizando la ecuación de Hamilton-Jacobi; este método se basa en que las trayectorias de una partícula en un campo gravitatorio son precisamente líneas geodésicas.

La ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula (cuya masa tomaremos igual a la unidad) en un campo gravitatorio es

$$g^{ik}\frac{\partial\tau}{\partial x^i}\frac{\partial\tau}{\partial x^k} = 1 \ , \tag{99.4}$$

(donde hemos representado la acción por τ). Su integral completa es de la forma:

$$\tau = f(\xi^\alpha, x^i) + A(\xi^\alpha) \tag{99.5}$$

donde f es una función de las cuatro coordenadas x^i y de los tres parámetros ξ^α; la cuarta constante A se trata como una función arbitraria de los tres ξ^α. En una representación de este tipo para τ, las ecuaciones de la trayectoria de la partícula se pueden obtener igualando a cero las derivadas $\partial\tau/\partial\xi^\alpha$, es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} = -\frac{\partial A}{\partial \xi^\alpha}. \tag{99.6}$$

Para cada conjunto de valores de los parámetros ξ^α, los segundos miembros de las ecuaciones (99.6) toman determinados valores constantes, y la línea de universo determinada por estas ecuaciones es una de las posibles trayectorias de la partícula. Eligiendo las cantidades ξ^α, que son constantes a lo largo de la trayectoria, como

nuevas coordenadas espaciales y la cantidad τ como nueva coordenada temporal, obtenemos un sistema de referencia síncrono; la transformación que nos lleva de las coordenadas primitivas a las nuevas viene dada por las ecuaciones (99.5)-(99.6). En efecto, es claro que en una tal transformación las líneas temporales serán geodésicas y, además, normales a las hipersuperficies $\tau = \text{const}$. Esto último resulta ya de la analogía mecánica: el cuadrivector $-\partial\tau/\partial x^i$, que es normal a la hipersuperficie, coincide en mecánica con el cuadrimpulso de la partícula, y, por consiguiente, coincide en dirección con su cuadrivelocidad u_i, es decir, con el cuadrivector tangente a la trayectoria. Finalmente, la condición $g_{00} = 1$ queda satisfecha, evidentemente, puesto que la derivada $-d\tau/ds$ de la acción a lo largo de la trayectoria es la masa de la partícula, que hicimos igual a 1; por lo tanto, $|d\tau/ds| = 1$.

Escribamos las ecuaciones de Einstein del campo gravitatorio en el sistema de referencia síncrono separando en ellas las operaciones de derivación espacial y temporal.

Introduzcamos la notación

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t} \tag{99.7}$$

para las derivadas temporales del tensor métrico tridimensional; estas cantidades forman a su vez un tensor de tres dimensiones. Todas las operaciones de desplazamiento de índices en el tensor tridimensional $\varkappa_{\alpha\beta}$ y su derivación covariante se efectúan en lo que sigue en el espacio de tres dimensiones con métrica $\gamma_{\alpha\beta}$ †). La suma $\varkappa^\alpha_\alpha$ es la derivada logarítmica del determinante $\gamma \equiv |\gamma_{\alpha\beta}| = -g$:

$$\varkappa^\alpha_\alpha = \gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\ln\gamma \tag{99.8}$$

Para los símbolos de Christoffel se encuentran las expresiones:

$$\Gamma^0_{00} = \Gamma^\alpha_{00} = \Gamma^0_{0\alpha} = 0, \tag{99.9}$$
$$\Gamma^0_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\varkappa_{\alpha\beta}, \quad \Gamma^\alpha_{0\beta} = \tfrac{1}{2}\varkappa^\alpha_\beta, \quad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \lambda^\alpha_{\beta\gamma},$$

donde $\lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ son los símbolos de Christoffel tridimensionales formados a partir del tensor $\gamma_{\alpha\beta}$. De la fórmula (92.10) se deducen las expresiones siguientes para las componentes del tensor R_{ik}:

---

† Pero esto no se refiere, naturalmente, a las operaciones de desplazamiento de índices en las componentes espaciales de los cuatritensores R_{ik}, T_{ik} (cf. la nota en la pág. 350). Así, por T^β_α hay que entender, como antes, la expresión $g^{\beta\gamma}T_{\gamma\alpha} + g^{\beta 0}T_{0\alpha}$, que se reduce en este caso a $g^{\beta\gamma}T_{\gamma\alpha}$ y difiere de $\gamma^{\beta\gamma}T_{\gamma\alpha}$ en el signo.

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\varkappa_\alpha^\alpha - \frac{1}{4}\varkappa_\alpha^\beta \varkappa_\beta^\alpha,$$

$$R_{0\alpha} = \frac{1}{2}(\varkappa_{\alpha;\beta}^\beta - \varkappa_{\beta;\alpha}^\beta),$$

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\varkappa_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}(\varkappa_{\alpha\beta}\varkappa_\gamma^\gamma - 2\varkappa_\alpha^\gamma \varkappa_{\beta\gamma}) + P_{\alpha\beta}. \tag{99.10}$$

$P_{\alpha\beta}$ es aquí el tensor tridimensional de Ricci que se expresa en función de $\gamma_{\alpha\beta}$ de la misma manera que R_{ik} se expresa en función de g_{ik}. Todas las operaciones de subir indices y de derivación covariante se efectúan en el espacio de tres dimensiones dotado de la métrica $\gamma_{\alpha\beta}$.

Escribiremos las ecuaciones de Einstein utilizando componentes mixtas. Dichas ecuaciones son:

$$R_0^0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\varkappa_\alpha^\alpha - \frac{1}{4}\varkappa_\alpha^\beta \varkappa_\beta^\alpha = 8\pi k\,(T_0^0 - \tfrac{1}{2}T), \tag{99.11}$$

$$R_\alpha^0 = \frac{1}{2}(\varkappa_{\alpha;\beta}^\beta - \varkappa_{\beta;\alpha}^\beta) = 8\pi k\, T_\alpha^0, \tag{99.12}$$

$$R_\alpha^\beta = -P_\alpha^\beta - \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\gamma}\,\varkappa_\alpha^\beta) = 8\pi k\,(T_\alpha^\beta - \tfrac{1}{2}\delta_\alpha^\beta T). \tag{99.13}$$

Propiedad característica de los sistemas de referencia síncronos es el de no ser estacionarios: en un sistema de este tipo el campo gravitatorio no puede ser constante. En efecto, en un campo constante sería $\varkappa_{\alpha\beta} = 0$. Ahora bien, cuando existe materia, la anulación de todas las componentes $\varkappa_{\alpha\beta}$ estaría en contradicción, en cualquier caso, con la ecuación (99.11) (con segundo miembro no nulo). Por otra parte, en el espacio vacío encontraríamos, en virtud de (99.13), que todas las $P_{\alpha\beta}$, y, por ello mismo, todas las componentes del tensor tridimensional de curvatura $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$, se anularían, es decir, que no existe campo alguno (en un sistema síncrono con métrica espacial euclídea el espacio-tiempo es plano).

A la vez, la materia que llena el espacio no puede, en general, encontrarse en reposo respecto de un sistema de referencia síncrono. Esto es evidente si se tiene en cuenta que las partículas de materia en la que actúan fuerzas de presión, no se mueven, en general, a lo largo de geodésicas de universo; la línea de universo de una partícula en reposo, en cambio, es una línea de tiempo y en un sistema síncrono es geodésica. Constituye una excepción el caso de la materia « en polvo » ($p = 0$). Al no interactuar entre sí, sus partículas se mueven a lo largo de geodésicas de universo; en este caso, por consiguiente, la condición de que el sistema de referencia

sea síncrono no contradice la condición de ser « acompañante » de la materia †). Para otras ecuaciones de estado de la materia puede producirse una situación análoga únicamente en casos particulares en los que en todas o en algunas direcciones es nulo el gradiente de la presión.

A partir de la ecuación (99.11) se puede demostrar que el determinante $-g = \gamma$ del tensor métrico en un sistema de referencia síncrono debe anularse necesariamente al cabo de un tiempo finito.

Observemos para ello que la expresión en el segundo miembro de esta ecuación es positiva cualquiera que sea la distribución de la materia. En efecto, en un sistema de referencia síncrono se tiene para el tensor energía-impulso (94.9):

$$T_0^0 - \frac{1}{2} T = \frac{1}{2}(\epsilon + 3p) + \frac{(p+\epsilon)v^2}{1-v^2}$$

[las componentes de la cuadrivelocidad son las dadas por (88.14)]; es evidente que esta cantidad es positiva. Lo mismo vale también para el tensor energía-impulso del campo electromagnético ($T = 0$, T_0^0 es la densidad de energía del campo, que es positiva). De esta manera, de (99.11) resulta:

$$-R_0^0 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\varkappa_\alpha^\alpha + \frac{1}{4}\varkappa_\alpha^\beta \varkappa_\beta^\alpha \leqslant 0 \tag{99.14}$$

(el signo de igualdad vale en el espacio vacío).

En virtud de la desigualdad algebraica ††

$$\varkappa_\beta^\alpha \varkappa_\alpha^\beta \geqslant \frac{1}{3}(\varkappa_\alpha^\alpha)^2$$

(99.14) puede escribirse también en la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}\varkappa_\alpha^\alpha + \frac{1}{6}(\varkappa_\alpha^\alpha)^2 \leqslant 0$$

o bien

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\varkappa_\alpha^\alpha} \geqslant \frac{1}{6}. \tag{99.15}$$

---

† Pero, aun en este caso, para que sea posible elegir un sistema de referencia «acompañante y síncrono» es necesario todavía que la materia se mueva «sin girar». En un sistema acompañante las componentes contravariantes de la cuadrivelocidad son $u^0 = 1$, $u^\alpha = 0$. Si el sistema de referencia es también síncrono, para las componentes covariantes se tendrá asimismo $u_0 = 1$, $u_\alpha = 0$ y, por lo tanto, su cuadrirrotacional valdrá

$$u_{i;k} - u_{k;i} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \frac{\partial u_k}{\partial x^i} = 0.$$

Ahora bien, esta igualdad tensorial debe valer entonces en cualquier otro sistema de referencia. En estas condiciones, para un sistema síncrono, pero no-acompañante, se sigue de aquí la condición rot $\mathbf{v} = 0$ para la velocidad tridimensional $\mathbf{v}$.

†† Es fácil comprobar la validez de esta desigualdad reduciendo el tensor $\varkappa_\alpha^\beta$ (para un instante cualquiera dado) a la forma diagonal.

Supongamos, por ejemplo, que en un cierto instante es $\varkappa_a^a > 0$. Entonces, al disminuir t, decrece constantemente la cantidad $1/\varkappa_a^a$, cuya derivada es siempre finita y no nula, con lo cual debe anularse (tomando valores positivos) al cabo de un tiempo finito. En otras palabras, $\varkappa_a^a$ tiende a $+\infty$ y dado que $\varkappa_a^a = \partial \ln \gamma/\partial t$, esto significa que el determinante γ se anula [y precisamente, según la desigualdad (99.15), no más rápidamente que t^6]. En cambio, si en el instante inicial se tiene $\varkappa_a^a < 0$, a la misma consecuencia se llega para tiempos crecientes.

Este resultado, sin embargo, no prueba, en absoluto, la existencia de una singularidad física, auténtica, en la métrica. Una singularidad física lo es tan sólo aquella que posee el espacio-tiempo como a tal y no está ligada con el carácter del sistema de referencia elegido (dicha singularidad debe caracterizarse por la tendencia a infinito de cantidades escalares — densidad de la materia, invariantes del tensor de curvatura, etc.). En cambio, la singularidad en el sistema de referencia síncrono, singularidad que hemos probado que es inevitable, resulta, por lo general, en realidad ficticia y desaparece al pasar a otro sistema de referencia (no síncrono). Su origen se reconoce de manera evidente mediante simples consideraciones geométricas.

Vimos antes que la construcción de un sistema síncrono se reduce a construir una familia de líneas geodésicas ortogonales a una cierta hipersuperficie espacial. Pero las líneas geodésicas de una familia arbitraria se cortan, en general, sobre determinadas hipersuperficies envolventes, que son las figuras análogas a las superficies cáusticas de la óptica geométrica. Ahora bien, la intersección de las líneas de coordenadas temporales da lugar, claro está, a una singularidad en la métrica para el sistema de coordenadas en cuestión. Así, pues, existe una razón geométrica para que aparezca la singularidad vinculada con las propiedades específicas de un sistema síncrono, singularidad que, por ello mismo, no tiene carácter físico. Una métrica arbitraria del cuadriespacio admite, en general, también la existencia de familias de líneas geodésicas temporales que no se cortan. Pero la inevitabilidad de que se anule el determinante γ en un sistema síncrono significa que las propiedades, compatibles con las ecuaciones del campo, de la curvatura del espacio-tiempo real no plano (expresadas por la desigualdad $R_0^0 \geqslant 0$) excluyen la posibilidad de que existan tales familias, de modo que las líneas temporales en cualquier sistema síncrono de referencia enecesariamente se cortan entre sí †).

Hemos recordado antes que, para la materia en polvo, un sistema síncrono puede ser a la vez un sistema acompañante. En tal caso, la densidad de materia tiende a infinito al acercarse a la cáustica, simplemente como resultado de la intersección de las trayectorias de universo de las partículas, que coinciden con las líneas del tiempo. Es claro, sin embargo, que esta singularidad de la densidad desaparece,

† La construcción analítica de la métrica cerca de la singularidad ficticia en un sistema de referencia síncrono puede verse en *E. M. Lifshits, V. V. Sudakov, I. M. Jalatnikov*, ZhETF **40**, 1847 (1961).

El carácter general de esta métrica es evidente por consideraciones geométricas. Dado que, en cualquier caso, la hipersuperficie cáustica contiene intervalos temporales (elementos de longitud de las líneas geodésicas temporales en los puntos en que son tangentes a la cáustica), no puede ser

simplemente, sin más que introducir una presión de la materia, tan pequeña cuanto se quiera, pero diferente de cero, y en este sentido carece también de carácter físico.

Problemas

1. Hallar la forma del desarrollo de la solución de las ecuaciones del campo gravitatorio en el vacío cerca de un punto ordinario, regular respecto del tiempo.

Solución. Conviniendo en elegir dicho punto como origen del tiempo, buscaremos para $\gamma_{\alpha\beta}$ una expresión de la forma

$$\gamma_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + tb_{\alpha\beta} + t^2 c_{\alpha\beta} + \ldots, \tag{1}$$

donde $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$ son funciones de las coordenadas espaciales. En esta misma aproximación, el tensor inverso es:

$$\gamma^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} - tb^{\alpha\beta} + t^2(b^{\alpha\gamma}b^{\beta}_{\gamma} - c^{\alpha\beta}),$$

donde $a^{\alpha\beta}$ es el tensor inverso del $a_{\alpha\beta}$ y el subir los índices en los demás tensores se efectúa mediante el tensor $a^{\alpha\beta}$. Tenemos, además,

$$\varkappa_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + 2tc_{\alpha\beta}, \quad \varkappa^{\beta}_{\alpha} = b^{\beta}_{\alpha} + t(2c^{\beta}_{\alpha} - b_{\alpha\gamma}b^{\beta\gamma}).$$

Las ecuaciones de Einstein (99.11-13) conducen a las siguientes relaciones:

$$R^0_0 = -c + \frac{1}{4} b^{\beta}_{\alpha} b^{\alpha}_{\beta} = 0, \tag{2}$$

$$R^0_{\alpha} = \frac{1}{2}(b^{\beta}_{\alpha;\beta} - b_{;\alpha}) + t\left[-c_{;\alpha} + \frac{3}{8}(b^{\gamma}_{\beta}b^{\beta}_{\gamma})_{;\alpha} + c^{\beta}_{\alpha;\beta} + \frac{1}{4} b^{\beta}_{\alpha} b_{;\beta} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(b^{\gamma}_{\alpha}b^{\beta}_{\gamma})_{;\beta}\right] = 0, \tag{3}$$

$$R^{\beta}_{\alpha} = -P^{\beta}_{\alpha} - \frac{1}{4} b^{\beta}_{\alpha} b + \frac{1}{2} b^{\gamma}_{\alpha} b^{\beta}_{\gamma} - c^{\beta}_{\alpha} = 0 \tag{4}$$

($b \equiv b^{\alpha}_{\alpha}$, $c \equiv c^{\alpha}_{\alpha}$). La operación de derivación covariante se efectúa aquí en el espacio tridimensional con métrica $a_{\alpha\beta}$; según esta misma métrica se define el tensor $P_{\alpha\beta}$.

---

una hipersuperficie espacial. Además, sobre la cáustica se anula uno de los valores principales del tensor métrico $\gamma_{\alpha\beta}$ en virtud de que se anula la distancia (δ) entre dos geodésicas vecinas que se cortan en el punto en el que son tangentes a la cáustica. La distancia δ tiende a cero proporcionalmente a la primera potencia de la distancia (l) al punto de intersección. Por consiguiente, el valor principal del tensor métrico, y con él también el determinante γ, tiende a cero como l^2.

El sistema de referencia síncrono puede construirse también de manera que las líneas del tiempo se corten en una variedad de puntos cuyo número de dimensiones es menor que el de una hipersuperficie, es decir, sobre una superficie de dos dimensiones que se puede llamar superficie focal de la correspondiente familia de geodésicas. Para la construcción analítica de dicha métrica, véase *V. A. Belinskiĭ, I. M. Jalatnikov*, ZhETF **49**, 1000 (1965).

En virtud de (4), los coeficientes $c_{\alpha\beta}$ quedan completamente determinados por los coeficientes $a_{\alpha\beta}$ y $b_{\alpha\beta}$. Teniendo esto en cuenta, (2) conduce a la relación

$$P + \frac{1}{4} b^2 - \frac{1}{4} b^{\beta}_{\alpha} b^{\alpha}_{\beta} = 0. \tag{5}$$

Los términos de orden cero en (3) nos dan:

$$b^{\beta}_{\alpha;\beta} = b_{;\alpha}\,. \tag{6}$$

En cambio, los términos $\sim t$ en esta ecuación se anulan idénticamente teniendo en cuenta (5) y (6) [y la identidad $P^{\beta}_{\alpha;\beta} = \frac{1}{2} P_{;\alpha}$; cf. (92.13)].

De esta manera, las doce cantidades $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ están ligadas entre sí por la relación (5) y las tres relaciones (6), de modo que quedan ocho funciones arbitrarias de las tres coordenadas espaciales. De ellas, tres están ligadas con la posibilidad de tres transformaciones arbitrarias de las coordenadas espaciales, y una, con la elección arbitraria de la hipersuperficie de partida al construir el sistema de referencia síncrono. Como debía ser, quedan cuatro funciones arbitrarias «físicamente distintas» (véase el final del § 95).

2. Calcular las componentes del tensor de curvatura R_{iklm} en un sistema de referencia síncrono.

Solución. Mediante los símbolos de Christoffel (99.9) se encuentra, según la fórmula (92.4):

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -P_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{4}(\varkappa_{\alpha\delta}\varkappa_{\beta\gamma} - \varkappa_{\alpha\gamma}\varkappa_{\beta\delta}),$$

$$R_{0\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\varkappa_{\alpha\gamma;\,\beta} - \varkappa_{\alpha\beta;\,\gamma}),$$

$$R_{0\alpha0\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\varkappa_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\varkappa_{\alpha\gamma}\varkappa^{\gamma}_{\beta},$$

donde $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ es el tensor de curvatura tridimensional que corresponde a la métrica espacial de tres dimensiones $\gamma_{\alpha\beta}$.

3. Hallar la forma general de una transformación infinitesimal que conserve el carácter síncrono del sistema de referencia.

Solución. La transformación tiene la forma:

$$t \to t + \varphi\,(x^1, x^2, x^3), \quad x^{\alpha} \to x^{\alpha} + \xi^{\alpha}\,(x^1, x^2, x^3, t),$$

donde φ, ξ^{α} son infinitésimos. Puede asegurarse que se cumple la condición $g_{00} = 1$ basándose en la independencia de φ respecto de t, y para que se cumplan las condiciones $g_{0\alpha} = 0$ deben quedar satisfechas las ecuaciones

$$\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\alpha}},$$

de donde

$$\xi^{\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\beta}} \int \gamma^{\alpha\beta}\, dt + f^{\alpha}(x^1, x^2, x^3), \tag{1}$$

igualdad en la que f^α es también un infinitésimo (componentes de un vector tridimensional **f**). Con esto, el tensor métrico espacial $\gamma_{\alpha\beta}$ se substituye por

$$\gamma_{\alpha\beta} \to \gamma_{\alpha\beta} + \xi_{\alpha;\,\beta} + \xi_{\beta;\,\alpha} - \varphi\varkappa_{\alpha\beta} \tag{2}$$

[como se comprueba fácilmente a partir de la fórmula (94.3)].

Como debía ser, la transformación contiene cuatro funciones arbitrarias φ, f^α de las coordenadas espaciales.

§ 100. Colapso gravitatorio

En la métrica de Schwarzschild (97.14) g_{00} se anula y g_{11} tiende a infinito para $r = r_g$ (sobre la « esfera de Schwarzschild »). Esta circunstancia podría prestar una base a la conclusión de que existe una singularidad en la métrica espacio-temporal y, por consiguiente, a la conclusión de que es imposible que exista un cuerpo (de masa dada) con un « radio » menor que el radio gravitatorio. En realidad, sin embargo, tales conclusiones serían de hecho incorrectas. Que así es lo apunta ya el que el determinante $g = -r^4 \operatorname{sen}^2\theta$ no presenta ninguna singularidad en $r = r_g$, de modo que la condición $g < 0$ (82.3) no queda violada. Veremos que se trata efectivamente tan sólo de la imposibilidad de que exista el correspondiente sistema de referencia para $r < r_g$.

Para dilucidar el auténtico carácter de la métrica espacio-temporal en este dominio †, efectuemos un cambio de coordenadas de la forma:

$$c\tau = \pm ct \pm \int \frac{f(r)\,dr}{1 - \dfrac{r_g}{r}}, \quad R = ct + \int \frac{dr}{\left(1 - \dfrac{r_g}{r}\right) f(r)}. \tag{100.1}$$

Entonces

$$ds^2 = \frac{1 - \dfrac{r_g}{r}}{1 - f^2}\,(d\tau^2 - f^2\,dR^2) - r^2\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,d\varphi^2).$$

Eliminaremos la singularidad en $r = r_g$ eligiendo $f(r)$ de modo que se tenga $f(r_g) = 1$. Si se hace $f(r) = \sqrt{r/r_g}$, el nuevo sistema de coordenadas será también síncrono ($g_{\tau\tau} = 1$). Eligiendo primero, para concretar, los signos superiores en (100.1), tendremos:

$$R - c\tau = \int \frac{(1 - f^2)\,dr}{\left(1 - \dfrac{r_g}{r}\right) f} = \int \sqrt{\frac{r}{r_g}}\,dr = \frac{2}{3}\,\frac{r^{3/2}}{r_g^{1/2}},$$

† El primero en estudiar este problema fue D. Finkelstein (1958) utilizando otra transformación. La métrica particular (100.3) fue introducida en otra ocasión por *Lemaitre* (1938), y en relación con este problema por *Iu. Rylov* (1961).

o bien

$$r = \left[\frac{3}{2}(R - c\tau)\right]^{2/3} r_g^{1/3} \tag{100.2}$$

(hemos tomado igual a cero la constante de integración, que depende del origen del tiempo τ). El elemento de intervalo es:

$$ds^2 = c^2\,d\tau^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2r_g}(R - c\tau)\right]^{2/3}} - \left[\frac{3}{2}(R - c\tau)\right]^{4/3} r_g^{2/3}\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,d\varphi^2). \tag{100.3}$$

En estos sistemas de coordenadas no existe singularidad sobre la esfera de Schwarzschild [a la que corresponde aquí la igualdad $(3/2)(R - c\tau) = r_g$]. La coordenada R es espacial en todos los puntos, y τ, temporal. La métrica (100.3) es no-estacionaria. Como en cualquier sistema de referencia síncrono, las líneas del tiempo son en él líneas geodésicas. En otras palabras, las partículas de « prueba » que se encuentran en reposo respecto del sistema de referencia, son partículas que se mueven libremente en el campo dado.

A cada valor de r corresponde una línea de universo $R - c\tau = \text{const}$ (rectas inclinadas en el diagrama de la fig. 20). En cambio, las líneas de universo de las par-

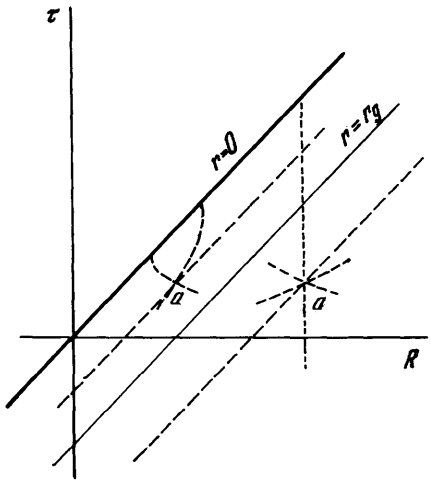

FIG. 20.

tículas que se encuentran en reposo con relación al sistema de referencia se presentan en dicho diagrama por rectas verticales; moviéndose a lo largo de las mismas, las partículas acaban por « caer » al centro del campo ($r = 0$) al cabo de un intervalo finito de tiempo propio, centro que es un verdadero punto singular de la métrica.

Consideremos la propagación de señales luminosas radiales. La ecuación $ds^2 = 0$ (para θ, φ = const) da para la derivada $d\tau/dR$ a lo largo del rayo:

$$c\frac{dr}{dR} = \pm \frac{1}{\left[\frac{3}{2r_g}(R - c\tau)\right]^{1/3}} = \pm \sqrt{\frac{r_g}{r}} \tag{100.4}$$

Los dos signos corresponden a las dos fronteras del « cono » de luz con vértice en el punto de universo dado. Para $r > r_g$ (punto a de la fig. 20) la pendiente de estas fronteras $| cd\tau/dR | < 1$, de modo que la recta r = const (a lo largo de la cual $cd\tau/dR = 1$) penetra en el interior del cono. En cambio, en la región en que $r < r_g$ (punto a') tenemos $| cd\tau/dR | > 1$, con lo cual la recta r = const, que es una línea de universo de una partícula inmóvil (respecto del centro del campo), se encuentra fuera del cono. Ambas fronteras de éste cortan verticalmente a la línea $r = 0$ a una distancia finita. Dado que los sucesos ligados causalmente entre sí no pueden encontrarse sobre una línea de universo fuera del cono de luz, de aquí se sigue en el dominio $r < r_g$ ninguna partícula puede estar en reposo. Cualesquiera que sean las interacciones y señales, se propagan aquí hacia el centro, alcanzándolo al cabo de un intervalo finito de tiempo τ.

De manera análoga, eligiendo en la transformación (100.1) los signos inferiores, obtendríamos un sistema de referencia « en expansión », con una métrica que difiere de la (100.3) en el cambio de signo de τ. Corresponde dicho sistema a un espacio-tiempo en el cual (en el dominio $r < r_g$) es imposible, como antes, el reposo, pero la propagación de todas las señales tiene lugar alejándose del centro.

Los resultados expuestos pueden aplicarse al problema que plantea el comportamiento de los cuerpos de gran masas en la teoría general de la relatividad †.

El estudio de las condiciones relativistas de equilibrio de un cuerpo esférico pone de manifiesto que, para un cuerpo cuya masa sea suficientemente grande, puede no existir un estado de equilibrio estadístico††. Es evidente a priori que dicho cuerpo debe contraerse ilimitadamente (éste es el llamado *colapso gravitatorio*) †††.

En un sistema de referencia no ligado al cuerpo y galileano en el infinito [métrica (97.14)], el radio del cuerpo central no puede ser menor que r_g. Esto significa que, según el reloj t de un observador alejado, el radio del cuerpo en contracción sólo asintóticamente, para $t \to \infty$, tiende al radio gravitatorio. Es fácil hallar la ley límite de esta aproximación.

---

† Hemos de prevenir contra la aplicación de esos modelos a las partículas elementales: toda la teoría expuesta en este libro pierde su aplicabilidad ya para dimensiones ($\sim \hbar/mc$) que superan un número enorme de veces ($\sim 10^{40}$) el valor de km/c^2.

†† Véase Física Estadística, § 111.

††† Las propiedades fundamentales de este fenómeno fueron señaladas por primera vez por *Oppenheimer* y *Schneider*, 1939.

Una partícula sobre la superficie del cuerpo que se contrae se encuentra permanentemente en el campo gravitatorio de una masa constante m — la masa total del cuerpo. Cuando $r \to r_g$, las fuerzas gravitatorias llegan a ser muy grandes; en cambio, la densidad del cuerpo (y con ella, también la presión) se conserva finita. Prescindiendo, por este motivo, de las fuerzas de presión, reducimos la determinación de la dependencia $r = r(t)$ del radio del cuerpo en función del tiempo al estudio de la caída libre de una partícula de prueba en el campo de la masa m.

La ley $r(t)$ para la caída en un campo de Schwarzschild se puede hallar (siguiendo el método de Hamilton-Jacobi) a partir de la igualdad $\partial S/\partial \mathcal{E}_0 = \text{const}$ con la acción S dada por (98.3-4), teniendo en cuenta, además, que para un movimiento puramente radial el momento cinético $M = 0$. De esta manera obtendremos:

$$ct = \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2 - 1 + \frac{r_g}{r}}} \tag{100.5}$$

(para abreviar se ha prescindido del subíndice en $\mathcal{E}_0$). Esta integral diverge para $r \to r_g$ como $r_g \ln (r - r_g)$. De aquí se sigue la ley asintótica:

$$r - r_g = \text{const}\, e^{-\frac{ct}{r_g}} \tag{100.6}$$

Aunque la velocidad de la contracción observada desde el exterior tiende asintóticamente a cero, la velocidad v de las partículas que caen, medida según sus tiempos propios, por el contrario crece, tendiendo a la velocidad de la luz. En efecto, de acuerdo con la definición (88.10):

$$v^2 = v_\alpha v^\alpha = \frac{g_{11}}{g_{00}} \left(\frac{dt}{dr}\right)^2.$$

Tomando para g_{11} y g_{00} los valores (97.14) y para dr/dt el dado por (100.5), se encuentra que $v^2 \to c^2$.

La aproximación al radio gravitatorio, que exige un tiempo infinito de acuerdo con el reloj de un observador exterior, supone solamente un intervalo finito de tiempo propio (tiempo medido en el sistema de referencia que acompaña al cuerpo). Esto es claro, sin más, por el análisis general expuesto anteriormente, pero es fácil comprobar directamente que así es calculando el tiempo propio τ como integral invariante $\frac{1}{c}\int ds$. Efectuando el cálculo en el sistema de referencia de Schwarzschild y tomando para la partícula que cae el valor dr/dt dado por (100.5), se obtendrá:

$$c\tau = \int \sqrt{\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) - \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}}\, dr = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{r_g}{r} - 1 + \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2}}.$$

Esta integral converge para $r \to r_g$.

Una vez alcanzado (según el tiempo propio) el radio gravitatorio, el cuerpo seguirá contrayéndose de forma que sus partículas alcanzan todas el centro al cabo de un tiempo propio finito. Este proceso, sin embargo, no es observable desde el sistema de referencia exterior; vimos que de debajo de la esfera de Schwarzschild no parte señal alguna (en el sistema de referencia « en contracción »).

Respecto del observador exterior, la contracción hacia el radio gravitatorio va acompañada de un « encerrarse en sí mismo » del cuerpo. El tiempo de propagación de las señales emitidas desde él tiende a infinito: para una señal luminosa es $cdt = dr/(1 - r_g/r)$ y la integral

$$ct = \int \frac{dr}{1 - r_g/r}$$

[como también la integral (100.5)] diverge para $r \to r_g$. Los intervalos de tiempo propio sobre la superficie del cuerpo se ven acortados, respecto de los intervalos de tiempo t del observador alejado, en la razón $1 - r_g/r$; por lo tanto, cuando $r \to r_g$ todos los procesos sobre el cuerpo, respecto del observador exterior, se « congelan », quedan inmovilizados. Este cuerpo « congelado » está en interacción con los cuerpos que lo rodean tan sólo mediante su campo gravitatorio estático.

La cuestión acerca del colapso gravitatorio de cuerpos no esféricos no se encuentra todavía actualmente aclarada en grado satisfactorio. Cabe afirmar, al parecer, que para pequeñas desviaciones respecto de la forma esférica, el colapso conduce (en relación con el sistema del observador exterior) al mismo estado de cuerpo « congelado », y en el sistema de referencia acompañante, al paso por debajo de la esfera de Schwarzschild. La suerte ulterior del cuerpo en el sistema acompañante, sin embargo, no está clara †).

Para terminar, una observación todavía de carácter metódico. Hemos visto que, para un campo central en el vacío, el « sistema del observador exterior », inercial en el infinito, no es completo: no hay lugar en él para las líneas de universo de las partículas que se mueven dentro de la esfera de Schwarzschild. En cambio, la métrica (100.3) es aplicable también dentro de dicha esfera, si bien tampoco este sistema de referencia es completo, en cierto sentido. En efecto, consideremos una partícula que se mueve radialmente en este sistema alejándose del centro. Su línea de universo, para $\tau \to \infty$, se dirige al infinito, y para $\tau \to -\infty$ debe acercarse asintóticamente a $r = r_g$, puesto que, en la métrica dada, dentro de la esfera de Schwarzschild el movimiento puede tener lugar solamente en dirección hacia el centro. Por otra parte, el paso de una partícula de $r = r_g$ a cualquier punto dado $r > r_g$ tiene lugar al cabo de un intervalo finito de tiempo propio. Según el tiempo propio, por consi-

† Véase *A. T. Doroshkevich, Ia. B. Zel'dovich, I. D. Novikov*, ZhETF **49**, 170 (1965).

guiente, la partícula debe alcanzar desde dentro la esfera de Schwarzschild antes de empezar a moverse por fuera de ella; pero esta parte de la historia de la partícula no puede describirse en el sistema de referencia dado ††.

Subrayaremos, sin embargo, que este carácter incompleto resulta solamente en la consideración formal de la métrica del campo en tanto que creado por una masa puntual. En un problema físico real, digamos en el colapso de un cuerpo que posee una extensión, no se da aquél carácter: la solución que se obtiene enlazando la métrica (100.3) con la solución dentro de la materia será, claro está, completa y describirá toda la historia de todos los movimientos posibles de las partículas (las líneas de universo de las partículas que se mueven en el dominio $r > r_g$ alejándose del centro, comienzan inmediatamente a partir de la superficie de la esfera, aun antes de su contracción por debajo de la esfera de Schwarzschild).

Problemas

1. Para el movimiento de una partícula en el campo de un cuerpo esférico que se contrae hasta el radio gravitatorio, hallar el intervalo de distancias en las que es posible el movimiento siguiendo una órbita circular (*S. A. Kaplan*, 1949).

Solución. La función $r = r(t)$ para una partícula que se mueve en un campo de Schwarzschild con momento cinético M no nulo se obtiene de manera análoga a la que condujo a (100.5); en forma diferencial

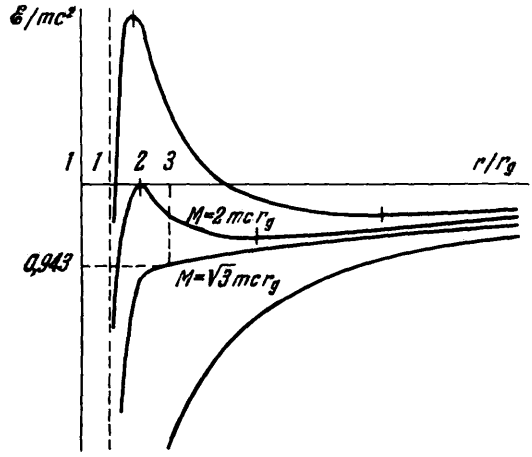

Fig. 21.

†† La construcción de un sistema de referencia libre de este carácter incompleto se estudia en el problema 5 de este párrafo.

$$\frac{1}{1-\dfrac{r_g}{r}}\frac{dr}{c\,dt}=\frac{mc^2}{\mathcal{E}}\sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2-1+\frac{r_g}{r}-\frac{M^2}{m^2c^2r^2}+\frac{M^2r_g}{m^2c^2r^3}} \qquad (1)$$

(m es la masa de la partícula y r_g el radio gravitatorio del cuerpo central). Igualando a cero el radicando en (1), obtenemos la función $\mathcal{E}(r)$ que desempeña aquí el papel de la curva de potencial en la teoría no-relativista; en la fig. 21 se representan estas curvas para diferentes valores del momento cinético M.

Los radios de las órbitas circulares y las correspondientes energías de la partícula vienen determinados por los valores extremos de las curvas, correspondiendo órbitas estables a los mínimos, e inestables, a los máximos. Para $M > \sqrt{3}\,mcr_g$ cada curva presenta un mínimo y un máximo. Al aumentar M desde $\sqrt{3}\,mcr_g$ a ∞, las coordenadas de los mínimos crecen de $3r_g$ a ∞ (y las energías correspondientes de $\sqrt{8/9}\,mc^2$ a mc^2); las coordenadas de los máximos disminuyen de $3r_g$ a $3r_g/2$ (y las correspondientes energías aumentan de $\sqrt{8/9}\,mc^2$ a ∞). Para $r < 3r_g/2$ no existe ninguna órbita circular.

2. Para el movimiento en el mismo campo, determinar la sección eficaz de captura gravitatoria de partículas a) no-relativistas, y b) ultrarrelativistas que caen desde el infinito (*Ia. B. Zel'dovich, I. D. Novikov*, 1964).

Solución. a) Para una velocidad no-relativista de velocidad v_∞ (en el infinito) la energía de la partícula es: $\mathcal{E} \approx mc^2$. En la fig. 21 se ve que la recta $\mathcal{E}=mc^2$ se encuentra por encima de todas las curvas potenciales con momentos cinéticos $M < 2mcr_g$, es decir, con parámetros de impacto $\rho < 2cr_g/v_\infty$. Todas las partículas con tales parámetros ρ se capturan por gravitación: alcanzan la esfera de Schwarzschild (asintóticamente para $t \to \infty$) sin escapar ya de nuevo al infinito. La sección eficaz de captura es:

$$\sigma = 4\pi r_g^2\left(\frac{c}{v_\infty}\right)^2.$$

b) En la ecuación (1) del problema 1 el paso a una partícula ultrarrelativista (o a un rayo de luz) se efectúa mediante la substitución $m \to 0$. Introduciendo también el parámetro de impacto $\rho = cM/\mathcal{E}$, obtendremos:

$$\frac{1}{1-\dfrac{r_g}{r}}\frac{dr}{dt}=\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}+\frac{\rho^2 r_g}{r^3}}.$$

La igualación a cero del radicando permite determinar la mínima distancia al centro $r_{\text{mín}}$ a que pasa la órbita. El valor mínimo (igual a $r_{\text{mín}} = 3r_g/2$) lo alcanza esta cantidad cuando $\rho = 3\sqrt{3}\,r_g/2$; para valores ρ menores, la partícula penetra en la esfera de Schwarzschild. De aquí se sigue para la sección eficaz de captura:

$$\sigma = \frac{27}{4}\pi r_g^2.$$

3. Obtener la ecuación de un campo gravitatorio con simetría esférica en la materia respecto de un sistema de referencia acompañante.

Solución. Nos valdremos de dos transformaciones de coordenadas r, t posibles en el elemento de intervalo (97.1) para, en primer lugar, anular el coeficiente $a(r, t)$ de $drdt$ y, en segundo lugar, anular en cada punto la velocidad radial de la materia (las demás componentes de la velocidad son

cero en virtud de la simetría central). Hecho esto, las coordenadas r y t se pueden someter todavía a una transformación arbitraria de la forma $r = r(r')$, $t = t(t')$.

Designemos la coordenada radial y el tiempo así elegidos por R y τ, y los coeficientes h, k, l, respectivamente, por $-e^{\lambda}$, $-e^{\mu}$, e^{ν} (λ, μ, ν son funciones de R y τ). Se tiene entonces para el elemento de intervalo:

$$ds^2 = c^2 e^{\nu} d\tau^2 - e^{\lambda} dR^2 - e^{\mu} (d\tau^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d\varphi^2). \tag{1}$$

Las componentes del tensor energía-impulso son iguales, en el sistema de referencia acompañante, a:

$$T_0^0 = \varepsilon, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p. \tag{3}$$

Un cálculo bastante largo conduce a las siguientes ecuaciones del campo:

$$-\frac{8\pi k}{c^4} T_1^1 = \frac{8\pi k}{c^4} p = \frac{1}{2} e^{-\nu} \left(\frac{\mu'^2}{2} + \mu' \nu' \right) - e^{-\nu} \left(\mu - \frac{1}{2} \mu\nu + \frac{3}{4} \mu^2 \right) - e^{-\mu}, \tag{2}$$

$$-\frac{8\pi k}{c^4} T_2^2 = \frac{8\pi k}{c^4} p = \frac{1}{4} e^{-\lambda} (2\nu'' + \nu'^2 + 2\mu'' + \mu'^2 - \mu'\lambda' - \nu'\lambda' + \mu'\nu') + \tag{5}$$

$$+ \frac{1}{4} e^{-\nu} (\lambda\nu + \mu\nu - \lambda\mu - 2\lambda - \lambda^2 - 2\mu - \mu^2), \tag{3}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_0^0 = \frac{8\pi k}{c^4} \varepsilon = -e^{-\lambda} \left(\mu'' + \frac{3}{4} \mu'^2 - \frac{\mu'\lambda'}{2} \right) + \frac{1}{2} e^{-\nu} \left(\lambda\mu + \frac{\mu^2}{2} \right) + e^{-\mu}, \tag{4}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_0^1 = 0 = \frac{1}{2} e^{-\lambda} (2\mu' + \mu\mu' - \lambda\mu' - \nu'\mu) \tag{5}$$

(el apóstrofo representa la derivación respecto de R, y el punto, respecto de τ).

Se pueden hallar fácilmente algunas relaciones generales válidas para λ, μ, ν si se parte de las ecuaciones $T^k_{i;k} = 0$ implícitas en las ecuaciones del campo. Utilizando la fórmula (86.11), obtendremos las siguientes dos ecuaciones:

$$\lambda + 2\mu = -\frac{2\varepsilon}{p + \varepsilon}, \qquad \nu' = -\frac{2p'}{p + \varepsilon}, \tag{6}$$

Si p se conoce en función de ε, las ecuaciones (6) se integran y dan

$$\lambda + 2\mu = -2 \int \frac{d\varepsilon}{p + \varepsilon} + f_1(R), \qquad \nu = -2 \int \frac{dp}{p + \varepsilon} + f_2(\tau), \tag{7}$$

donde las funciones $f_1(R)$ y $f_2(\tau)$ se pueden elegir de manera arbitraria gracias a la posibilidad, indicada más arriba, de aplicar transformaciones arbitrarias de la forma $R = R(R')$, $\tau = \tau(\tau')$.

4. Hallar la solución general de las ecuaciones de un campo gravitatorio central, en un sistema de referencia acompañante, para la materia en polvo, es decir, cuando $p = 0$ (*R. Tolman*, 1934) †).

Solución. En las ecuaciones (6) es evidente que para $p = 0$ se puede hacer $\nu = 0$, con lo cual pasa a ser única la elección del tiempo τ (en otras palabras, el sistema de referencia se puede elegir de forma que sea acompañante y a la vez síncrono, de acuerdo con la proposición general formulada en la pág. 409). En vez de $\mu(R, \tau)$ introduzcamos la función

$$r(R, \tau) = e^{\frac{\mu}{2}},$$

† En los problemas 4 y 5 hemos hecho $c = 1$.

que representa el «radio» definido de tal manera que $2\pi r$ es la longitud de la circunferencia con centro en el origen de coordenadas; entonces, el elemento de intervalo se escribe

$$ds^2 = d\theta^2 - e^{\lambda} dR^2 - r^2(R,\tau)\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2).$$

La ecuación (5) toma la forma $\dot{\lambda} r' = 2\dot{r}'$ y se integra inmediatamente respecto del tiempo, lo que da

$$e^{\lambda} = \frac{r'^2}{1+f}, \tag{8}$$

donde $f(R)$ es una función arbitraria, sujeta únicamente a la condición $1 + f > 0$. Substituyendo esta expresión en la ecuación (2) (la substitución en (3) no da nada nuevo), obtendremos :

$$2r\ddot{r} + \dot{r}^2 - f = 0.$$

Una integral primera de esta ecuación es

$$r^2 = f(R) + \frac{F(R)}{r}, \tag{9}$$

con $F(R)$ una función arbitraria. Integrando de nuevo, se obtiene:

$$\tau_0(R) - \tau = \frac{1}{f}\sqrt{fr^2 + Fr} - \frac{F}{f^{3/2}} \operatorname{arsenh} \sqrt{\frac{fr}{F}} \quad \text{para } f > 0,$$

$$\tau_0(R) - \tau = \frac{1}{f}\sqrt{fr^2 + Fr} + \frac{F}{(-f)^{3/2}} \operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{-fr}{F}} \quad \text{para } f < 0, \tag{10}$$

$$r = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} F^{1/3}(\tau_0 - \tau)^{2/3} \quad \text{para } f = 0.$$

En los dos primeros casos la dependencia funcional $r(R, \tau)$ puede representarse también en forma paramétrica:

$$r = \frac{F}{2f}(\cosh\eta - 1), \quad \tau_0 - \tau = \frac{F}{2f^{3/2}}(\operatorname{senh}\eta - \eta) \qquad \text{para } f > 0,$$

$$r = \frac{F}{-2f}(1 - \cos\eta), \quad \tau_0 - \tau = \frac{F}{2(-f)^{3/2}}(\eta - \operatorname{sen}\eta) \quad \text{para } f < 0 \tag{10a}$$

(η es un parámetro). Para ϵ obtendremos, substituyendo (8) en (4) y eliminando f mediante (9):

$$8\pi k\epsilon = \frac{F'}{r'r^2}. \tag{11}$$

Las fórmulas (8-11) determinan la solución general buscada. Obsérvese que dicha solución esencialmente depende no de tres, sino de dos funciones arbitrarias, que determinan la relación entre f, F, τ_0, ya que a la propia coordenada R puede aplicarse todavía una transformación arbitraria $R = R(R')$. Este número coincide precisamente con el mayor número posible en este caso de funciones arbitrarias «físicamente diferentes» (véase pág. 387): la distribución inicial de materia con simetría esférica se fija por dos cantidades (las distribuciones de densidad y de velocidad radial), y no existe un campo gravitatorio libre con simetría central.

El signo común en la solución (10) se ha elegido de manera que a la contracción de la esfera corresponda $\tau - \tau_0 \to -0$. La solución completa relativa al colapso de la esfera exige tener en cuenta

concretamente las condiciones iniciales y el «empalme» en la frontera de la esfera con la solución de Schwarzschild para el espacio vacío. Pero el carácter límite de la métrica dentro de la esfera se deduce inmediatamente de las fórmulas ya escritas.

Para $\tau \to \tau_0(R)$ la función $r(R, \tau)$ tiende a cero según la ley

$$r^2 \approx \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} F^{2/3} (\tau_0 - \tau)^{4/3},$$

y la función e^λ, a infinito como

$$e^\lambda \approx \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} \frac{\tau_0'^2 F^{2/3}}{1+f} \frac{1}{(\tau_0 - \tau)^{2/3}}.$$

Esto significa que todas las distancias radiales (en el sistema de referencia acompañante considerado) tienden a infinito, y las acimutales, a cero, y precisamente de forma que todos los volúmenes tienden asimismo a cero (como $\tau - \tau_0$) †). Según esto, la densidad de materia tiende a infinito:

$$8\pi k\epsilon \approx \frac{2F'}{3F\tau_0'(\tau_0 - \tau)}.$$

De esta manera, de acuerdo con lo dicho en el texto, tiene lugar el colapso hacia el centro de toda la distribución de materia ††).

En el caso particular en que la función $\tau_0(R) = \text{const}$ (es decir, cuando todas las partículas de la esfera alcanzan el centro simultáneamente) la métrica dentro de la esfera en contracción posee otro carácter. En este caso

$$r^2 \approx \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} F^{2/3} (\tau_0 - \tau)^{4/3}, \quad e^\lambda \approx \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} \frac{F'^2}{4F^{4/3}(f+1)} (\tau_0 - \tau)^{4/3},$$

$$8\pi k\epsilon \approx \frac{4}{3(\tau_0 - \tau)^2},$$

es decir, para $\tau \to \tau_0$ todas las distancias, tanto las acimutales como las radiales, tienden a cero según la misma ley ($\sim (\tau_0 - \tau)^{2/3}$); la densidad de materia tiende a infinito como $(\tau_0 - \tau)^{-2}$ de modo que su distribución tiende a ser homogénea.

El caso $\tau_0 = \text{const}$ incluye también, en particular, el colapso de una esfera totalmente homogénea. Haciendo (por ejemplo, para $f > 0$) $F/2f^{3/2} = a_0$, $f = \operatorname{senh}^2 R$ (donde a_0 es una constante), obtendremos la métrica

$$ds^2 = d\tau^2 - a^2(\tau)\,[dR^2 + \operatorname{senh}^2 R\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2)],$$

---

† La geometría en un «plano» que pasa por el centro es precisamente la misma que sobre una superficie cónica de rotación que se alargara, en el curso del tiempo, en el sentido de sus generatrices y se contrajera simultáneamente a lo largo de las circunferencias en torno del eje.

†† Claro está, para $\epsilon \to \infty$ la hipótesis de que la materia se encuentra en polvo es inadecuada, en cualquier caso, desde el punto de vista físico y hay que utilizar la ecuación ultrarrelativista de estado $p = \varepsilon/3$. Resulta entonces que el carácter general de la contracción es independiente en grado considerable de la ecuación de estado [véase *E. M. Lifshitz, I. M. Jalatnikov*, ZhETF **39**, 149 (1960)].

donde la dependencia funcional $a(\tau)$ viene dada por las ecuaciones paramétricas

$$a = a_0(\cosh\eta - 1), \quad \tau_0 - \tau = a_0(\operatorname{senh}\eta - \eta).$$

Además, la densidad es

$$8\pi k\varepsilon = \frac{6a_0}{a^3}.$$

Esta solución coincide con la métrica de un universo lleno por completo de materia homogénea (§ 109), resultado éste del todo natural, puesto que una esfera formada de materia distribuida de manera homogénea posee simetría central.

5. Eligiendo convenientemente las funciones F, f, τ_0 en la solución de Tolman (problema 4), construir el sistema de referencia más completo para el campo de una masa puntual †.

Solución. Para $F = \text{const} \neq 0$, de (11) se deduce $\epsilon = 0$, de modo que la solución se refiere al espacio vacío, es decir, describe el campo creado por la masa puntual (que se encuentra en el centro y constituye un punto singular de la métrica). Así, haciendo $F = 1$, $f = 0$, $\tau_0(R) = R$, obtendremos la métrica (100.3) ††).

Para conseguir lo que nos hemos propuesto, es necesario partir de una solución en la que se conserven, tanto los dominios de espacio-tiempo «en expansión», como los dominios «en contracción». Una solución de este tipo es la de Tolman con $f < 0$; por (10*a*) es claro que, en este caso, al variar con monotonía el parámetro η (de 0 a 2π) para un valor dado de R,el tiempo τ varía también de manera monótona, y r pasa por un máximo. Hagamos

$$F = r_g, \quad f = -\frac{1}{\left(\frac{R}{r_g}\right)^2 + 1}, \quad \tau_0 = \frac{\pi}{2} r_g \left(\frac{R^2}{r_g^2} + 1\right)^{3/2}.$$

Entonces se tiene:

$$\frac{r}{r_g} = \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{r_g^2} + 1\right)(1 - \cos\eta),$$

$$\frac{\tau}{r_g} = \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{r_g^2} + 1\right)^{3/2}(\pi - \eta + \operatorname{sen}\eta)$$

(con η variando entre 0 y 2π).

---

† Este sistema fue descubierto por M. Kruskal [Phys. Rev. **119**, 1743 (1960)]. La forma de la solución que se presenta aquí (y en la cual el sistema de referencia es síncrono) se debe a I. D. Novikov, (1963).

†† En cambio, el caso $F = 0$ corresponde a la inexistencia de campo; mediante un cambio de coordenadas, la métrica se puede reducir a la forma galileana.

En la fig. 22 las líneas ACB y $A'C'B'$ corresponden a $r = 0$ (con valores del parámetro $\eta = 2\pi$ y $\eta = 0$). Las líneas AOA' y BOB' corresponden a la esfera de Schwarzschild, $r = r_g$. Entre $A'C'B'$ y $A'OB'$ se encuentra un dominio de espacio-tiempo en el que únicamente es posible el movimiento a partir del centro, y entre ACB y AOB, un dominio en el que el movimiento tiene lugar tan sólo en dirección hacia el mismo.

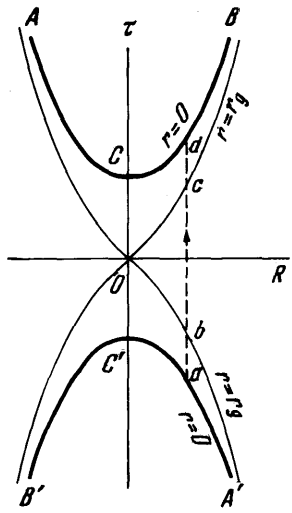

FIG. 22.

La línea de universo de una partícula que se encuentra en reposo respecto del sistema de referencia dado, es una recta vertical ($R = \text{const}$). Esta línea parte de $r = 0$ (punto a), corta la esfera de Schwarzschild en el punto b y alcanza en el instante $\tau = 0$ el máximo alejamiento [$r = r_g (R^2/r_g^2 + 1$] tras lo cual la partícula de nuevo empieza a caer hacia la esfera de Schwarzschild, la atraviesa en el punto c y alcanza otra vez $r = 0$ (punto d) en el instante

$$\tau = \frac{\pi}{2}\left(\frac{R^2}{r_g^2} + 1\right)^{3/2} r_g.$$

El sistema así obtenido es completo: los dos extremos de la línea de universo de cualquier partícula que se mueve en el campo se encuentran, o bien en la singularidad real $r = 0$, o escapan al infinito. La métrica (100.3) abarca solamente el dominio a la derecha de la línea AOA' (o a la izquierda de la BOB'), y el propio sistema de referencia «en expansión», el dominio a la derecha de BOB' (o a la izquierda de AOA'). El sistema con la métrica (97.14) abarca solamente la región a la derecha de BOA' (o a la izquierda de AOB').

§ 101. El pseudotensor energía-impulso

Cuando no existe un campo gravitatorio, la ley de conservación de la energía y del impulso de la materia (junto con el campo electromagnético) se expresa mediante la ecuación $\partial T^{ik}/\partial x^k = 0$. La generalización de esta ecuación al caso en que existe campo gravitatorio conduce a la ecuación (94.7):

$$T^k_{i;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(T^k_i \sqrt{-g})}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} T^{kl} = 0. \qquad (101.1)$$

En esta forma, sin embargo, la ecuación que precede no expresa, en general, ninguna ley de conservación †. Ello está ligado con el hecho de que, en un campo gravitatorio, el cuadrimpulso de la materia no tiene por qué conservarse por sí solo, sino el cuadrimpulso de la materia y el campo gravitatorio; éste, sin embargo, no está incluido en la expresión anterior de T^k_i.

Para determinar la conservación del cuadrimpulso total de un campo gravitatorio junto con la materia situada en él, procederemos de la siguiente manera††. Elijamos un sistema de coordenadas tal que en un punto dado del espacio-tiempo todas las derivadas primeras de las g_{ik} se anulen (las g_{ik}, en cambio, no tienen por qué tomar necesariamente sus valores galileanos). En este punto, entonces, el segundo término de la ecuación (101.1) se anula y en el primer término podemos sacar $\sqrt{-g}$ fuera del signo de derivación, con lo que queda

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^k_i = 0,$$

o, en componentes contravariantes,

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^{ik} = 0.$$

---

† En efecto, la integral $\int T^k_i \sqrt{-g}\, dS_k$ se conserva sólo si se cumple la condición $\frac{\partial(\sqrt{-g}T^k_i)}{\partial x^k} = 0$, y no la (101.1). Es fácil comprobarlo efectuando, en coordenadas curvilíneas, todos los cálculos que en el § 29 se hicieron en coordenadas galileanas . Además, basta simplemente observar que estos cálculos tienen un carácter puramente formal, un carácter no vinculado con las propiedades tensoriales de las magnitudes correspondientes, al igual que ocurre con la demostración del teorema de Gauss, que tiene la misma forma (83.17) en coordenadas curvilíneas que en coordenadas cartesianas.

†† Podría pensarse en aplicar al campo gravitatorio la fórmula (94.4), substituyendo en ella $\Lambda = -\frac{c^4}{16\pi k} G$. Hay que subrayar, sin embargo, que esta fórmula se aplica solamente a sistemas físicos descritos por magnitudes q diferentes de las g_{ik}; por lo tanto, no se puede aplicar al campo gravitatorio, que está determinado precisamente por las magnitudes g_{ik}. Obsérvese de paso que al substituir en (94.4) G en vez de Λ obtendríamos, simplemente, cero, como resulta desde luego de la relación (95.3) y de las ecuaciones del campo en el vacío.

Las cantidades T^{ik}, que satisfacen idénticamente esta ecuación, se pueden escribir en la forma

$$T^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l}\eta^{ikl},$$

donde las η^{ikl} son cantidades antisimétricas respecto de los índices k, l:

$$\eta^{ikl} = -\eta^{ilk}.$$

No es difícil reducir efectivamente T^{ik} a esta forma. Para ello partiremos de las ecuaciones del campo:

$$T^{ik} = \frac{c^4}{8\pi k}\left(R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R\right),$$

y para R^{ik} tendremos, de acuerdo con (92.4)

$$R^{ik} = \frac{1}{2}g^{im}g^{kp}g^{ln}\left\{\frac{\partial^2 g_{lp}}{\partial x^m\,\partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^l\,\partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{ln}}{\partial x^m\,\partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^l\,\partial x^n}\right\}$$

(recordemos que en el punto considerado todos los $\Gamma^i_{kl} = 0$). Después de simples transformaciones, el tensor T^{ik} se puede llevar a la forma

$$T^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l}\left\{\frac{c^4}{16\pi k}\,\frac{1}{(-g)}\,\frac{\partial}{\partial x^m}\left[(-g)(g^{ik}g^{lm} - g^{il}g^{km})\right]\right\}.$$

La expresión entre corchetes es antisimétrica en k, l, y es precisamente la cantidad que hemos designado antes por η^{ikl}. Dado que las derivadas primeras de las g_{ik} son cero en el punto considerado, el factor $1/(-g)$ se puede sacar fuera del signo de derivación $\partial/\partial x^l$. Introduzcamos la notación

$$h^{ikl} = \frac{c^4}{16\pi k}\,\frac{\partial}{\partial x^m}\left[(-g)(g^{ik}g^{lm} - g^{il}g^{km})\right]; \tag{101.2}$$

estas cantidades son antisimétricas respecto de k, l:

$$h^{ikl} = -h^{ilk}. \tag{101.3}$$

Podemos entonces escribir:

$$\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l} = (-g)T^{ik}.$$

Esta relación, deducida en el supuesto de que $\partial g_{ik}/\partial x^l = 0$, no es ya válida cuando pasamos a un sistema arbitrario de coordenadas. En el caso general, la diferencia $\partial h^{ikl}/\partial x^l - (-g)T^{ik}$ no es nula; representémosla por $(-g)t^{ik}$. Tendremos entonces por definición,

$$(-g)\,(T^{ik} + t^{ik}) = \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}. \tag{101.4}$$

Las cantidades t^{ik} son simétricas respecto de i, k:

$$t^{ik} = t^{ki}. \tag{101.5}$$

Que así es se deduce de su propia definición, ya que, al igual que el tensor T^{ik}, las derivadas $\partial h^{ikl}/\partial x^l$ son cantidades simétricas †. Expresando T^{ik} en función de R^{ik}, de acuerdo con las ecuaciones de la gravitación, y teniendo en cuenta la expresión (101.2) de las h^{ikl}, se obtiene, después de un cálculo bastante largo, la siguiente expresión para las t^{ik}:

$$\begin{aligned} t^{ik} = \frac{c^4}{16\pi k}\{&(2\Gamma^n_{lm}\Gamma^p_{np} - \Gamma^n_{lp}\Gamma^p_{mn} - \Gamma^n_{ln}\Gamma^p_{mp})(g^{il}g^{km} - g^{ik}g^{lm}) + \\ &+ g^{il}g^{mn}(\Gamma^k_{lp}\Gamma^p_{mn} + \Gamma^k_{mn}\Gamma^p_{lp} - \Gamma^k_{np}\Gamma^p_{lm} - \Gamma^k_{lm}\Gamma^p_{np}) + \\ &+ g^{kl}g^{mn}(\Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{mn} + \Gamma^i_{mn}\Gamma^p_{lp} - \Gamma^i_{np}\Gamma^p_{lm} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^p_{np}) + \\ &+ g^{lm}g^{np}(\Gamma^i_{ln}\Gamma^k_{mp} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^k_{np}), \end{aligned} \tag{101.6}$$

o bien, en función directamente de las derivadas de las componentes del tensor métrico,

$$\begin{aligned} (-g)t^{ik} = \frac{c^4}{16\pi k}\{&\mathfrak{g}^{ik}{}_{,l}\mathfrak{g}^{lm}{}_{,m} - \mathfrak{g}^{il}{}_{,l}\mathfrak{g}^{km}{}_{,m} + \tfrac{1}{2}g^{ik}g_{lm}\mathfrak{g}^{ln}{}_{,p}\mathfrak{g}^{pm}{}_{,n} - \\ &- (g^{il}g_{mn}\mathfrak{g}^{kn}{}_{,p}\mathfrak{g}^{mp}{}_{,l} + g^{kl}g_{mn}\mathfrak{g}^{in}{}_{,p}\mathfrak{g}^{mp}{}_{,l}) + g_{lm}g^{np}\mathfrak{g}^{il}{}_{,n}\mathfrak{g}^{km}{}_{,p} + \\ &+ \tfrac{1}{8}(2g^{il}g^{km} - g^{ik}g^{lm})(2g_{np}g_{qr} - g_{pq}g_{nr})\mathfrak{g}^{nr}{}_{,l}\mathfrak{g}^{pq}{}_{,m}\}, \end{aligned} \tag{101.7}$$

donde $\mathfrak{g}^{ik} = \sqrt{-g}\,g^{ik}$, mientras que el índice $,i$ significa la derivación ordinaria respecto de x^i.

Una propiedad esencial de las cantidades t^{ik} es que no constituyen un tensor; basta para verlo tener en cuenta que en $\partial h^{ikl}/\partial x^l$ figura la derivación ordinaria, no la covariante. Sin embargo, t^{ik} se expresa en función de las cantidades Γ^i_{kl} y éstas se comportan como un tensor respecto de las transformaciones lineales de coordenadas (véase § 85); por consiguiente, lo mismo vale para las t^{ik}.

De la definición (101.4) se sigue que la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(-g)(T^{ik} + t^{ik}) = 0 \tag{101.8}$$

queda satisfecha idénticamente por la suma $T^{ik} + t^{ik}$. Esto significa que existe una ley de conservación para las cantidades.

$$P^i = \frac{1}{c}\int (-g)(T^{ik} + t^{ik})\, dS_k. \tag{101.9}$$

† Precisamente por esta razón se ha sacado $(-g)$ fuera del signo de derivación respecto de x^l en la expresión de T^{ik}. De no haberlo hecho, $\partial h^{ikl}/\partial x^l$ y, por lo tanto, también t^{ik}, no hubieran resultado simétricas en i, k.

Cuando no existe campo gravitatorio, en coordenadas galileanas es $t^{ik} = 0$ y la integral que acabamos de escribir se reduce a $\frac{1}{c}\int T^{ik}\, dS_k$, esto es, al cuadrimpulso de la materia. Por lo tanto, la cantidad (101.9) debe identificarse con el cuadrimpulso del sistema materia más campo gravitatorio. El conjunto de las cantidades t^{ik} se llama *pseudotensor energía-impulso* del campo gravitatorio.

La integración en (101.9) se puede extender a cualquier hipersuperficie infinita, con tal que incluya la totalidad del espacio de tres dimensiones. Si elegimos para esta hipersuperficie la $x^0 = \text{const}$, P^i se puede escribir en forma de integral en un espacio de tres dimensiones:

$$P^i = \frac{1}{c}\int (-g)\,(T^{i0}+t^{i0})\, dV. \tag{101.10}$$

Este hecho, el de que el cuadrimpulso total de materia más campo se pueda expresar como integral de la cantidad $(-g)\,(T^{ik}+t^{ik})$, simétrica respecto de los índices i, k, es muy importante. Significa que existe una ley de conservación del cuadrimomento cinético definido por (véase § 32) †

$$M^{ik} = \int (x^i\, dP^k - x^k\, dP^i) = \frac{1}{c}\int \{x^i\,(T^{kl}+t^{kl}) - x^k(T^{il}+t^{il})\}\,(-g)\, dS_l. \tag{101.11}$$

De esta manera, también en la teoría de la relatividad general se conserva el momento cinético total de un sistema de cuerpos gravitatorios aislado y, además, se puede definir como antes un centro de masa que se mueve con movimiento uniforme. Esto último depende de la conservación de las componentes $M^{0\alpha}$ (cf. § 14), que se expresa por la ecuación

$$x^0 \int (T^{\alpha 0}+t^{\alpha 0})\,(-g)\, dV - \int x^\alpha (T^{00}+t^{00})\,(-g)\, dV = \text{const},$$

de modo que las coordenadas del centro de masa vienen dadas por la fórmula

$$X^\alpha = \frac{\int x^\alpha\,(T^{00}+t^{00})\,(-g)\, dV}{\int (T^{00}+t^{00})\,(-g) dV}. \tag{101.12}$$

---

† Es necesario advertir que la expresión que hemos obtenido para el cuadrimpulso del sistema materia más campo no es, en modo alguno, la única posible. Por el contrario, de infinitas maneras (véase, por ejemplo, el problema en este párrafo) se pueden formar expresiones que, cuando no existe un campo, se reducen a T^{ik} y que, al ser integradas respecto de dS_k, conducen a magnitudes que se conservan. Sin embargo, la expresión elegida por nosotros es la única para la que el pseudotensor energía-impulso del campo contiene solamente derivadas primeras (y no de orden superior) de las g_{ik} (condición ésta que es completamente natural desde el punto de vista físico), y es, además, simétrico, de manera que permite formular una ley de conservación del momento cinético.

Eligiendo un sistema de coordenadas inercial en un elemento de volumen dado, podemos conseguir que todas las t^{ik} se anulen en un punto cualquiera del espacio-tiempo (ya que entonces se anulan todos los Γ^i_{kl}). Por otra parte, podemos obtener valores de las t^{ik} diferentes de cero en el espacio plano, es decir, en ausencia de un campo gravitatorio, sin más que utilizar coordenadas curvilíneas en vez de coordenadas cartesianas. Así, en cualquier caso, carece de sentido hablar de una cierta localización de la energía del campo gravitatorio en el espacio. Si el tensor T_{ik} es cero en un punto de universo, entonces tal ocurre en cualquier sistema de referencia, de modo que podemos decir que en este punto no existe ni materia ni campo electromagnético. Por el contrario, de la anulación de un pseudotensor en un punto respecto de un sistema de referencia no se sigue, en modo alguno, que así ocurra en otro sistema de referencia, de modo que carece de sentido hablar de si existe o no energía gravitatoria en un lugar dado. Esto está ligado íntimamente con el hecho de que mediante una elección adecuada de coordenadas podemos « anular » el campo gravitatorio en un elemento de volumen dado, en cuyo caso, por lo dicho antes, el pseudotensor t^{ik} se anula también en dicho elemento de volumen.

En cambio, las cantidades P^i (el cuadrimpulso del sistema campo más materia) tienen un sentido completamente definido y son independientes de la elección del sistema de referencia en la medida necesaria de acuerdo con las consideraciones físicas.

Delimitemos en torno de las masas consideradas una región de espacio suficientemente grande para que podamos decir que fuera de ella no existe campo gravitatorio. En el curso del tiempo, esta región forma un « canal » en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones. Fuera de él no hay campo, con lo que el espacio de cuatro dimensiones es plano. Debido a ello, al calcular la energía y el impulso del campo hemos de elegir un sistema de referencia cuadridimensional de manera que, fuera del canal, el sistema se reduzca a un sistema galileano y se anulen todas las t^{ik}.

Esta condición no determina, naturalmente el sistema de referencia de manera unívoca — existe todavía la posibilidad de elegirlo arbitrariamente en el interior del canal. Sin embargo, las P^i, en completo acuerdo con su significado físico, resultan ser del todo independientes de la elección del sistema de coordenadas en el interior del canal. En efecto, consideremos dos sistemas de coordenadas diferentes en el interior del mismo, pero que se reducen fuera de él al mismo sistema galileano, y comparemos los valores del cuadrimpulso P^i y P'^i en estos dos sistemas para determinados instantes del « tiempo » x^0 y x'^0. Introduzcamos un tercer sistema de coordenadas que, en el interior del canal, coincida en el instante x^0 con el primer sistema, y en el instante x'^0 coincida con el segundo, manteniéndose galileano fuera del canal. En virtud de la ley de conservación de la energía y el impulso, las cantidades P^i son constantes ($\partial P^i/\partial x^0 = 0$). Tal ocurre para el tercer sistema de coor-

denadas, al igual que para los otros dos. De aquí se sigue que $P^i = P'^i$, como queríamos demostrar.

Dijimos antes que las cantidades t^{ik} se comportan como un tensor respecto de las transformaciones lineales de coordenadas. Por lo tanto, las cantidades P^i forman un vector respecto de tales transformaciones y, en particular, respecto de las transformaciones de Lorentz que llevan, en el infinito, de un sistema de referencia galileano a otro †.

El cuadrimpulso P^i puede expresarse también como integral extendida a una superficie de tres dimensiones situada en el infinito y que abarque « todo el espacio ». Substituyendo (101.4) en (101.9), se encuentra

$$P^i = \frac{1}{c} \int \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l} \, dS_k.$$

Esta integral se puede transformar en una integral extendida a una superficie ordinaria mediante (6.17):

$$P^i = \frac{1}{2c} \oint h^{ikl} \, df^*_{kl}. \tag{101.13}$$

Si como superficie de integración en (101.9) elegimos la hipersuperficie $x^0 = \text{const}$, la superficie de integración en (101.13) resulta ser entonces una superficie del espacio ordinario††:

$$P^i = \frac{1}{c} \oint h^{i0\alpha} \, df_\alpha. \tag{101.14}$$

Para deducir la fórmula análoga correspondiente al momento cinético, escribiremos la fórmula (101.2) en la forma:

$$h^{ikl} = \frac{\partial}{\partial x^m} \lambda^{iklm}; \tag{101.15}$$

---

† Estrictamente hablando, en la definición (101.9) P^i es un cuadrivector tan sólo respecto de las transformaciones lineales cuyo determinante es igual a la unidad; entre ellas se encuentran las transformaciones de Lorentz, que son las únicas que interesan desde el punto de vista físico. Si se admiten también transformaciones cuyo determinante no es igual a la unidad, hay que introducir entonces en la definición de P^i el valor de g en el infinito, escribiendo $\sqrt{-g_\infty} P^i$ en lugar de P^i en el primer miembro de (101.9).

†† La cantidad df^*_{kl} es el elemento de superficie « normal » ligado al elemento « tangente » df^{ik} por (6.11): $df^*_{ik} = \frac{1}{2} e_{iklm} \, df^{lm}$. Sobre la superficie que limita a la hipersuperficie perpendicular al eje x^0, las únicas componentes no nulas de df^{lm} son aquéllas para las que $l, m = 1, 2, 3$, y así df^*_{ik} tiene sólo aquellas componentes en las que o i o k es 0. Las componentes $df^*_{0\alpha}$ son precisamente las componentes del elemento tridimensional de superficie ordinaria, que hemos representado simplemente por df_α.

la expresión de las cantidades λ^{iklm} en función de las componentes del tensor métrico es evidente en (101.2). Substituyendo (101.4) en (101.11) e integrando por partes, se obtiene:

$$M^{ik} = \frac{1}{c}\int\left(x^i\frac{\partial^2\lambda^{klmn}}{\partial x^m\,\partial x^n} - x^k\frac{\partial^2\lambda^{ilmn}}{\partial x^m\,\partial x^n}\right)dS_l$$

$$= \frac{1}{2c}\int\left(x^i\frac{\partial\lambda^{klmn}}{\partial x^n} - x^k\frac{\partial\lambda^{ilmn}}{\partial x^n}\right)df^*_{lm} - \frac{1}{c}\int\left(\delta^i_m\frac{\partial\lambda^{klmn}}{\partial x^n} - \delta^k_m\frac{\partial\lambda^{ilmn}}{\partial x^n}\right)dS_l$$

$$= \frac{1}{2c}\int(x^i h^{klm} - x^k h^{ilm})\,df^*_{lm} - \frac{1}{c}\int\frac{\partial}{\partial x^n}(\lambda^{klin} - \lambda^{ilkn})\,dS_l.$$

De la definición de las cantidades λ^{iklm} se deduce fácilmente que

$$\lambda^{ilkn} - \lambda^{klin} = \lambda^{ilnk}, \quad \lambda^{inlk} = -\lambda^{ilnk}.$$

Por consiguiente, la integral que queda respecto de dS_l es igual a

$$\frac{1}{c}\int\frac{\partial\lambda^{ilnk}}{\partial x^n}\,dS_l = \frac{1}{2c}\int\lambda^{ilnk}\,df^*_{ln}.$$

Finalmente, eligiendo de nuevo una superficie puramente espacial como superficie de integración, obtenemos:

$$M^{ik} = \frac{1}{c}\int(x^i h^{k0\alpha} - x^k h^{i0\alpha} + \lambda^{i0\alpha k})\,df_\alpha. \qquad (101\,16)$$

Hay que recordar que al aplicar las fórmulas (101.14) y (101.16), de acuerdo con lo dicho antes, el sistema de coordenadas espaciales debe elegirse de manera que en el infinito las g_{ik} tiendan a sus valores galileanos constantes. Así, para calcular de acuerdo con (101.14) el cuadrimpulso de un sistema aislado de cuerpos que se mantienen siempre cerca del origen de coordenadas, podemos utilizar para la métrica a gran distancia de dichos cuerpos la expresión (97.18), transformándola de coordenadas esféricas espaciales a cartesianas (para lo cual debemos substituir dr por $n_\alpha dx^\alpha$, donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario correspondiente a $\mathbf{r}$); el tensor métrico asociado es

$$g_{00} = 1 - \frac{2km}{c^2 r}, \quad g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta} - \frac{2km}{c^2}\frac{n_\alpha n_\beta}{r}, \quad g_{0\alpha} = 0, \qquad (101.17)$$

donde m es la masa total del sistema. Calculando las componentes de h^{ikl} que nos hacen falta mediante la fórmula (101.2), se obtiene, dentro del orden de precisión

requerido (se conservan los términos $\sim 1/r^2$):

$$h^{\alpha 0\beta} = 0,$$

$$h^{00\alpha} = \frac{c^4}{16\pi k}\frac{\partial}{\partial x^\beta}(g^{00}g^{\alpha\beta}) = \frac{mc^2}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(-\frac{\delta^{\alpha\beta}}{r}+\frac{x^\alpha x^\beta}{r^3}\right) = \frac{mc^2}{4\pi}\frac{n^\alpha}{r^2}.$$

Integrando ahora (101.14) sobre una esfera de radio r, obtenemos finalmente:

$$P^\alpha = 0, \quad P^0 = mc, \tag{101.18}$$

resultado que era de esperar. No expresa, en efecto, sino la igualdad de la masa « gravitatoria » y la masa « *inerte* » (masa « *gravitatoria* » se llama la masa que determina al campo gravitatorio producido por un cuerpo; es ésta la masa que interviene en la expresión del intervalo en un campo gravitatorio, o, en particular, en la ley de Newton; la masa « inerte », en cambio, determina la relación entre el impulso y la energía de un cuerpo, y, en particular, la energía en reposo de un cuerpo es igual a esta masa multiplicada por c^2).

En el caso de un campo gravitatorio constante es posible deducir una sencilla expresión para la energía total del sistema materia más campo en forma de integral extendida únicamente al espacio ocupado por la materia. Para obtener esta expresión, se puede, por ejemplo, partir de la siguiente identidad, válida, como es fácil comprobar, cuando todas las cantidades son independientes de x^0 †:

$$R_0^0 = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{-g}\, g^{i0}\Gamma^\alpha_{0i}).$$

Integrando $R_0^0\sqrt{-g}$ en el espacio tridimensional y aplicando el teorema de Gauss, se obtiene:

$$\int R_0^0\sqrt{-g}\, dV = \oint \sqrt{-g}\, g^{i0}\Gamma^\alpha_{0i}\, df_\alpha.$$

† De (92.10) se deduce

$$R_0^0 = g^{0i}R_{i0} = g^{0i}\left(\frac{\partial\Gamma^l_{i0}}{\partial x^l}+\Gamma^l_{i0}\Gamma^m_{lm}-\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{0m}\right),$$

y mediante (86.5) y (86.8) se encuentra que esta expresión se puede escribir

$$R_0^0 = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\, g^{0i}\Gamma^l_{i0})+g^{im}\Gamma^0_{ml}\Gamma^l_{i0}.$$

Las mismas relaciones (86.8) permiten comprobar fácilmente que el segundo término del segundo miembro es igual a $-\frac{1}{2}\Gamma^0_{lm}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^0}$, y se anula como consecuencia de que todas las cantidades son independientes de x^0. Finalmente, por la misma razón, reemplazando la suma respecto de l en el primer término por una suma respecto de α, se obtiene la fórmula del texto.

Tomando una superficie de integración suficientemente alejada y aplicando en ella las expresiones (101.17) de las g_{ik}, se obtiene, después de un cálculo simple:

$$\int R_0^0 \sqrt{-g}\, dV = \frac{4\pi k}{c^2} m = \frac{4\pi k}{c^3} P^0.$$

Si se tiene también en cuenta que las ecuaciones del campo dan

$$R_0^0 = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_0^0 - \frac{1}{2} T\right) = \frac{4\pi k}{c^4}(T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3),$$

se llega a la expresión pedida

$$P^0 = mc = -\frac{1}{c}\int (T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 - T_0^0)\sqrt{-g}\, dV\,. \tag{101.19}$$

Esta fórmula expresa la energía total del sistema materia y campo gravitatorio constante (es decir, la masa total de los cuerpos) en función del tensor energía-impulso de la materia solamente (R. Tolman, 1930). Recordemos que en el caso de un campo central obtuvimos otra expresión para esta misma cantidad, la fórmula (97.23).

PROBLEMA

Obtener la expresión del cuadrimpulso total de la materia y el campo gravitatorio utilizando las fórmulas (32.5).

Solución. En coordenadas curvilíneas se tiene, en vez de (32.1),

$$S = \int \Lambda \sqrt{-g}\, dV\, dt,$$

y, por consiguiente, para obtener una cantidad que se conserve hay que escribir en (32.5) $\Lambda\sqrt{-g}$ en vez de Λ, de modo que el cuadrimpulso toma la forma:

$$P_i = \frac{1}{c}\int \left\{ -\Lambda\sqrt{-g}\,\delta_i^k + \sum \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^i} \frac{\partial(\sqrt{-g}\,\Lambda)}{\partial \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^k}} \right\} dS_k.$$

Al aplicar esta fórmula a la materia, para la que las cantidades $q^{(l)}$ son diferentes de las g_{ik}, podemos sacar $\sqrt{-g}$ fuera del signo de derivación con lo que el integrando resulta ser igual a $\sqrt{-g}\,T_i^k$, donde T_i^k es el tensor energía-impulso de la materia. Al aplicar esta misma fórmula al campo gravitatorio, hay que hacer $\Lambda = -\frac{c^4}{16\pi k} G$, mientras que las cantidades $q^{(l)}$ son ahora las componentes g_{ik} del tensor métrico. El cuadrimpulso total del campo más la materia es igual, por lo tanto, a

$$P_i = \frac{1}{c}\int T_i^k \sqrt{-g}\, dS_k + \frac{c^3}{16\pi k}\int \left[G\sqrt{-g}\,\delta_i^k - \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} \frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}} \right] dS_k\,.$$

Utilizando la expresión (93.3) de G, esta fórmula se puede escribir también en la forma:

$$P_i = \frac{1}{c}\int \left\{ T_i^k \sqrt{-g} + \frac{c^4}{16\pi k}\left[G\sqrt{-g}\,\delta_i^k + \Gamma_{lm}^k \frac{\partial (g^{lm}\sqrt{-g})}{\partial x^i} - \Gamma_{ml}^l \frac{\partial (g^{mk}\sqrt{-g})}{\partial x^i}\right]\right\} dS_k .$$

El segundo término entre corchetes da el cuadrimpulso del campo gravitatorio cuando no hay materia. El integrando no es simétrico respecto de los índices i, k, de modo que no se puede formular una ley de conservación del momento cinético.

§ 102. Ondas gravitatorias

Consideremos un campo gravitatorio débil en el vacío. En un campo débil, la métrica del espacio-tiempo es « casi galileana », es decir, podemos elegir un sistema de referencia en el que las componentes del tensor métrico son casi iguales a sus valores galileanos, que representaremos por

$$g_{\alpha\beta}^{(0)} = -\delta_{\alpha\beta}, \quad g_{\alpha 0}^{(0)} = 0, \quad g_{00}^{(0)} = 1. \tag{102.1}$$

Podemos, por consiguiente, escribir las g_{ik} en la forma:

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}, \tag{102.2}$$

donde las h_{ik} son pequeñas correcciones determinadas por el campo gravitatorio.

Si las h_{ik}, son pequeñas, las componentes Γ_{kl}^i, que se expresan en función de las derivadas de las g_{ik}, son también pequeñas. Prescindiendo de las potencias de h_{ik} superiores a la primera, podemos conservar en el tensor R_{iklm} (92.4) sólo los términos que figuran en el primer paréntesis:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m}\right). \tag{102.3}$$

Para el tensor contracto R_{ik} tenemos, dentro del mismo orden,

$$R_{ik} = g^{lm} R_{limk} \approx g^{(0)lm} R_{limk}$$

o

$$R_{ik} = \frac{1}{2}\left(-g^{(0)lm}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 h_i^l}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_k^l}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^k}\right), \tag{102.4}$$

donde $h = h_i^i$ †.

† De acuerdo con la aproximación adoptada, todas las operaciones de subir y bajar índices de tensores y vectores que son pequeños se efectúan aquí, y en lo que sigue, utilizando el tensor métrico « no perturbado » $g_{ik}^{(0)}$. Por ejemplo, $h_i^k = g^{(0)kl} h_{il}$, etc.

Tenemos entonces para las componentes contravariantes g^{ik}:

$$g^{ik} = g^{(0)ik} - h^{ik} \tag{102.2 a}$$

(de modo que, salvo términos de orden superior al primero, queda satisfecha la condición $g_{il} g^{lk} = \delta_i^k$). El determinante del tensor métrico es:

$$g = g^{(0)} (1 + g^{(0)ik} h_{ik}) = g^{(0)} (1 + h) \tag{102.2 b}$$

Hemos elegido el sistema de referencia de manera que las g_{ik} difieren poco de las $g_{ik}^{(0)}$. Pero esta condición se conserva también en una transformación de coordenadas infinitesimal, de modo que podemos todavía imponer a las h_{ik} cuatro condiciones (igual al número de coordenadas) sin violar la condición de que las h_{ik} sean pequeñas. Como condiciones suplementarias eligiremos las ecuaciones

$$\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} = 0,$$

$$\psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k h. \tag{102.5}$$

Hay que señalar que, incluso con estas condiciones, el sistema de coordenadas no queda determinado unívocamente; veamos qué transformaciones son todavía admisibles. En la transformación $x'^i = x^i + \xi^i$, donde las ξ^i son cantidades pequeñas, el tensor g_{ik} se transforma en

$$g'_{ik} = g_{ik} - \frac{\partial \xi_l}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i},$$

es decir,

$$h'_{ik} = h_{ik} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i} \tag{102.6}$$

[véase la fórmula (94.3), con la derivación covariante reducida, en el presente caso, a la derivación ordinaria debido a la constancia de $g_{ik}^{(0)}$]. Se ve entonces fácilmente que si las h_{ik} satisfacen la condición (102.5), las h'_{ik} satisfarán también esta condición, con tal que las ξ_i sean soluciones de la ecuación

$$\Box \xi_i = 0, \tag{102.7}$$

donde $\Box$ simboliza el operador de d'Alembert.

$$\Box = -g^{(0)lm}\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

De la condición (102.5) se sigue que los últimos tres términos de la expresión (102.4) de R_{ik} se reducen entre sí, y encontramos:

$$R_{ik} = \frac{1}{2}\Box h_{ik}.$$

La ecuación del campo gravitatorio en el vacío toma así la forma

$$\Box h_i^k = 0. \tag{102.8}$$

Ésta no es sino la ecuación ordinaria de las ondas. Los campos gravitatorios, por consiguiente, al igual que los campos electromagnéticos, se propagan en el vacío con la velocidad de la luz.

Consideremos una onda gravitatoria plana. En una onda de este tipo el campo cambia solamente a lo largo de una dirección en el espacio; elijamos el eje $x^1 = x$ en esta dirección. La ecuación (102.8) pasa a ser entonces

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) h_i^k = 0, \tag{102.9}$$

cuya solución es una función cualquiera de $t \pm x/c$ (§ 47).

Consideremos una onda que se propaga a lo largo del eje x en sentido positivo. Todas las cantidades h_i^k son entonces funciones de $t-x/c$. Las condiciones suplementarias (102.5) dan en este caso $\dot{\psi}_i^1 - \dot{\psi}_i^0 = 0$, donde el punto sobre una letra significa la derivación respecto de t. Estas igualdades se pueden integrar sin más que prescindir del signo de derivación — las constantes de integración se pueden tomar iguales a cero, ya que solamente nos interesa aquí (como en el caso de las ondas electromagnéticas) la parte variable del campo. Tenemos así entre las componentes ψ_i^k las relaciones

$$\psi_1^1 = \psi_1^0, \quad \psi_2^1 = \psi_2^0, \quad \psi_3^1 = \psi_3^0, \quad \psi_0^1 = \psi_0^0. \tag{102.10}$$

Conforme se señaló, las condiciones (102.5) no determinan aun el sistema de referencia unívocamente. Es posible todavía someter las coordenadas a una transformación de la forma $x'^i = x^i + \xi^i(t-x/c)$. Estas transformaciones se pueden emplear para anular las cuatro cantidades ψ_1^0, ψ_2^0, ψ_3^0, $\psi_2^2 + \psi_3^3$. De las igualdades (102.10) se sigue entonces que también las componentes ψ_1^1, ψ_2^1, ψ_3^1, ψ_0^1 se anulan. En cuanto a las demás cantidades ψ_2^3, $\psi_2^2 - \psi_3^3$, no es posible conseguir que se anulen mediante la elección del sistema de referencia, ya que, conforme se ve en (102.6), estas componentes no cambian en una transformación $x'^i = x^i + \xi^i(t-x/c)$. Obsérvese que también se anula $\psi = \psi_i^i$ y que, por lo tanto, $\psi_i^k = h_i^k$.

Una onda gravitatoria plana viene así determinada por dos cantidades, h_{23} y $h_{22} = -h_{33}$. Con otras palabras, las ondas gravitatorias son ondas transversales cuya polarización está determinada por un tensor simétrico de segundo orden en el plano yz, y tal que la suma de sus elementos diagonales, $h_{22} + h_{33}$, es igual a cero.

Calculemos el flujo de energía en una onda gravitatoria plana. En un campo gravitatorio, dicho flujo está determinado por las cantidades $-cgt^{0\alpha} \approx ct^{0\alpha}$. Para una onda que se propaga a lo largo del eje x^1, es claro que únicamente la componente t^{01} es diferente de cero.

El pseudotensor t^{ik} es de segundo orden de magnitud; hemos de calcular la componente t^{01} tan sólo dentro de este orden de aproximación. Partiendo de la fórmula (101.6) y teniendo en cuenta que, en una onda plana, las únicas compo-

nentes h_{ik} diferentes de cero son h_{23}, $h_{22} = -h_{33}$, se llega al resultado siguiente:

$$t^{01} = -\frac{c^3}{32\pi k}\left(\frac{\partial h_{22}}{\partial x}\frac{\partial h_{22}}{\partial t} + \frac{\partial h_{33}}{\partial x}\frac{\partial h_{33}}{\partial t} + 2\frac{\partial h_{23}}{\partial x}\frac{\partial h_{23}}{\partial t}\right).$$

Si todas las cantidades son funciones tan sólo de $t - x/c$, de aquí se sigue finalmente:

$$t^{01} = \frac{c^2}{16\pi k}[\dot{h}_{23}^2 + \tfrac{1}{4}(\dot{h}_{22} - \dot{h}_{33})^2]. \tag{102.11}$$

Dado que posee una determinada energía, una onda gravitatoria produce en torno de sí un cierto campo gravitatorio adicional. Este campo es una cantidad de orden superior (de segundo orden) respecto del campo de la propia onda, ya que la energía que lo produce es una cantidad de segundo orden.

Como condiciones iniciales para el campo arbitrario de una onda gravitatoria hay que fijar cuatro funciones arbitrarias de las coordenadas: debido al carácter transversal del campo, hay sólo dos componentes independientes $h_{\alpha\beta}$ y, además, debemos fijar sus derivadas primeras respecto del tiempo. Aunque aquí hemos llegado a este resultado partiendo de las propiedades de un campo gravitatorio débil, es claro que el hecho de que sean 4 las funciones arbitrarias no se puede vincular a esta hipótesis y vale para cualquier campo gravitatorio libre, es decir, para cualquier campo que no esté ligado a masas gravitatorias.

Problemas

1. Determinar el tensor de curvatura en el campo de una onda gravitatoria plana débil.

Solución. Calculando R_{iklm} según la fórmula (92.4) en la aproximación lineal respecto de h_{ik}, se encuentran las siguientes componentes no nulas:

$$-R_{0202} = R_{0303} = -R_{1212} = R_{0212} = R_{0331} = R_{3131} = \sigma,$$
$$R_{0203} = -R_{1231} = -R_{0312} = R_{0231} = \mu,$$

donde se ha hecho $\sigma = -\frac{1}{2}\ddot{h}_{33} = \frac{1}{2}\ddot{h}_{22}$, $\mu = -\frac{1}{2}\ddot{h}_{23}$. En términos de los tensores tridimensionales $A_{\alpha\beta}$ y $B_{\alpha\beta}$ introducidos en el problema 3 del § 92, tenemos:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & \mu \\ 0 & \mu & \sigma \end{pmatrix}, \qquad B_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \sigma \\ 0 & \sigma & -\mu \end{pmatrix}.$$

Mediante un giro de los ejes x^2, x^3 es posible anular una de las cantidades σ o μ (en un punto dado del cuadriespacio); anulando σ, reducimos el tensor de curvatura al tipo II degenerado de Petrov (tipo N).

2. Hallar las pequeñas correcciones al tensor R_{ik} para una métrica «no perturbada» arbitraria $\overset{(0)}{g}_{ik}$.

Solución. Las correcciones a los símbolos de Christoffel se expresan en función de $\delta g_{ik} = h_{ik}$ de acuerdo con

$$\delta\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}(h^i_{k;\,l} + h^i_{l;\,k} - h_{kl}{}^{;\,i}),$$

de lo que es fácil convencerse mediante un cálculo directo (aquí y en lo que sigue todas las operaciones de subir y bajar índices, y también las derivaciones covariantes, se efectúan de acuerdo con la métrica $\overset{(0)}{g}_{ik}$). Para las correcciones al tensor de curvatura se obtiene

$$\delta R^i_{klm} = \frac{1}{2}(h^i_{k;\,m;\,l} + h^i_{m;\,k;\,l} - h_{km}{}^{;\,i}{}_{;\,l} - h^i_{k;\,l;\,m} - h^i_{l;\,k;\,m} + h_{kl}{}^{;\,i}{}_{;\,m}).$$

De aquí se siguen las correcciones al tensor de Ricci:

$$\delta R_{ik} = \delta R^l_{ilk} = \frac{1}{2}(h^l_{i;\,k;\,l} + h^l_{k;\,i;\,l} - h_{ik}{}^{;\,l}{}_{;\,l} - h_{;\,i;\,k}). \tag{1}$$

De la relación

$$R^{(0)}{}^k_i + \delta R^k_i = (R^{(0)}_{li} + \delta R_{il})\,(g^{(0)\,kl} - h^{kl})$$

se sigue para las correcciones relativas a las componentes mixtas R^k_i:

$$\delta R^k_i = g^{(0)\,kl}\,\delta R_{il} - h^{kl}R^{(0)}_{il}. \tag{2}$$

§ 103. Soluciones exactas de las ecuaciones del campo gravitatorio dependientes de una sola variable

En este párrafo consideramos los tipos posibles de soluciones exactas de las ecuaciones del campo gravitatorio, en el vacío, cuando todas las componentes del tensor métrico son funciones de una sola variable con tal de elegir convenientemente el sistema de referencia† Esta variable puede ser bien de carácter temporal, bien de carácter espacial; para concretar, supondremos primero que es temporal y la representaremos por $x^0 = t$ ††.

Conforme veremos, se obtienen tipos esencialmente distintos de soluciones según sea o no posible elegir un sistema de referencia en el que todas las componentes $g_{0\alpha} = 0$, mientras, a la vez, todas las restantes componentes siguen dependiendo de una sola variable.

Es evidente que esta última condición admite transformaciones de las coordenadas x^α de la forma

$$x^\alpha \to x^\alpha + \phi^\alpha(t)$$

† Toda una serie de soluciones exactas de las ecuaciones del campo en el vacío que dependen de un número mayor de variables se encuentran en los artículos de B. K. Harrison, Phys. Rev. 116, 1285 (1959).

†† En este párrafo, para simplificar la escritura de las fórmulas, haremos $c = 1$.

donde las ϕ^α son funciones arbitrarias de t. Para una transformación de este tipo,

$$g_{0\alpha} \to g_{0\alpha} + g_{\alpha\beta}\dot{\phi}^\beta$$

(el punto significa derivación respecto de t). Si el determinante $|g_{\alpha\beta}| \neq 0$, el sistema de ecuaciones

$$g_{0\alpha} + g_{\alpha\beta}\dot{\phi}^\beta = 0 \tag{103.1}$$

determina funciones $\phi^\alpha(t)$ que permiten el paso a un sistema de referencia en el que $g_{0\alpha} = 0$. Transformando la variable t de acuerdo con $\sqrt{g_{00}}\, dt \to dt$, se puede hacer entonces g_{00} igual a la unidad, de modo que obtenemos un sistema de referencia síncrono en el cual

$$g_{00} = 1, \quad g_{0\alpha} = 0, \quad g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(t). \tag{103.2}$$

Podemos ahora aplicar las ecuaciones de la gravitación en la forma (99.11)-(99.13). Dado que las cantidades $\gamma_{\alpha\beta}$, y con ellas las componentes del tensor tridimensional $\varkappa_{\alpha\beta} = \dot{\gamma}_{\alpha\beta}$, no dependen de las coordenadas x^α, es $R_{0\alpha} \equiv 0$. Por la misma razón, $P_{\alpha\beta} \equiv 0$, y, en consecuencia, las ecuaciones del campo gravitatorio en el vacío se reducen al siguiente sistema:

$$\tfrac{1}{2}\dot{\varkappa}_\alpha^\alpha + \tfrac{1}{4}\varkappa_\alpha^\beta \varkappa_\beta^\alpha = 0, \tag{103.3}$$

$$(\sqrt{\gamma}\,\varkappa_\alpha^\beta) = 0. \tag{103.4}$$

De la ecuación (103.4) se sigue que

$$\sqrt{\gamma}\,\varkappa_\alpha^\beta = 2\lambda_\alpha^\beta, \tag{103.5}$$

donde las λ_α^β son constantes. Contrayendo respecto de los índices α y β, obtenemos entonces

$$\varkappa_\alpha^\alpha = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} = \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\lambda_\alpha^\alpha,$$

de donde se deduce que $\gamma = \text{const} \cdot t^2$; sin pérdida de la generalidad, podemos igualar a la unidad la constante (simplemente, con un cambio de escala de las coordenadas x^α); entonces es $\lambda_\alpha^\alpha = 1$. La substitución de (103.5) en (103.3) da ahora la relación

$$\lambda_\alpha^\beta \lambda_\beta^\alpha = 1 \tag{103.6}$$

que liga entre ellas las constantes λ_α^β.

Bajemos ahora el índice β en las ecuaciones (103.5) y escribámoslas en forma de sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\dot{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{2}{t}\lambda^{\gamma}_{\alpha}\gamma_{\gamma\beta}. \tag{103.7}$$

El conjunto de coeficientes $\lambda^{\gamma}_{\alpha}$ se puede considerar como la matriz de una cierta substitución lineal. Mediante una transformación lineal adecuada de las coordenadas x^1, x^2, x^3 (o, lo que es equivalente, de $g_{1\beta}$, $g_{2\beta}$, $g_{3\beta}$), podemos en general reducir esta matriz a la forma diagonal. Representaremos sus valores principales (raíces de la ecuación característica) por p_1, p_2, p_3, y supondremos que son reales y distintos (acerca de otros casos, cf. más adelante); los vectores unitarios correspondientes a los ejes principales son $\mathbf{n}$,$^{(1)}$ $\mathbf{n}^{(2)}$ y $\mathbf{n}^{(3)}$. La solución de las ecuaciones (103.7) puede entonces escribirse en la forma

$$\gamma_{\alpha\beta} = t^{2p_1}n^{(1)}_{\alpha}n^{(1)}_{\beta} + t^{2p_2}n^{(2)}_{\alpha}n^{(2)}_{\beta} + t^{2p_3}n^{(3)}_{\alpha}n^{(3)}_{\beta} \tag{103.8}$$

(donde los coeficientes de las potencias de t se han igualado a la unidad mediante un cambio de escala de las coordenadas adecuado). Finalmente, eligiendo los vectores $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$, $\mathbf{n}^{(3)}$ como vectores unitarios de nuestros ejes (los llamaremos x, y, z), reduciremos la métrica a la forma final

$$-ds^2 = -dt^2 + t^{2p_1}dx^2 + t^{2p_2}dy^2 + t^{2p_3}dz^2. \tag{103.9}$$

En ella p_1, p_2 y p_3 son tres números cualesquiera que satisfacen las dos relaciones

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \tag{103.10}$$

[La primera se deduce de $-g = t^2$, y la segunda de (103.6)] †.

Los tres números p_1, p_2 y p_3 no pueden, evidentemente, tener todos el mismo valor. El caso en que dos de ellos son iguales se presenta para las ternas 0,0,1 y $-1/3$, $2/3$, $2/3$. En todos los demás casos, los números p_1, p_2 y p_3 son todos diferentes, siendo negativo uno de ellos, y los otros dos positivos. Si los disponemos en el orden $p_1 < p_2 < p_3$, sus valores pertenecerán a los intervalos

$$-\tfrac{1}{3} \leqslant p_1 \leqslant 0, \quad 0 \leqslant p_2 \leqslant \tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{2}{3} \leqslant p_3 \leqslant 1. \tag{103.10a}$$

† La solución (103.9) es, en realidad, un caso particular de una clase más general de soluciones, que contiene para el campo en el vacío tres funciones físicamente diferentes y arbitrarias de las coordenadas espaciales, y en el caso en que exista materia, siete funciones de iguales características. Véase *E. M. Lifshitz, I. M. Jalatnikov*, ZhETF **39**, 800 (1960).

La métrica (103.9) corresponde así a un espacio homogéneo, pero anisótropo cuyo volumen total aumenta (al aumentar t) proporcionalmente a t; las distancias contadas a lo largo de dos de los ejes (y y z) aumentan, mientras que disminuyen a lo largo del tercer eje (x). El instante $t = 0$ es un punto singular de la solución; en este punto la métrica presenta una singularidad que no se puede eliminar mediante una transformación del sistema de referencia. La única excepción es el caso en que $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = 1$. Para estos valores tenemos simplemente un espacio-tiempo plano; mediante la transformación t senh $z \to z$, t cosh $z \to t$ podemos reducir la métrica (103.9) a la forma galileana.

Existe también una solución del tipo (103.9) cuando el parámetro es espacial ; basta hacer los cambios de signo apropiados, como, por ejemplo,

$$-ds^2 = -x^{2p_1}\,dt^2 + dx^2 + x^{2p_2}\,dy^2 + x^{2p_3}\,dz^2.$$

Sin embargo, en este caso existen también soluciones de otro tipo, soluciones que se presentan cuando la ecuación característica de la matriz λ_α^β de las ecuaciones (103.7) tiene raíces complejas o confundidas (cf. los problemas). En el caso de un parámetro t temporal, estas soluciones no son posibles, ya que el correspondiente determinante g no satisface la condición necesaria $g < 0$.

Un tipo completamente diferente de solución se presenta cuando el determinante del tensor $g_{\alpha\beta}$ que encontramos en las soluciones (103.1) es igual a cero. En este caso no existe ningún sistema de referencia que satisfaga las condiciones (103.2). En cambio, podemos elegir el sistema de referencia de manera que:

$$g_{10} = 1, \quad g_{00} = g_{20} = g_{30} = 0, \quad g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^0),$$

donde el determinante $|g_{\alpha\beta}| = 0$. La variable x^0 tiene entonces carácter « luminoso »: para $dx^\alpha = 0$ y $dx^0 \neq 0$, el intervalo se anula; representaremos esta variable por $x^0 = \eta$. El correspondiente elemento de intervalo se puede escribir en la forma:

$$ds^2 = 2dx^1\,d\eta + g_{ab}(dx^a + g^a\,dx^1)(dx^b + g^b\,dx^1).$$

Aquí y en las ecuaciones que siguen los índices a, b, c, ... toman los valores 2, 3; podemos tratar g_{ab} como un tensor bidimensional y g^a como componentes de un vector de dos dimensiones. El cálculo de las cantidades R_{ab}, que omitiremos aquí, conduce a las siguientes ecuaciones del campo:

$$R_{ab} = -\tfrac{1}{2}\,g_{ac}\,\dot{g}^c\,g_{bd}\,\dot{g}^d = 0$$

(donde el punto indica derivación respecto de η). De aquí se sigue que $g_{ac}\dot{g}^c = 0$, o $\dot{g}^c = 0$, es decir, $g^c = \text{const}$. Mediante la transformación $x^a + g^a\, x^1 \to x^a$, podemos, por consiguiente, reducir la métrica a la forma

$$ds^2 = 2dx^1\, d\eta + g_{ab}(\eta)\, dx^a\, dx^b. \tag{103.11}$$

El determinante $-g$ de este tensor métrico coincide con el determinante $|g_{ab}|$, mientras que los únicos símbolos de Christoffel que son distintos de cero son los siguientes:

$$\Gamma^a_{b0} = \tfrac{1}{2}\varkappa^a_b, \qquad \Gamma^1_{ab} = -\tfrac{1}{2}\varkappa_{ab},$$

donde hemos introducido el tensor bidimensional $\varkappa_{ab} = \dot{g}_{ab}$. La única componente del tensor R_{ik} que no es idénticamente nula es la R_{00}, de modo que tenemos la ecuación

$$R_{00} = \tfrac{1}{2}\dot{\varkappa}^a_a + \tfrac{1}{4}\varkappa^b_a\varkappa^a_b = 0. \tag{103.12}$$

Las tres funciones $g_{22}(\eta)$, $g_{33}(\eta)$, $g_{23}(\eta)$ deben así satisfacer una sola ecuación. Por lo tanto, dos de ellas se pueden fijar arbitrariamente. Es conveniente escribir (103.12) de otra manera, representando las cantidades g_{ab} en la forma:

$$g_{ab} = -\chi^2\gamma_{ab}, \qquad |\gamma_{ab}| = 1. \tag{103.13}$$

Entonces el determinante $-g = |g_{ab}| = \chi^4$, y la substitución en (103.12) y una sencilla transformación nos dan:

$$\ddot{\chi} + \tfrac{1}{8}(\dot{\gamma}_{ac}\gamma^{bc})(\dot{\gamma}_{bd}\gamma^{ad})\chi = 0 \tag{103.14}$$

(donde γ^{ab} es el tensor bidimensional inverso de γ_{ab}). Si fijamos arbitrariamente las funciones $\gamma_{ab}(\eta)$ (que están ligadas entre sí por la relación $|\gamma_{ab}| = 1$), la función $\chi(\eta)$ queda determinada por esta ecuación.

Llegamos de este modo a una solución que contiene dos funciones arbitrarias. Es fácil ver que representa una generalización del método seguido en el § 102 al estudiar una onda gravitatoria plana débil (que se propaga en una dirección) †. Esta última se obtiene mediante la transformación

$$\eta = \frac{x+t}{\sqrt{2}}, \qquad x^1 = \frac{t-x}{\sqrt{2}},$$

y haciendo $\gamma_{ab} = \delta_{ab} + h_{ab}(\eta)$ (donde las h_{ab} son pequeñas cantidades sujetas a la condición $h_{22} + h_{23} = 0$) y $\chi = 1$; un valor constante de χ satisface (103.14) si prescindimos de los términos de segundo orden.

† La posibilidad de esta generalización fue señalada por primera vez por I. Robinson y H. Bondi, 1958. Recordaremos también algunos trabajos en que se encuentran soluciones de tipo análogo dependientes de un número mayor de variables: A. Peres, Phys. Rev. Letts. 3, 571 (1959); I. Robinson, A. Trautman, Phys. Rev. Letts. 4, 431 (1960).

Supongamos que una onda gravitatoria débil de extensión finita (un « paquete de ondas ») pasa por un punto x del espacio. Antes de la llegada del paquete, tenemos $h_{ab} = 0$ y $\chi = 1$; después de su paso tenemos de nuevo $h_{ab} = 0$, $\partial^2\chi/\partial t^2 = 0$, pero la inclusión en (103.14) de términos de segundo orden conduce a la aparición de un valor negativo de

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} \cong -\tfrac{1}{8}\int\left(\frac{\partial h_{ab}}{\partial t}\right)^2 dt < 0$$

(donde la integral se extiende al tiempo durante el cual pasa la onda). Por consiguiente, después del paso de la onda tendremos $\chi = 1 - \text{const}\cdot t$, y una vez transcurrido un cierto intervalo de tiempo finito χ cambiará de signo. Pero un valor nulo de χ significa que el determinante g del tensor métrico es igual a cero, es decir, la métrica presenta una singularidad. Con todo, esta singularidad carece de importancia desde el punto de vista físico; traduce únicamente el carácter inadecuado del sistema de referencia que proporciona la onda gravitatoria que pasa y se puede hacer desaparecer mediante una transformación apropiada; después del paso de la onda el espacio-tiempo vuelve a ser plano.

Se puede demostrar directamente que así es. Si medimos los valores del parámetro η a partir de su valor en el punto singular, se tiene $\chi = \eta$, de modo que

$$ds^2 = 2\eta\, dx^1 - \eta^2\,[(dx^2)^2 + (dx^3)^2]$$

Es fácil ver que para esta métrica $R_{iklm} = 0$, de modo que el correspondiente espacio-tiempo es plano. Y, en efecto, después de la transformación

$$\eta x^2 = y, \qquad \eta x^3 = z, \qquad x^1 = \xi - \frac{y^2+z^2}{2\eta},$$

obtenemos:

$$ds^2 = 2\,d\eta\, d\xi - dy^2 - dz^2,$$

y luego, con la substitución $\eta = (x+t)/\sqrt{2}$, $\xi = (t-x)/\sqrt{2}$ reducimos finalmente la métrica a la forma galileana.

Esta propiedad de una onda gravitatoria — la aparición de una singularidad ficticia — no está ligada, claro, con el hecho de que la onda sea débil, sino que se presenta también en la solución general de (103.12) †. Como en el ejemplo que acabamos de estudiar, cerca de la singularidad se tiene $\chi \sim \eta$, es decir, $-g \sim \eta^4$.

† Se puede demostrar que así es, partiendo de la ecuación (103.12), exactamente de la misma manera que en el § 100 para el caso de la ecuación tridimensional análoga.

Señalaremos finalmente que, además de la solución general que precede, (103.12) posee también soluciones particulares de la forma

$$ds^2 = 2d\eta\, dx^1 - \eta^{2s_2}(dx^2)^2 - \eta^{2s_3}(dx^2)^3, \qquad (103.15)$$

donde s_2, s_3 son números ligados entre sí por la relación

$$s_2 + s_3 = s_2^2 + s_3^2.$$

En estas soluciones la métrica presenta una singularidad inevitable (en $\eta = 0$), singularidad que no es posible eliminar mediante un cambio del sistema de referencia.

Problemas

1. Hallar la solución de las ecuaciones (103.7) cuando la ecuación característica de la matriz λ_α^β tiene una raíz real (p_3) y dos raíces complejas ($p_{1,2} = p' \pm ip''$).

Solución. En este caso, el parámetro x^0, del que dependen todas las cantidades, ha de tener carácter espacial; lo designaremos por x. En consecuencia, ahora será $g_{00} = -1$ en (103.2). Las ecuaciones (103.3)-(103.4) no cambian.

Los vectores $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$ que aparecen en (103.8) son ahora complejos: $\mathbf{n}^{(1,2)} = (\mathbf{n}' \pm i\mathbf{n}'')/\sqrt{2}$, donde $\mathbf{n}'$, $\mathbf{n}''$ son vectores unitarios. Eligiendo los ejes x^1, x^2, x^3 en el sentido de $\mathbf{n}'$, $\mathbf{n}''$, $\mathbf{n}^{(3)}$, obtenemos la solución en la forma

$$g_{11} = g_{22} = x^{2p'} \cos\left(2p'' \ln\frac{x}{a}\right), \quad g_{12} = -x^{2p'} \operatorname{sen}\left(2p'' \ln\frac{x}{a}\right),$$

$$g_{33} = -x^{2p_3}, \quad -g = -g_{00}|g_{\alpha\beta}| = x^2,$$

donde a es una constante (que no se puede eliminar ya mediante un cambio de escala a lo largo del eje x sin cambiar otros coeficientes en las expresiones dadas). Los números p_1, p_2, p_3 satisfacen, como antes, las relaciones (103.10), donde el número real p_3 es o bien $< -1/3$ o bien > 1.

2. Resolver el problema análogo en el caso en que coinciden dos de las raíces ($p_2 = p_3$).

Solución. Es sabido que, según la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales, el sistema (103.7) se puede reducir. en este caso, a la siguiente forma canónica:

$$\dot{g}_{11} = \frac{2p_1}{x} g_{11}, \qquad \dot{g}_{2\alpha} = \frac{2p_2}{x} g_{2\alpha}, \qquad \dot{g}_{3\alpha} = \frac{2p_2}{x} g_{3\alpha} + \frac{\lambda}{x} g_{2\alpha}, \qquad \alpha = 2, 3,$$

donde λ es una constante. Si $\lambda = 0$, obtenemos de nuevo (103.9). Si $\lambda \neq 0$, podemos hacer $\lambda = 1$; entonces

$$g_{11} = -t^{2p_1}, \qquad g_{2\alpha} = a_\alpha t^{2p_2}, \qquad g_{3\alpha} = a_\alpha t^{2p_2} \ln t + b_\alpha t^{2p_2}.$$

De la condición $g_{23} = g_{32}$, se deduce que $a_2 = 0$, $b_2 = a_3$. Mediante un apropiado cambio de escala a lo largo de los ejes x^1 y x^2, reducimos finalmente la métrica a la forma siguiente:

$$ds^2 = -dx^3 - x^{2p_1} dx_1^2 \pm 2x^{2p_2} dx^2 dx^3 \pm x^{2p_2} \ln\frac{x}{a} (dx^3)^2$$

Los parámetros p_1, p_2 pueden tomar los valores 1,0 ó -1/3, 2/3.

3. Para valores pequeños de t, hallar el movimiento de la materia (cuya ecuación de estado es $p = \epsilon/3$) distribuida uniformemente en el espacio de métrica (103.9); se prescinde de la reacción de la materia sobre el campo gravitatorio.

Solución. Partiremos de las ecuaciones hidrodinámicas del movimiento,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{-g}\sigma u^i) = 0, \qquad (p+\epsilon)u^k\left[\frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \tfrac{1}{2}u^l\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x^i} - u_i u^k\frac{\partial p}{\partial x^k},$$

que están contenidas en las ecuaciones $T_{i;k} = 0$ †. En ellas σ es la densidad de entropía; para la ecuación de estado $p = \epsilon/3$, tenemos $\sigma \sim \epsilon^{3/4}$. En este caso todas las cantidades dependen sólo del tiempo, y estas ecuaciones nos dan

$$\frac{\partial}{\partial t}(tu_0\epsilon^{3/4}) = 0, \qquad 4\epsilon\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + u_0\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = 0,$$

de las que se sigue:

$$tu_0\epsilon^{3/4} = \text{const}, \qquad u_\alpha\epsilon^{1/4} = \text{const},$$

mientras que de la identidad $u_i u^i = 1$, se deduce:

$$u_0^2 \cong u_3 u^3 = (u_3)^2 t^{-2p_3}$$

(para t pequeño, conservamos sólo el término que contiene la máxima potencia de $1/t$). Partiendo de estas relaciones se obtiene:

$$\epsilon \cong \epsilon^{(0)} t^{-2(1-p_3)}, \qquad u_\alpha \cong u_\alpha^{(0)} t^{\frac{1-p_3}{2}},$$

donde $\epsilon^{(0)}$ y $u_\alpha^{(0)}$ son constantes.

Para $t \to 0$, la densidad de energía ε tiende a infinito. La dirección de la velocidad tridimensional v^α tiende a coincidir con la del eje z ($v^3 = t^{-2p_3}v_3 \gg v^1, v^2$) mientras que su módulo ($v^2 = v_\alpha v^\alpha$) tiende a la velocidad de la luz de acuerdo con la ley

$$\sqrt{1-v^2} \sim t^{\frac{3p_3-1}{2}}$$

§ 104. Campos gravitatorios lejos de los cuerpos

Consideremos el campo gravitatorio estacionario a grandes distancias r de los cuerpos que lo producen y determinemos los primeros términos de su desarrollo en potencias de $1/r$.

En primera aproximación, hasta términos del orden de $1/r$, las pequeñas correcciones a los valores galileanos vienen dadas por los términos correspondientes en el

† Cf. *Mecánica de los medios continuos*, 2.ª edición, § 125.

desarrollo de la solución de Schwarzschild (97.14), es decir, por las fórmulas que ya se dieron en (101.17):

$$h_{00}^{(1)} = -\frac{2km}{c^2 r},\quad h_{\alpha\beta}^{(1)} = -\frac{2km}{c^2}\frac{n_\alpha n_\beta}{r},\quad h_{0\alpha}^{(1)} = 0. \tag{104.1}$$

Los términos de segundo orden, proporcionales a $1/r^2$, proceden de dos orígenes diferentes. Parte de ellos resultan, en virtud del carácter no lineal de las ecuaciones de la gravitación, de los términos de primer orden. Dado que éstos dependen sólo de la masa total del cuerpo (y de ninguna otra característica del mismo) también estos términos de segundo orden dependen únicamente de la masa total. Es claro, por consiguiente, que dichos términos se pueden obtener desarrollando la solución (97.14) de Schwarzschild, de la que se sigue †:

$$h_{00}^{(2)} = 0,\ h_{\alpha\beta}^{(2)} = -\frac{4k^2m^2}{c^4 r^2} n_\alpha n_\beta. \tag{104.2}$$

Los demás términos de segundo orden resultan como soluciones correspondientes de las ecuaciones del campo ya linealizadas. Para calcularlos, nos valdremos de las ecuaciones linealizadas en la forma (102.8). En el caso estacionario, la ecuación de ondas se reduce a la ecuación de Laplace

$$\Delta h_i^k = 0. \tag{104.3}$$

Las cantidades h_i^k están ligadas entre sí por las condiciones suplementarias (102.5), que toman la siguiente forma, dado que las h_i^k son independientes del tiempo:

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(h_\alpha^\beta - \tfrac{1}{2} h \delta_\alpha^\beta\right) = 0, \tag{104.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} h_0^\beta = 0. \tag{104.5}$$

La componente h_{00} debe ser una solución escalar de la ecuación de Laplace en tres dimensiones. Sabemos que una solución de este tipo, proporcional a $1/r^2$,

† Hay que prestar atención al hecho de que la forma concreta que adoptan $h_{\alpha\beta}^{(1)}$, $h_{\alpha\beta}^{(2)}$, $h_{00}^{(2)}$ depende de la particular elección del sistema de coordenadas (galileano en el infinito); la forma dada en el texto corresponde precisamente a la definición de r que reduce la solución de Schwarzschild a la forma (97.14). Así, la transformación $x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha$, $\xi^\alpha = ax^\alpha/2r$ conduce [véase (102.6)] a añadir a $h_{\alpha\beta}^{(1)}$ el término $\frac{a}{r}(\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta)$, y eligiendo convenientemente a podemos conseguir que:

$$h_{\alpha\beta}^{(1)} = -\frac{2km}{c^2}\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r}, \tag{104 1a}$$

lo que corresponde a la solución de Schwarzschild en la forma dada en el problema 3 del § 97.

es de la forma $\mathbf{a}\cdot\nabla\frac{1}{r}$, donde $\mathbf{a}$ es un vector constante. Pero un término de este tipo en h_{00} se puede siempre reducir a cero mediante un simple corrimiento del origen de coordenadas aplicado al término de primer orden en $1/r$. Por consiguiente, la presencia de un término de dicho tipo en h_{00} significaría tan sólo que nuestra elección del origen de coordenadas ha sido poco afortunada, y carece así de interés,

Las componentes $h_{0\alpha}$ constituyen una solución vectorial de la ecuación de Laplace, es decir, deben ser de la forma:

$$h_{0\alpha}=\lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{1}{r},$$

donde $\lambda_{\alpha\beta}$ es un tensor constante. La condición (104.5) nos da:

$$\lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}\frac{1}{r}=0,$$

de donde se sigue que $\lambda_{\alpha\beta}$ debe ser de la forma:

$$\lambda_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}+\lambda\delta_{\alpha\beta},$$

donde $a_{\alpha\beta}$ es un tensor antisimétrico. Pero una solución de la forma $\lambda\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{1}{r}$ se puede eliminar mediante la transformación $x'^0=x^0+\xi^0$, con $\xi^0=\lambda/r$ [véase (102.6)]. Por lo tanto, la única solución que posee un significado real es de la forma:

$$h_{0\alpha}=a_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{1}{r},\qquad a_{\alpha\beta}=-a_{\beta\alpha}. \tag{104.6}$$

Finalmente, mediante razonamientos similares, pero más complicados, se puede demostrar que una transformación adecuada de las coordenadas espaciales permite siempre eliminar las cantidades $h_{\alpha\beta}$ dadas por un tensor (simétrico en α, β) que es solución de la ecuación de Laplace.

Nos queda todavía por examinar el sentido del tensor $a_{\alpha\beta}$ que aparece en (104.6). Para ello calculemos el tensor momento cinético total $M_{\alpha\beta}$, de acuerdo con (101.16), en función de las expresiones que hemos hallado para las $h_{0\alpha}$ (se puede prescindir aquí de todas las restantes h_{ik}).

Salvo términos de orden superior al segundo en las $h_{0\alpha}$, de la fórmula (101.2) se deduce (obsérvese que $g^{\alpha 0}=-h^{\alpha 0}=h_{\alpha 0}$):

$$h^{\alpha 0\beta}=\frac{c^4}{16\pi k}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}(g^{\alpha 0}g^{\beta\gamma}-g^{\gamma 0}g^{\alpha\beta})=-\frac{c^4}{16\pi k}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}(h_{\alpha 0}\delta_{\beta\gamma}-h_{\gamma 0}\delta_{\alpha\beta})=$$

$$=-\frac{c^4}{16\pi k}\frac{\partial}{\partial x^\beta}h_{\alpha 0}=-\frac{c^4}{16\pi k}a_{\alpha\gamma}\frac{\partial^2}{\partial x^\beta\,\partial x^\gamma}\frac{1}{r}=-\frac{c^4}{16\pi k}a_{\alpha\gamma}\frac{3n_\beta n_\gamma-\delta_{\beta\gamma}}{r^3}$$

(donde **n** es el vector unitario correspondiente al vector posición). Teniendo en cuenta estas expresiones y después de integrar sobre una esfera de radio $r(df_\gamma = n_\gamma r^2 do)$ se encuentra:

$$\frac{1}{c}\int (x^\alpha h^{\beta 0\gamma} - x^\beta h^{\alpha 0\gamma})\, df_\gamma = -\frac{c^3}{8\pi k}\int (n_\alpha n_\gamma a_{\beta\gamma} - n_\beta n_\gamma a_{\alpha\gamma})\, do =$$

$$= -\frac{c^3}{8\pi k}\frac{4\pi}{3}(\delta_{\alpha\gamma}a_{\beta\gamma} - \delta_{\beta\gamma}a_{\alpha\gamma}) = \frac{c^3}{3k}a_{\alpha\beta}.$$

Un cálculo parecido nos da:

$$\frac{1}{c}\int \lambda^{\alpha 0\gamma\beta}\, df_\gamma = -\frac{c^3}{16\pi k}\int (h_{\alpha 0}\, df_\beta - h_{\beta 0}\, df_\alpha) = \frac{c^3}{6k}a_{\alpha\beta}.$$

Combinando estos dos resultados se obtiene:

$$M_{\alpha\beta} = \frac{c^3}{2k}a_{\alpha\beta}.$$

Tenemos así finalmente:

$$h^{(2)}_{0\alpha} = -\frac{2k}{c^3}M_{\alpha\beta}\frac{n_\beta}{r^2}. \tag{104.7}$$

Hay que subrayar que, en el caso general, cuando el campo cerca de los cuerpos puede no ser débil, $M_{\alpha\beta}$ es el momento cinético del cuerpo y de su campo gravitatorio. Tan sólo cuando el campo es débil cualquiera que sea la distancia, se puede prescindir de su contribución al momento cinético. También hay que observar que en el caso de un cuerpo de forma esférica en rotación, que produce un campo débil en todas partes, la fórmula (104.7) vale en todo el espacio exterior al cuerpo.

Las fórmulas (104.1), (104.2) y (104.7) resuelven nuestro problema hasta términos del orden de $1/r^2$. Las componentes covariantes del tensor métrico son:

$$g_{ik} = g^{(0)}_{ik} + h^{(1)}_{ik} + h^{(2)}_{ik}. \tag{104.8}$$

Dentro del mismo orden de aproximación, las componentes contravariantes son:

$$g^{ik} = g^{(0)ik} - h^{(1)ik} - h^{(2)ik} + h^{(1)i}_{l}h^{(1)lk}. \tag{104.9}$$

La fórmula (104.7) se puede escribir en forma vectorial†:

$$\mathbf{g} = \frac{2k}{c^3 r^2}\mathbf{n}\times\mathbf{M}. \tag{104.10}$$

En el problema 1 del § 88 se demostró que, en un campo gravitatorio estacionario, sobre una partícula actúa una « fuerza de Coriolis » igual a la que actuaría sobre ella si se encontrara sobre un cuerpo que gira con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega} = \frac{c}{2}\sqrt{g_{00}}\nabla\times\mathbf{g}$.

† Dentro de la aproximación considerada, para el vector $g_\alpha = -g_{0\alpha}/g_{00} \approx -g_{0\alpha}$. Por la misma razón, en las definiciones de producto vectorial y de rotacional (véase la nota de la pág. 353) hay que hacer $\gamma = 1$, de modo que uno y otro se pueden entender en el sentido ordinario del cálculo vectorial cartesiano.

Podemos decir, por lo tanto, que en el campo producido por un cuerpo en rotación (con momento cinético total **M**), sobre una partícula alejada del mismo actúa una fuerza que es equivalente a la fuerza de Coriolis que aparecería como consecuencia de una rotación de velocidad angular

$$\mathbf{\Omega} \cong \frac{c}{2}\nabla\times\mathbf{g} = \frac{k}{c^2 r^3}[\mathbf{M}-3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{M})].$$

PROBLEMA

Determinar el corrimiento sistemático (« secular ») de la órbita de una partícula, que se mueve en el campo de un cuerpo central, asociado con la rotación de éste (J. Lense, H. Thirring, 1918).

Solución. Dado que todos son pequeños, los efectos relativistas se superponen linealmente y, así, al calcular los efectos que resultan de la rotación del cuerpo central, podemos prescindir de la influencia del campo de fuerzas central no newtoniano que se estudió en el § 98; con otras palabras, podemos efectuar los cálculos suponiendo que de todas las h_{ik}, sólo las $h_{0\alpha}$ son diferentes de cero.

La orientación de la órbita clásica de la partícula viene determinada por la conservación de dos cantidades: el momento cinético de la partícula, $\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$, y el vector

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{p}}{m}\times\mathbf{M} - \frac{kmm'\mathbf{r}}{r},$$

cuya conservación es característica del campo newtoniano $\phi = -km'/r$ (donde m' es la masa del cuerpo central)†. El vector **M** es perpendicular al plano de la órbita, mientras que el vector **A** está dirigida a lo largo del eje mayor de la elipse, apuntando al perihelio (y es igual en módulo a $kmm'e$, donde e es la excentricidad de la órbita). El corrimiento secular buscado de la órbita se puede definir como cambio de dirección de estos vectores.

La función de Lagrange de una partícula que se mueve en el campo (104.10) es:

$$L = -mc\frac{ds}{dt} = L_0+\delta L,\ \delta L = mc\mathbf{g}\cdot\mathbf{v} = \frac{2km}{c^2 r^3}\mathbf{M}'\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{r} \qquad (1)$$

(donde se ha representado por $\mathbf{M}'$ el momento cinético del cuerpo central para distinguirlo del momento cinético **M** de la partícula). La función de Hamilton es entonces††:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0+\delta\mathcal{H},\ \delta\mathcal{H} = \frac{2k}{c^2 r^3}\mathbf{M}'\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{p}$$

Calculando la derivada $\dot{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}+\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{p}}$ teniendo en cuenta las ecuaciones de Hamilton $\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}}$, $\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{r}}$, obtenemos:

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{2k}{c^2 r^3}\mathbf{M}'\times\mathbf{M}. \qquad (2)$$

† Véase *Mecánica*, § 15.

†† Véase *Mecánica*, § 40.

Dado que se trata de determinar la variación secular de **M**, hay que promediar esta expresión en un período de rotación T de la partícula. El valor medio se calcula fácilmente utilizando la representación paramétrica de la dependencia de r respecto del tiempo en el movimiento sobre una órbita elíptica, representación que es de la forma

$$r = a(1-e\cos\xi),\ t = \frac{T}{2\pi}(\xi - e\,\mathrm{sen}\,\xi)$$

(a y e son el semieje mayor y la excentricidad de la elipse, respectivamente) †:

$$\overline{r^{-3}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dt}{r^3} = \frac{1}{2\pi a^3}\int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{(1-e\cos\xi)^2} = \frac{1}{a^3(1-e^2)^{3/2}}.$$

La variación secular de **M** viene así dada por la fórmula:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{2k\mathbf{M}'\times\mathbf{M}}{c^2a^3(1-e^2)^{3/2}}, \tag{3}$$

es decir, el vector **M** gira en torno del eje de rotación del cuerpo central conservando constante su módulo.

Un cálculo análogo para el vector **A** da:

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{2k}{c^2r^3}\mathbf{M}'\times\mathbf{A} + \frac{6k}{c^2mr^5}(\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}')(\mathbf{r}\times\mathbf{M}).$$

Esta expresión se promedia exactamente como antes; por razones de simetría, es claro que el vector promediado $\mathbf{r}/r^5$ coincidirá en dirección con el semieje mayor de la elipse, es decir, con la dirección del vector **A**. El cálculo conduce a la expresión siguiente de la variación secular del vector **A**:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{A},\quad \boldsymbol{\Omega} = \frac{2k\mathbf{M}'}{c^2a^3(1-e^2)^{3/2}}\{\mathbf{n}'-3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')\} \tag{4}$$

($\mathbf{n}$ y $\mathbf{n}'$ son los vectores unitarios que corresponden a los vectores **M** y **M'**), es decir, el vector **A** gira con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ conservando constante su módulo; esto último prueba que la excentricidad de la órbita no experimenta cambio secular alguno.

La fórmula (3) se puede escribir en la forma

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{M},$$

con el mismo $\boldsymbol{\Omega}$ que en (4); con otras palabras, $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular de rotación de la elipse «como un todo». Esta rotación incluye tanto el corrimiento adicional del perihelio de la órbita (respecto del considerado en el § 98), como la rotación secular de su plano en torno del eje del cuerpo (efecto éste que no se presenta si el plano de la órbita coincide con el plano ecuatorial del cuerpo central).

Frente a este resultado, obsérvese que al efecto que se estudió en el § 98 corresponde

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{6\pi km'}{c^2a(1-e^2)T}\mathbf{n}.$$

† Véase *Mecánica*, § 15.

§ 105. Radiación de ondas gravitatorias

Consideremos ahora un campo gravitatorio débil producido por cuerpos cualesquiera que se mueven con velocidades pequeñas respecto de la velocidad de la luz.

Debido a la existencia de materia, las ecuaciones del campo gravitatorio diferirán de la simple ecuación de las ondas $\Box h_i^k = 0$ (102.8) en que, en el segundo miembro de la igualdad, aparecerán términos asociados con el tensor energía-impulso de la materia. Escribiremos estas ecuaciones en la forma

$$\frac{1}{2}\Box\psi_i^k = \frac{8\pi k}{c^4}\tau_i^k, \tag{105.1}$$

donde se han introducido, en vez de las h_i^k, las cantidades $\psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k h$, más convenientes en este caso, y donde τ_i^k representa las expresiones adicionales que se obtienen al pasar, en las ecuaciones exactas de la gravitación, al caso de un campo débil dentro de la aproximación que estamos considerando. Es fácil comprobar que las componentes τ_0^0 y τ_a^0 se obtienen directamente a partir de las correspondientes componentes T_i^k separando en ellas los términos cuyo orden de magnitud es el que nos interesa; en cuanto a las componentes τ_β^a, éstas contienen, junto con términos obtenidos a partir de T_β^a, términos de segundo orden que proceden de $R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R$.

Las cantidades ψ_i^k satisfacen la condición (102.5), $\partial\psi_i^k/\partial x^k = 0$. De (104.1) se sigue que esta misma ecuación vale para las τ_i^k:

$$\frac{\partial\tau_i^k}{\partial x^k} = 0. \tag{105.2}$$

Esta ecuación substituye aquí a la relación general $T_{i;k}^k = 0$.

Valiéndonos de las ecuaciones que preceden, consideremos el problema de la energía radiada en forma de ondas gravitatorias por los cuerpos en movimiento. La solución de este problema requiere la determinación del campo gravitatorio en la « zona de ondas », es decir, a distancias grandes comparadas con la longitud de las ondas radiadas.

En principio, todos los cálculos son completamente análogos a los que efectuamos en el caso de las ondas electromagnéticas. Las ecuaciones (105.1) de un campo gravitatorio débil tienen la misma forma que la ecuación de los potenciales retardados (§ 62). Por ello podemos escribir sin más su solución general en la forma:

$$\psi_i^k = -\frac{4k}{c^4}\int (\tau_i^k)_{t-\frac{R}{c}}\frac{dV}{R}. \tag{105.3}$$

Dado que las velocidades de todos los cuerpos en el sistema son pequeñas, para el campo a gran distancia del mismo podemos escribir (véase los §§ 66 y 67).

$$\psi_i^k = -\frac{4k}{c^4 R_0}\int (\tau_i^k)_{t-\frac{R_0}{c}}\, dV, \tag{105.4}$$

donde R_0 es la distancia a partir del origen de coordenadas, situado en un punto cualquiera interior al sistema; para abreviar, en lo que sigue prescindiremos del índice $t-\frac{R_0}{c}$ es el integrando.

Para calcular estas integrales utilizaremos las ecuaciones (105.2). Bajando índices en las τ_i^k y separando las componentes espaciales y temporal, escribiremos (105.2) en la forma

$$\frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \tau_{\alpha 0}}{\partial x^0} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{0\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \tau_{00}}{\partial x^0} = 0. \tag{105.5}$$

Multiplicando la primera ecuación por x^β e integrando en todo el espacio se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int \tau_{\alpha 0} x^\beta\, dV = \int \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} x^\beta\, dV = \int \frac{\partial(\tau_{\alpha\gamma} x^\beta)}{\partial x^\gamma} dV - \int \tau_{\alpha\beta}\, dV.$$

Dado que en el infinito $\tau_{ik} = 0$, la primera integral del segundo miembro se anula, en virtud del teorema de Gauss. Sumando a la ecuación restante esta misma ecuación con índices transpuestos y dividiendo el resultado por 2, se encuentra:

$$\int \tau_{\alpha\beta}\, dV = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^0}\int (\tau_{\alpha 0} x^\beta + \tau_{\beta 0} x^\alpha)\, dV.$$

Multipliquemos ahora la segunda ecuación (105.5) por $x^\alpha x^\beta$ e integremos en todo el espacio. Una transformación análoga conduce a

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int \tau_{00} x^\alpha x^\beta\, dV = -\int (\tau_{\alpha 0} x^\beta + \tau_{\beta 0} x^\alpha)\, dV.$$

De la comparación de los dos resultados se sigue:

$$\int \tau_{\alpha\beta}\, dV = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^2 \int \tau_{00} x^\alpha x^\beta\, dV. \tag{105.6}$$

Las integrales de todas las $\tau_{\alpha\beta}$ aparecen así expresadas en función de integrales que contienen únicamente la componente τ_{00}. Pero esta componente, conforme se demostró antes, coincide con la correspondiente componente T_{00} del tensor energía-impulso y, con precisión suficiente [véase (96.1)], se puede escribir en la forma:

$$\tau_{00} = \mu c^2. \tag{105 7}$$

Substituyendo este resultado en (105.6) e introduciendo el tiempo $t = x^0/c$, se encuentra para (105.4),

$$\psi_{\alpha\beta} = -\frac{2k}{c^4 R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \mu x^\alpha x^\beta \, dV. \tag{105.8}$$

A gran distancia de los cuerpos, las ondas se pueden considerar planas (en regiones del espacio no demasiado grandes). Por lo tanto, podemos calcular el flujo de energía radiada por el sistema a lo largo, por ejemplo, del eje x^1 utilizando la fórmula (102.11). En ésta figuran las componentes $h_{23} = \psi_{23}$ y $h_{22} - h_{33} = \psi_{22} - \psi_{33}$. De (105.8) se deduce para ellas las expresiones

$$h_{23} = -\frac{2k}{3c^4 R_0}\ddot{D}_{23}, \quad h_{22} - h_{33} = -\frac{2k}{3c^4 R_0}(\ddot{D}_{22} - \ddot{D}_{33})$$

(el punto significa derivación respecto del tiempo), donde hemos introducido el tensor

$$D_{\alpha\beta} = \int \mu (3x^\alpha x^\beta - \delta_{\alpha\beta} x_\gamma^2)\, dV, \tag{105.9}$$

el « momento cuadripolar » de las masas (véase § 96). Resulta así para el flujo de energía a lo largo del eje x^1 la expresión

$$cI^{10} = \frac{k}{36\pi c^5 R_0^2}\left[\left(\frac{\dddot{D}_{22} - \dddot{D}_{33}}{2}\right)^2 + \dddot{D}_{23}^2\right]. \tag{105.10}$$

Una vez conocida la radiación en la dirección del eje x^1, es fácil determinar la radiación en una dirección arbitraria definida por el vector unitario $\mathbf{n}$. Para ello hemos de construir, con las componentes del tensor $\dddot{D}_{\alpha\beta}$ y del vector n_α, un escalar, cuadrático en las $\dddot{D}_{\alpha\beta}$, que para $n_1 = 1$ y $n_2 = n_3 = 0$ se reduzca a la expresión que aparece dentro del paréntesis recto en (105.10).

El resultado a que se llega para la intensidad de la energía radiada dentro del ángulo sólido *do* es:

$$dI = \frac{k}{36\pi c^5}\left[\frac{1}{4}(\dddot{D}_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta)^2 + \frac{1}{2}\dddot{D}_{\alpha\beta}^2 - \dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\gamma} n_\beta n_\gamma\right] do. \tag{105.11}$$

La radiación total en todas direcciones, es decir, la pérdida de energía del sistema por unidad de tiempo $\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)$, se puede hallar calculando el valor medio del flujo respecto de todas las direcciones y multiplicando el resultado por 4π. El promedio se calcula fácilmente utilizando las fórmulas dadas en la nota de la página 266.

Se llega así a la siguiente expresión de la pérdida de energía:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{k}{45c^5}\dddot{D}^2_{\alpha\beta}. \tag{105.12}$$

Es necesario observar que el valor numérico de esta pérdida de energía, incluso para objetos astronómicos, es tan pequeño que sus efectos sobre el movimiento, aun después de intervalos de tiempo cósmicos, es completamente despreciable (así, para las estrellas dobles la pérdida de energía por año resulta ser $\sim 10^{-12}$ veces la energía total).

PROBLEMA

Dos cuerpos, que se atraen mutuamente de acuerdo con la ley de Newton, se mueven en una órbita circular (en torno del centro de masas común). Determinar la velocidad de acercamiento de los dos cuerpos debida a la pérdida de energía por radiación de ondas gravitatorias.

Solución. Si m_1, m_2 son las masas de los cuerpos y r su distancia mutua (constante en el movimiento sobre una órbita circular), un cálculo basado en (105.12) da

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{32k}{5c^5}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)^2 r^4\omega^6,$$

donde $\omega = 2\pi/T$ y T es el período de rotación. La frecuencia está ligada con r por $\omega^2 r^3 = k(m_1+m_2)$. Dado que $\mathcal{E} = -\dfrac{km_1m_2}{2r}$, será $\dot{r} = \dfrac{2r^2}{km_1m_2}\dfrac{d\mathcal{E}}{dt}$ y obtenemos finalmente

$$\dot{r} = -\frac{64k^3 m_1 m_2 (m_1+m_2)}{5c^5 r^3}.$$

§ 106. Ecuaciones del movimiento de un sistema de cuerpos en segunda aproximación

La expresión (105.12) a que se llegó en el párrafo anterior para la pérdida de energía de un sistema por radiación de ondas gravitatorias contiene un factor c^5 en el denominador, es decir, esta pérdida aparece solamente en la quinta aproximación respecto de $1/c$. En las cuatro primeras aproximaciones, la energía del sistema se conserva constante. De aquí se sigue que un sistema de cuerpos gravitatorios se puede describir por una función de Lagrange correctamente hasta términos del orden de $1/c^4$ en ausencia de campo electromagnético, mientras que, cuando éste existe, es posible introducir una función de Lagrange tan sólo con una precisión de segundo orden (§ 65). La función de Lagrange de un sistema de cuerpos se obtendrá aquí hasta términos de segundo orden. De esta manera llegaremos a las ecuaciones del movimiento del mismo en la aproximación que sigue a la newtoniana.

Prescindiremos de las dimensiones y de la estructura interna de los cuerpos, considerándolos « puntuales »; dicho de otra manera, nos limitaremos a los tér-

minos de orden cero en el desarrollo en serie de potencias de las razones de las dimensiones a de los cuerpos a sus distancias mutuas l.

Para resolver este problema hay que determinar primero, en esta misma aproximación, el campo gravitatorio débil producido por dichos cuerpos a distancias grandes comparadas con sus dimensiones, pero al mismo tiempo pequeñas comparadas con la longitud λ de las ondas gravitatorias radiadas por el sistema ($a \ll r \ll \lambda \sim lc/v$).

En primera aproximación, en las ecuaciones (105.1) deberemos prescindir de los términos que contienen derivadas segundas respecto del tiempo, con el factor $1/c^2$, y de todas las componentes τ_i^k habrá que suponer diferente de cero tan sólo la componente $\tau_0^0 = \mu c^2$, que contiene c^2 (las otras componentes contienen la primera o la segunda potencia de las velocidades de los cuerpos). Se obtienen entonces las ecuaciones

$$\Delta\psi_\alpha^\beta = 0, \ \Delta\psi_0^\alpha = 0, \ \Delta\psi_0^0 = \frac{16\pi k}{c^2}\mu.$$

Se trata de hallar soluciones de estas ecuaciones que se anulen en el infinito (métrica galileana). De las dos primeras se deduce, por lo tanto, que $\psi_\alpha^\beta = 0$, $\psi_0^\alpha = 0$. En cambio, comparando la tercera ecuación con la ecuación (96.2) del potencial newtoniano ϕ, se encuentra $\psi_0^0 = 4\phi/c^2$. Se tienen entonces para las componentes del tensor $h_i^k = \psi_i^k - \frac{1}{2}\psi\,\delta_i^k$ los siguientes valores †:

$$h_\alpha^\beta = -\frac{2}{c^2}\phi\,\delta_\alpha^\beta, \tag{106.1}$$

$$h_0^\alpha = 0, \quad h_0^0 = \frac{2}{c^2}\phi, \tag{106.2}$$

y para el intervalo,

$$ds^2 = \left(1+\frac{2}{c^2}\phi\right)c^2\,dt^2 - \left(1-\frac{2}{c^2}\phi\right)(dx^2+dy^2+dz^2). \tag{106.3}$$

Obsérvese que no sólo en g_{00}, sino también en $g_{\alpha\beta}$ aparecen términos de primer orden en ϕ; en el § 87 se indicó ya que en las ecuaciones del movimiento de la partícula los términos correctivos en $g_{\alpha\beta}$ conducen a cantidades de un orden de pequeñez superior al de los términos que proceden de g_{00}; en consecuencia, por comparación con las ecuaciones newtonianas del movimiento se podría determinar sólo g_{00}.

Conforme se verá por lo que sigue, para obtener las ecuaciones del movimiento basta en este caso conocer las componentes espaciales $h_{\alpha\beta}$ con la precisión ($\sim 1/c^2$)

† Este resultado concuerda enteramente, claro está, con las fórmulas que se hallaron en el § 104 para $h_{ik}^{(1)}$ [donde $h_{\alpha\beta}^{(1)}$ se representa en la forma (104.1a)].

con que vienen dadas en (106.1); las componentes mixtas (que son nulas en la aproximación $1/c^2$) hay que obtenerlas con una precisión del orden de $1/c^3$, y la componente temporal h_{00} hasta términos del orden de $1/c^4$. Para calcularlas volvamos a las ecuaciones generales de la gravitación, teniendo en cuenta en ellas los términos de los correspondientes órdenes.

Al prescindir del hecho de que los cuerpos son macroscópicos, debemos escribir el tensor energía-impulso de la materia en la forma (33.4), (33.5). En coordenadas curvilíneas, esta expresión adopta la forma

$$T^{ik} = \sum_a \frac{m_a c}{\sqrt{-g}} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{dt} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a) \tag{106.4}$$

[en cuanto a la aparición del factor $1/\sqrt{-g}$, véase el paso análogo en (90.4)]; la suma se extiende a todos los cuerpos del sistema.

La componente

$$T_{00} = \sum_a \frac{m_a c^3}{\sqrt{-g}} g_{00}^2 \frac{dt}{ds} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)$$

en primera aproximación (para g_{ik} galileanas), es igual a $\sum_a m_a c^2 \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)$; en la aproximación siguiente, substituiremos en vez de g_{ik} los valores (106.3) y después de un sencillo cálculo se encuentra:

$$T_{00} = \sum_a m_a c^2 \left(1 + \frac{5\phi_a}{c^2} + \frac{v_a^2}{2c^2}\right) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a), \tag{106.5}$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad ordinaria tridimensional $\left(v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}\right)$ y ϕ_a es el potencial del campo en el punto $\mathbf{r}_a$. (Por el momento no nos preocupamos de que ϕ_a contiene una parte infinita — el potencial del autocampo de la partícula m_a; acerca de esto, véase más adelante.)

En cuanto a las componentes $T_{\alpha\beta}$, $T_{0\alpha}$ del tensor energía-impulso, en esta misma aproximación basta conservar sólo los primeros términos del desarrollo de la expresión (106.4)

$$T_{\alpha\beta} = \sum_a m_a v_{a\alpha} v_{a\beta} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a), \tag{106.6}$$

$$T_{0\alpha} = -\sum_a m_a c v_{a\alpha} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a).$$

Pasemos ahora a calcular las componentes del tensor R_{ik}. Conviene efectuar el cálculo utilizando la fórmula $R_{ik} = g^{lm} R_{limk}$, con R_{limk} dado por (92.4). Hay

que recordar aquí que las cantidades $h_{\alpha\beta}$ y h_{00} contienen sólo términos de orden no inferior al de $1/c^2$ y que $h_{0\alpha}$ contiene sólo términos de orden no inferior al de $1/c^3$; la derivación respecto de $x^0 = ct$ aumenta en una unidad el orden de pequeñez de todas las cantidades.

Los términos dominantes en R_{00} son del orden de $1/c^2$; junto con ellos, hemos de conservar también los términos del orden siguiente no nulos — términos del orden de $1/c^4$. Un simple cálculo conduce al resultado siguiente:

$$R_{00} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial h_0^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2c}\frac{\partial h_\alpha^\alpha}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^{\alpha 2}} + \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\alpha}\right)^2 + \\ - \frac{1}{4}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta}\left(2\frac{\partial h_\beta^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\delta h_\alpha^\alpha}{\partial x^\beta}\right).$$

Hasta aquí no hemos utilizado todavía ninguna condición suplementaria relativa a las cantidades h_{ik}. Valiéndonos de ello, impongamos ahora la condición

$$\frac{\partial h_0^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2c}\frac{\partial h_\alpha^\alpha}{\partial t} = 0, \tag{106.7}$$

como resultado de la cual todos los términos que contienen las componentes $h_{0\alpha}$ desaparecen de R_{00}. Substituyamos en los términos restantes

$$h_\alpha^\beta = -\frac{2}{c^2}\phi\delta_\alpha^\beta, \qquad h_{00} = \frac{2}{c^2}\phi + O\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

con lo que se obtiene, dentro de la precisión fijada,

$$R_{00} = \frac{1}{2}\Delta h_{00} + \frac{2}{c^4}\phi\Delta\phi - \frac{2}{c^4}(\nabla\phi)^2, \tag{106.8}$$

donde hemos pasado a la notación tridimensional; ϕ es aquí el potencial newtoniano del sistema de puntos materiales, es decir,

$$\phi = -k\sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}.$$

Al calcular las componentes $R_{0\alpha}$ basta conservar solamente los términos del orden de $1/c^3$ — los primeros no nulos. De manera análoga al caso anterior, se encuentra:

$$R_{0\alpha} = \frac{1}{2c}\frac{\partial^2 h_\alpha^\beta}{\partial t \partial x^\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_0^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{1}{2c}\frac{\partial^2 h_\beta^\beta}{\partial t \partial x^\alpha} + \frac{1}{2}\Delta h_{0\alpha}$$

y entonces, teniendo en cuenta la condición (106.7):

$$R_{0\alpha} = \frac{1}{2}\Delta h_{0\alpha} + \frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x^\alpha}. \tag{106.9}$$

Utilizando las expresiones (106.5)-(106.9), escribamos ahora las ecuaciones de la gravitación

$$R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T\right). \tag{106.10}$$

La componente temporal de la ecuación (105.10) nos da:

$$\Delta h_{00} + \frac{4}{c^4}\phi\Delta\phi - \frac{4}{c^4}(\nabla\phi)^2 = \frac{8\pi k}{c^4}\sum_a m_a c^2\left(1 + \frac{5\phi_a}{c^2} + \frac{3v_a^2}{2c^2}\right)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a);$$

en virtud de la identidad

$$4(\nabla\phi)^2 = 2\Delta(\phi^2) - 4\phi\Delta\phi$$

y de la ecuación del potencial newtoniano

$$\Delta\phi = 4\pi k\sum_a m_a\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a), \tag{106.11}$$

escribiremos dicha ecuación en la forma

$$\Delta\left(h_{00} - \frac{2}{c^4}\phi^2\right) = \frac{8\pi k}{c^2}\sum_a m_a\left(1 + \frac{\phi_a'}{c^2} + \frac{3v_a^2}{2c^2}\right)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a). \tag{106.12}$$

Una vez efectuados los cálculos, en el segundo miembro de (106.12) se ha substituido ϕ_a por

$$\phi_a' = -k\sum_b{}' \frac{m_b}{|r_a - r_b|},$$

es decir, por el potencial, en el punto $\mathbf{r}_a$, del campo producido por todas las partículas excepto la partícula m_a; la exclusión del autopotencial infinito de las partículas (que en el método seguido aquí se consideran como puntos materiales) corresponde a una « renormalización » de sus masas, como resultado de la cual dichas masas toman sus valores reales, es decir, los que tienen en cuenta los campos producidos por las propias partículas †.

La solución de la ecuación (106.12) puede escribirse inmediatamente utilizando

† En efecto, si hay una sola partícula en reposo, el segundo miembro de la ecuación se reducirá a $(8\pi k/c^2)m_a\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)$ y esta ecuación determinará correctamente (en segunda aproximación) el campo producido por la partícula.

la conocida relación (36.9)

$$\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

Se encuentra así:

$$h_{00} = \frac{2\phi}{c^2} + \frac{2\phi^2}{c^4} - \frac{2k}{c^4}\sum_a \frac{m_a\phi'_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|} - \frac{3k}{c^4}\sum_a \frac{m_a v_a^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}. \tag{106.13}$$

La componente mixta de la ecuación (106.10) nos da:

$$\Delta h_{0\alpha} = -\frac{16\pi k}{c^3}\sum_a m_a v_{a\alpha}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t\,\partial x^\alpha}. \tag{106.14}$$

La solución de esta ecuación lineal es †:

$$h_{0\alpha} = \frac{4k}{c^3}\sum_a \frac{m_a v_{a\alpha}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|} - \frac{1}{c^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial x^\alpha},$$

donde f es la solución de la ecuación suplementaria

$$\Delta f = \phi = -\sum_a \frac{km_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}.$$

Teniendo en cuenta la relación $\Delta r = 2/r$, se encuentra:

$$f = -\frac{k}{2}\sum_a m_a|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|,$$

y después de un simple cálculo se obtiene entonces finalmente:

$$h_{0\alpha} = \frac{k}{2c^3}\sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}[7v_{a\alpha} + (\mathbf{v}_a\cdot\mathbf{n}_a)n_{a\alpha}], \tag{106.15}$$

donde $\mathbf{n}_a$ es el vector unitario correspondiente al vector $\mathbf{r}-\mathbf{r}_a$.

Las expresiones (106.1), (106.13) y (106.15), son suficientes para calcular la función de Lagrange buscada hasta términos de segundo orden.

---

† En el caso estacionario, no existe el segundo término del segundo miembro de la ecuación (106.14). A grandes distancias del sistema, su solución se puede escribir, sin más, por analogía con la solución (44.3) de la ecuación (43.4):

$$h_{0\alpha} = \frac{2k}{c^3 r^2}(\mathbf{M}\times\mathbf{n})_\alpha$$

(donde $\mathbf{M} = \int \mathbf{r}\times\mu\mathbf{v}dV = \Sigma m_a\,\mathbf{r}_a\times\mathbf{v}_a$ es el momento cinético del sistema), en completo acuerdo con la fórmula (104 10).

La función de Lagrange de una sola partícula en el campo gravitatorio producido por otras partículas, que se supone dado, es

$$L_a = -m_a c \frac{ds}{dt} = -m_a c^2 \left(1 + h_{00} + 2h_{0\alpha}\frac{v_a^\alpha}{a} - \frac{v_a^2}{c^2} + h_{\alpha\beta}\frac{v_a^\alpha v_a^\beta}{c^2}\right)^{1/2}.$$

Desarrollando la raíz cuadrada y prescindiendo de la constante $-m_a c^2$, que carece de importancia, escribiremos esta expresión, dentro del orden de aproximación requerido, en la forma:

$$L_a = \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{m_a v_a^4}{8c^2} - m_a c^2 \left(\frac{h_{00}}{2} + h_{0\alpha}\frac{v_a^\alpha}{c} + \frac{1}{2c^2}h_{\alpha\beta}v_a^\alpha v_a^\beta - \frac{h_{00}^2}{8} + \frac{h_{00}}{4c^2}v_a^2\right). \tag{106.16}$$

Los valores de todas las h_{ik} se toman aquí en el punto $\mathbf{r}_a$; una vez más hemos de prescindir de los términos que se hacen infinito, lo que equivale a una « renormalización » de la masa m_a que aparece como coeficiente en L_a.

La marcha ulterior del cálculo es la siguiente: la función de Lagrange total del sistema no es, claro está, igual a la suma de las funciones de Lagrange L_a correspondientes a cada uno de los cuerpos, pero se debe construir de manera tal que conduzca a los valores correctos de las fuerzas $\mathbf{f}_a$ que actúan sobre cada uno de los cuerpos para un movimiento dado de los restantes. Calcularemos para ello las fuerzas $\mathbf{f}_a$ derivando la función de Lagrange L_a:

$$\mathbf{f}_a = \left(\frac{\partial L_a}{\partial \mathbf{r}}\right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_a}$$

(la derivación se efectúa respecto de las coordenadas variables $\mathbf{r}$ del « punto de observación » en las expresiones de h_{ik}). Es fácil formar luego la función de Lagrange general L, de la que se deducen todas aquellas fuerzas $\mathbf{f}_a$ calculando las derivadas parciales $\dfrac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}$.

Prescindiendo de simples cálculos intermedios, daremos sin más el resultado final a que se llega para la función de Lagrange †:

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}\left(1 + 3\sum_b{}' \frac{km_b}{c^2 r_{ab}}\right) + \sum_a \frac{m_a v_a^4}{8c^2} + \sum_a \sum_b{}' \frac{km_a m_b}{2r_{ab}} - \\ - \sum_a \sum_b{}' \frac{km_a m_b}{4c^2 r_{ab}} [7\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_{ab})] - \sum_a \sum_b{}' \sum_c{}' \frac{k^2 m_a m_b m_c}{2c^2 r_{ab} r_{ac}}, \tag{106.17}$$

† Las ecuaciones del movimiento que corresponden a esta función de Lagrange fueron obtenidas por primera vez por A. Einstein, L. Infeld y B. Hoffmann (1938) y por A. Eddington y G. Clark (1938).

donde $r_{ab} = |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$, $\mathbf{n}_{ab}$ es el vector unitario correspondiente al vector $\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$ y el apóstrofo en el signo de suma significa que hay que prescindir del término con $b = a$ o $c = a$.

Problemas

1. Determinar la acción del campo gravitatorio en la aproximación newtoniana.

Solución. Utilizando las g_{ik} de (106.3), a partir de la fórmula general (93.3) se encuentra $G = -\frac{2}{c^4}(\nabla\phi)^2$, de manera que la acción del campo es:

$$S_g = -\frac{1}{8\pi k}\int\int (\nabla\phi)^2 dV dt.$$

La acción total, que corresponde al campo más las masas distribuidas en el espacio con densidad μ, es:

$$S = \int\int \left[\frac{\mu v^2}{2} - \mu\phi - \frac{1}{8\pi k}(\nabla\phi)^2\right] dV dt. \tag{1}$$

Es fácil comprobar que la variación de S respecto de ϕ conduce a la ecuación de Poisson (96.2), como debe ser.

La densidad de energía se encuentra a partir de la densidad de la función de Lagrange Λ [el integrando en (1)] mediante la fórmula general (32.5), lo que equivale en el presente caso (debido a que en Λ no aparecen las derivadas de ϕ respecto del tiempo) a cambiar el signo de los términos segundo y tercero. Integrando la densidad de energía en todo el espacio, una vez efectuada la substitución $\mu\phi = \frac{1}{4\pi k}\phi\Delta\phi$ en el segundo término, e integrado por partes, se obtiene finalmente la energía total del campo y la materia en la forma:

$$\int \left[\frac{\mu v^2}{2} - \frac{1}{8\pi k}(\nabla\phi)^2\right] dV.$$

Por consiguiente, la densidad de energía del campo gravitatorio en la teoría newtoniana es $W = -\frac{1}{8\pi k}(\nabla\phi)^2$ †.

2. Determinar en segunda aproximación las coordenadas del centro de masas de un sistema de cuerpos gravitatorios.

Solución. Vista la completa analogía formal que existe entre la ley de Newton de la interacción gravitatoria y la ley de Coulomb de la interacción electrostática, las coordenadas del centro de masas vendrán dadas por la fórmula:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\mathcal{E}}\sum_a{}' \mathbf{r}_a\left(m_a c^2 + \frac{p_a^2}{2m_a} - \frac{km_a}{2}\sum_b{}' \frac{m_b}{r_{ab}}\right),$$

$$\mathcal{E} = \sum_a{}' \left(m_a c^2 + \frac{p_a^2}{2m_a} - \frac{km_a}{2}\sum_b{}' \frac{m_b}{r_{ab}}\right),$$

† Para evitar posibles interpretaciones erróneas, hay que subrayar que esta expresión no coincide con la componente $(-g)\,t_{00}$ del pseudotensor energía-impulso [calculado con las g_{ik} de (106.3)]; existe también una contribución a W debida a $(-g)\,T_{ik}$.

que es análoga a la obtenida en el problema 1 del § 65.

3. Determinar el corrimiento secular del perihelio de la órbita de dos cuerpos gravitatorios de masa comparable (H. Robertson, 1938).

Solución. La función de Lagrange del sistema de dos cuerpos es:

$$L = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{k m_1 m_2}{r} + \frac{1}{8c^2}(m_1 v_1^4 + m_2 v_2^4) + \\ + \frac{k m_1 m_2}{2c^2 r}[3(v_1^2+v_2^2) - 7\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n})] - \frac{k^2 m_1 m_2 (m_1+m_2)}{2c^2 r^2}.$$

Pasando a la función de Hamilton y prescindiendo en ella del movimiento del centro de masa (cf. problema 2, § 65) se obtiene:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) - \frac{k m_1 m_2}{r} - \frac{p^4}{8c^2}\left(\frac{1}{m_1^3}+\frac{1}{m_2^3}\right) - \\ - \frac{k}{2c^2 r}\left[3p^2\left(\frac{m_2}{m_1}+\frac{m_1}{m_2}\right)+7p^2+(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})^2\right] + \frac{k^2 m_1 m_2 (m_1+m_2)}{2c^2 r^2}, \qquad (1)$$

donde $\mathbf{p}$ es el impulso del movimiento relativo.

Determinemos la componente radial del impulso p_r en función de la variable r y de los parámetros M (el momento cinético) y $\mathcal{E}$ (la energía). Esta función se obtiene a partir de la ecuación $\mathcal{H} = \mathcal{E}$ (en la que, en los términos de segundo orden, hemos de substituir p^2 por su expresión en la aproximación de orden cero):

$$\mathcal{E} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\left(p_r^2+\frac{M^2}{r^2}\right) - \frac{k m_1 m_2}{r} - \frac{1}{8c^2}\left(\frac{1}{m_1^3}+\frac{1}{m_2^3}\right)\left(\frac{2m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)^2\left(\mathcal{E}+\frac{k m_1 m_2}{r}\right)^2 - \\ - \frac{k}{2c^2 r}\left[3\left(\frac{m_2}{m_1}+\frac{m_1}{m_2}\right)+7\right]\frac{2m_1 m_2}{m_1+m}\left(\mathcal{E}+\frac{k m_1 m_2}{r}\right) - \frac{k}{2c^2 r}p_r^2 + \frac{k^2 m_1 m_2 (m_1+m_2)}{2c^2 r^2}.$$

La marcha ulterior de los cálculos es análoga a la seguida en el § 98. Una vez determinado p_r mediante la ecuación algebraica antes indicada, transformemos la variable r en la integral

$$S_r = \int p_r dr,$$

de manera que el término que contiene M^2 se reduzca a la forma M^2/r^2. Desarrollando entonces el radicando en potencias de las pequeñas correcciones relativistas, se obtiene:

$$S_r = \int \sqrt{A + \frac{B}{r} - \left(M^2 - \frac{6k^2 m_1^2 m_2^2}{c^2}\right)\frac{1}{r^2}}\, dr$$

[cf. (98.6)], donde A y B son coeficientes constantes que no es necesario calcular explícitamente.

Para el corrimiento del perihelio de la órbita del movimiento relativo se obtiene así:

$$\delta\phi = \frac{6\pi k^2 m_1^2 m_2^2}{c^2 M^2} = \frac{6\pi k (m_1+m_2)}{c^2 a(1-e^2)}.$$

Comparando con (98.7), vemos que, fijadas las dimensiones y la forma de la órbita, el corrimiento del perihelio es el mismo que el correspondiente al movimiento de un cuerpo que se encuentra en el campo de un centro fijo de masa m_1+m_2.

4. Determinar la frecuencia de precesión de un trompo esférico que efectúa un movimiento orbital en el campo gravitatorio de un cuerpo central que gira entorno de su eje.

Solución. En primera aproximación, el efecto que se busca resulta ser la suma de dos partes independientes, una de las cuales está ligada con el carácter newtoniano del campo con simetría central, y la otra, con la rotación del cuerpo que lo genera †).

La primera parte se representa por un término adicional en la función de Lagrange del trompo, que corresponde al segundo término en (106.17). Representemos la velocidad de los elementos del trompo (elementos de masa dm) en la forma $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, donde $\mathbf{V}$ es la velocidad de su movimiento orbital, $\boldsymbol{\omega}$ la velocidad angular y $\mathbf{r}$ el vector posición del elemento dm respecto del centro de masa del trompo (de modo que la integral extendida al volumen del mismo $\int \mathbf{r}\, dm = 0$). Prescindiendo de los términos que no dependen de $\boldsymbol{\omega}$, y también de los términos cuadráticos en $\boldsymbol{\omega}$, tenemos:

$$\delta^{(1)}L = \frac{3km'}{2c^2} \int \frac{2\,\mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}{R},$$

donde m' es la masa del cuerpo central, $R = |\mathbf{R}_0 + \mathbf{r}|$ la distancia del centro del campo al elemento dm, $\mathbf{R}_0$ el vector posición del centro de masa del trompo. Con el desarrollo $\frac{1}{R} \approx \frac{1}{R_0} - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{R^2}$ (donde $\mathbf{n} = \mathbf{R}_0/R_0$), la integral del primer término se anula, y en el segundo la integración se efectúa mediante la fórmula

$$\int x_\alpha\, x_\beta\, dm = \frac{1}{2} I\delta_{\alpha\beta},$$

donde I es el momento de inercia del trompo. El resultado que se obtiene es:

$$\delta^{(1)}L = \frac{3km'}{2c^2R_0^2}\, \mathbf{M} \cdot (\mathbf{V}_0 \times \mathbf{n})$$

donde $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}$ es el momento de rotación del trompo.

El término complementario en la función de Lagrange, vinculado con la rotación del cuerpo central, podría también hallarse a partir de (106.17), pero es todavía más fácil calcularlo mediante la fórmula (1) del problema del § 104:

$$\delta^{(2)}L = \frac{2k}{c^2} \int \frac{\mathbf{M}' \cdot [(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{R}]}{R^3}\, dm,$$

donde $\mathbf{M}'$ es el momento cinético del cuerpo central. Desarrollando

$$\frac{\mathbf{R}}{R^3} \approx \frac{\mathbf{n}}{R_0^2} + \frac{1}{R_0^3}(\mathbf{r} - 3\mathbf{n}(\mathbf{nr}))$$

† El primer efecto fue estudiado por *H. Weyl* (1923), y el segundo por *L. Shiff* (1960).

y efectuando la integración, obtendremos:

$$\delta^{(2)}L = \frac{k}{c^2 R_0^3}\{\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}' - 3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{M})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}')\}$$

De esta manera, la contribución total a la función de Lagrange es:

$$\delta L = -\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\Omega},\ \Omega = \frac{3km'}{2c^2R_0^2}\mathbf{n}\times\mathbf{v}_0 + \frac{k}{c^2R_0^3}\{3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}') - \mathbf{M}'\}$$

A esta función corresponde la ecuación del movimiento

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{M}$$

[cf. la ecuación (2) del problema del § 104]. Esto significa que el momento cinético del trompo **M** efectúa un movimiento de precesión con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ manteniendo constante su módulo.

CAPÍTULO 12

PROBLEMAS COSMOLÓGICOS

§ 107. El espacio isótropo

La teoría de la relatividad general abre nuevos caminos para abordar la resolución de los problemas que plantean las propiedades del universo a escala cósmica. Las nuevas y prometedoras posibilidades que así se ofrecen, están vinculadas con la naturaleza no galileana del espacio-tiempo.

Estas posibilidades son tanto más importantes cuanto que la mecánica newtoniana conduce aquí a contradicciones que no se pueden evitar, con carácter suficientemente general, dentro del marco de la teoría no relativista. Así, si se aplica la fórmula newtoniana del potencial gravitatorio (96.3) a un espacio infinito plano (que es el de la mecánica de Newton), lleno de materia distribuida con densidad media en todo punto no nula, se encuentra que el potencial se hace infinito en cualquier punto. Esto conduciría a fuerzas infinitas que actúan sobre la materia, es decir, a un absurdo.

Sabemos que las estrellas están distribuidas en el espacio de manera extraordinariamente no uniforme — de hecho, se concentran en sistemas estelares individuales (las llamadas galaxias). Pero al estudiar el universo a « gran escala » hemos de prescindir de estas faltas de homogeneidad « locales », que son el resultado de la aglomeración de la materia formando estrellas y sistemas estelares. Por densidad de masa debemos entender, por lo tanto, la densidad promediada en regiones del espacio cuyas dimensiones son grandes comparadas con las distancias que separan las galaxias entre sí.

Las soluciones de las ecuaciones de la gravitación de Einstein, relativas a este problema, que consideramos en lo que sigue (y obtenidas por primera vez por A. Friedmann, 1922) se basan en la hipótesis de que la materia está distribuida uniformemente en todo el espacio †.

† El tipo de ecuaciones que contienen la llamada constante cosmológica no será objeto de estudio, ya que hoy está claro que no existe base física suficiente para realizar este cambio en la forma de las ecuaciones de la gravitación.

Los datos astronómicos de que se dispone no contradicen esta hipótesis. Pero, ya por su propia esencia, es claro que pueden tener tan sólo un carácter aproximado, puesto que la homogeneidad desaparece, evidentemente, al pasar a escalas más reducidas. Con todo, la hipótesis de la homogeneidad del Universo ha avanzado mucho desde el punto de vista matemático y con ello se plantea el problema de si la no uniformidad no puede cambiar, incluso cualitativamente, las propiedades del modelo considerado.

Al mismo tiempo existen toda clase de razones para considerar que el modelo isótropo da, en rasgos generales, una descripción adecuada del estado actual del Universo. Veremos más adelante que una propiedad fundamental de este modelo es su carácter no estacionario. No hay duda alguna de que esta propiedad proporciona una explicación correcta del fenómeno del « corrimiento hacia el rojo » (§ 110), que plantea un problema fundamental para la cosmología.

El espacio, lleno uniformemente de materia, es completamente homogéneo e isótropo en sus propiedades. Esto significa que podemos elegir un tiempo « universal » tal que en cualquiera de sus instantes la métrica del espacio es la misma en todos los puntos y en todas direcciones.

Estudiemos primero la métrica del espacio isótropo en sí, prescindiendo por el momento de cualquier posible dependencia respecto del tiempo. Al igual que antes, representemos el tensor métrico tridimensional por $\gamma_{\alpha\beta}$, es decir, escribamos el elemento de distancia espacial en la forma

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \tag{107.1}$$

La curvatura del espacio está completamente determinada por su tensor de curvatura tridimensional, que representaremos por $P^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ para distinguirlo del tensor de cuatro dimensiones R^i_{klm} (las propiedades del tensor $P^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ son, claro está, del todo análogas a las del tensor R^i_{klm}). En el caso de isotropía completa, el tensor $P^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ debe expresarse, evidentemente, en función tan sólo del tensor métrico $\gamma_{\alpha\beta}$. Es fácil ver que, en virtud de las propiedades de simetría de $P^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ (véase § 92), dicho tensor debe ser de la forma:

$$P^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \lambda(\delta^\alpha_\gamma \gamma_{\delta\beta} - \delta^\alpha_\delta \gamma_{\gamma\beta}), \tag{107.2}$$

donde λ es una constante. El tensor de segundo orden $P_{\alpha\beta} = P^\gamma_{\alpha\gamma\beta}$, de acuerdo con esto, es igual a

$$P_{\alpha\beta} = 2\lambda\gamma_{\alpha\beta} \tag{107.3}$$

y la curvatura escalar

$$P = 6\lambda. \tag{107.4}$$

Vemos así que las propiedades de curvatura de un espacio isótropo dependen tan sólo de una constante λ. Debido a esto existen en total tres casos diferentes posibles de la métrica espacial: (1) el llamado espacio de curvatura positiva constante (que corresponde a un valor positivo de λ), (2) el espacio de curvatura negativa constante (que corresponde a valores $\lambda<0$), y (3) el espacio de curvatura nula ($\lambda = 0$). De ellos, el último es el espacio plano, es decir, el espacio euclídeo.

Para el estudio de la métrica es conveniente partir de la analogía geométrica, considerando la geometría de un espacio tridimensional isótropo como geometría sobre una hipersuperficie de la que se sabe que es isótropa (en un espacio ficticio cuadridimensional †.) Una hipersuperficie de estas características es una hiperesfera; el espacio de tres dimensiones que le corresponde tiene curvatura constante positiva. La ecuación de una hiperesfera de radio a en el espacio cuadridimensional x_1, x_2, x_3, x_4, es de la forma

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = a^2,$$

y el elemento de longitud sobre ella se puede expresar mediante la relación

$$dl^2 = dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2.$$

Considerando x^1, x^2, x^3 como las tres coordenadas espaciales y eliminando de dl^2 la coordenada ficticia x^4 mediante la primera ecuación, se obtiene el elemento de distancia espacial en la forma

$$dl^2 = dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+\frac{(x_1dx_1+x_2dx_2+x_3dx_3)^2}{a^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2}. \tag{107.5}$$

A partir de esta expresión es fácil calcular la constante λ que aparece en (107.2). Dado que sabemos de antemano que el tensor $P_{\alpha\beta}$ tiene la forma (107.3) en todo el espacio, basta calcularlo sólo para puntos situados cerca del origen de coordenadas, donde las $\gamma_{\alpha\beta}$ son iguales a

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}+\frac{x_\alpha x_\beta}{a^2}.$$

Las derivadas primeras de las $\gamma_{\alpha\beta}$, que determinan a las cantidades $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, se anulan en el origen, con lo que el cálculo a partir de la fórmula general (92.10) resulta muy sencillo y conduce al resultado siguiente:

† Este espacio de cuatro dimensiones no tiene nada que ver, claro está, con el espacio-tiempo cuadridimensional.

$$\lambda = \frac{1}{a^2}. \tag{107.6}$$

La cantidad a puede llamarse « radio de curvatura » del espacio. Introduzcamos en vez de las coordenadas x^1, x^2, x^3, las correspondientes coordenadas « esféricas r, θ, ϕ. El elemento lineal toma entonces la forma:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{a^2}} + r^2\,(\mathrm{sen}^2\theta\, d\phi^2 + d\theta^2). \tag{107.7}$$

Naturalmente, el origen de coordenadas se puede fijar en un punto cualquiera del espacio. La longitud de una circunferencia en estas coordenadas es igual a $2\pi r$ y la superficie de una esfera, a $4\pi r^2$. El « radio » de una circunferencia (o de una esfera), en cambio, es igual a

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^2/a^2}} = a\,\mathrm{arcsen}\,(r/a),$$

esto es, es mayor que r. La razón de la circunferencia al radio en este espacio es así menor que 2π.

Otra forma cómoda la adopta dl^2 en « coordenadas esféricas cuadridimensionales », coordenadas que se obtienen introduciendo, en vez de la coordenada r, el « ángulo » χ de acuerdo con $r = a\,\mathrm{sen}\,\chi$ (χ varía entre los límites 0 y π) †. En estas condiciones:

$$dl^2 = a^2[d\chi^2 + \mathrm{sen}^2\chi\,(\mathrm{sen}^2\theta\, d\phi^2 + d\theta^2)]. \tag{107.8}$$

La coordenada χ mide la distancia desde el origen de coordenadas, igual a $a\chi$. Vemos, pues, que, al apartarse del origen, la superficie de una esfera aumenta, hasta alcanzar su valor máximo $4\pi a^2$ a la distancia $\pi a/2$. Más allá, empieza a decrecer, reduciéndose a un punto en el « polo opuesto » del espacio, a la distancia πa, a la máxima distancia posible en un espacio de este tipo [todo esto se ve también claramente en (107.7), observando que la coordenada r no puede tomar valores mayores que a].

El volumen de un espacio de curvatura positiva es igual a

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} a^3\mathrm{sen}^2\chi\,\mathrm{sen}\theta\, d\chi\, d\theta\, d\phi,$$

† Las coordenadas « cartesianas » x_1, x_2, x_3, x_4 están ligadas con las coordenadas esféricas cuadridimensionales a, θ, ϕ, χ por las relaciones:

$$x_1 = a\,\mathrm{sen}\,\chi\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi, \quad x_2 = a\,\mathrm{sen}\,\chi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,$$

$$x^3 = a\,\mathrm{sen}\,\chi\cos\theta, \quad x_4 = a\cos\chi.$$

de donde,

$$V = 2\pi^2 a^3. \tag{107.9}$$

Un espacio de curvatura positiva resulta así estar « cerrado en sí mismo », es decir, su volumen es finito aunque, claro está, carece de límites.

Es interesante observar que en un espacio cerrado la carga eléctrica total debe ser nula. En efecto, toda superficie cerrada en un espacio finito encierra a cada lado de ella una región finita del espacio. Por lo tanto, el flujo del campo eléctrico a través de esta superficie es igual, de una parte, a la carga total interior a la superficie, y, de otra, a la carga total fuera de ella, con signo opuesto. Por consiguiente, la suma de las cargas a uno y otro lado de la superficie es igual a cero.

Análogamente, de la expresión (101.14) del cuadrimpulso como integral de superficie se sigue la anulación del cuadrimpulso total p^i en todo el espacio. La definición del cuadrimpulso total pierde así su sentido, ya que la correspondiente ley de conservación degenera en la identidad $0 = 0$.

Pasemos ahora a considerar la geometría de un espacio de curvatura negativa constante. De (107.6) se deduce que la constante λ es negativa si a es imaginaria. Por lo tanto, todas las fórmulas correspondientes al espacio de curvatura negativa pueden obtenerse a partir de las anteriores sin más que substituir a por ia. Con otras palabras, la geometría de un espacio de curvatura negativa se obtiene matemáticamente como geometría de una pseudoesfera de cuatro dimensiones de radio imaginario.

Así, la constante λ es ahora igual a

$$\lambda = -\frac{1}{a^2}, \tag{107.10}$$

y el elemento de longitud de un espacio de curvatura negativa, en coordenadas r, θ, ϕ, tiene la forma

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1+\dfrac{r^2}{a^2}} + r^2(\operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2 + d\theta^2), \tag{107.11}$$

donde la coordenada r varía entre 0 e ∞. La razón de la circunferencia al radio es ahora mayor que 2π. La expresión de dl^2 que corresponde a la (107.8) se obtiene introduciendo la coordenada χ definida por $r = a \operatorname{senh} \chi$ (χ varía entre 0 e ∞). En estas condiciones,

$$dl^2 = a^2\{d\chi^2 + \operatorname{senh}^2\chi(\operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2 + d\theta^2)\}. \tag{107.12}$$

La superficie de una esfera es ahora igual a $4\pi a^2 \operatorname{senh}^2 \chi$ y cuando nos apartamos del origen (valores crecientes de χ) aumenta sin límite. El volumen de un espacio de curvatura negativa es, evidentemente, infinito.

PROBLEMA

Transformar el elemento de longitud (106.7) reduciéndolo a una forma en que resulte proporcional a su expresión euclídea.

Solución. La substitución

$$r = \frac{r_1}{1+\frac{r_1^2}{4a^2}}$$

conduce al resultado:

$$dl^2 = \left(1+\frac{r_1^2}{4a^2}\right)^{-2} (dr_1^2 + r_1^2\, d\theta^2 + r_1^2 \operatorname{sen}^2\theta \cdot d\phi^2).$$

§ 108. Métrica del espacio-tiempo en el modelo isótropo cerrado

Pasando ahora al estudio de la métrica del espacio-tiempo isótropo, debemos elegir ante todo el sistema de referencia. El más conveniente es un sistema que, en cada punto del espacio, se mueve acompañando a la materia localizada en dicho punto. Se puede decir que el sistema de referencia es precisamente la materia que llena el espacio; la velocidad de la materia en él es, por definición, igual a cero en todas partes (sistema de referencia « acompañante »). Evidentemente, este sistema de referencia es el más razonable para el modelo isótropo, ya que en cualquier otro sistema la dirección de la velocidad de la materia introduciría una aparente no equivalencia de las diferentes direcciones del espacio. La coordenada temporal se debe elegir de la manera indicada en el párrafo anterior, es decir, de forma que, en cada instante, la métrica sea la misma en todo el espacio.

Dada la completa equivalencia de todas las direcciones, las componentes $g_{0\alpha}$ del tensor métrico son iguales a cero en el sistema de referencia elegido. En efecto, las tres componentes $g_{0\alpha}$ se pueden considerar como las componentes de un vector tridimensional que, si no fuera igual a cero, conduciría a una no equivalencia de las diferentes direcciones. Por consiguiente, ds^2 debe ser de la forma $ds^2 = g_{00}\, dx_0^2 - dl^2$. La componente g_{00} es aquí función sólo de x^0. Por lo tanto, podemos siempre elegir la coordenada temporal de manera que g_{00} se reduzca a c^2. Representándola por t, tenemos:

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dl^2. \tag{108.1}$$

Este tiempo t es, evidentemente, el tiempo propio en cada punto del espacio.

Consideremos, para empezar, un espacio de curvatura positiva; a partir de aquí, y para abreviar, llamaremos a la correspondiente solución de las ecuaciones de la gravitación « *modelo cerrado* ». Para *dl* utilizaremos la expresión (107.8) en la que el « radio de curvatura » a es, en general, función del tiempo. Escribiremos así ds^2 en la forma:

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - a^2(t)\{d\chi^2 + \operatorname{sen}^2\chi(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\cdot d\phi^2)\}. \tag{108.2}$$

La función $a(t)$ viene determinada por las ecuaciones del campo gravitatorio. Para resolverlas es conveniente utilizar, en vez del tiempo, la variable η definida por la relación

$$c\,dt = a\,d\eta. \tag{108.3}$$

Entonces ds^2 se puede escribir:

$$ds^2 = a^2(\eta)\{d\eta^2 - d\chi^2 - \operatorname{sen}^2\chi(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\cdot d\phi^2)\}. \tag{108.4}$$

Para establecer las ecuaciones del campo hemos de calcular primero las componentes del tensor R_{ik} (las coordenadas x^0, x^1, x^2, x^3 son η, χ, θ, ϕ). Utilizando los valores de las componentes del tensor métrico

$$g_{00} = a^2, \quad g_{11} = -a^2, \quad g_{22} = -a^2\operatorname{sen}^2\chi, \quad g_{33} = -a^2\operatorname{sen}^2\chi\operatorname{sen}^2\theta,$$

calculemos las cantidades Γ^i_{kl}:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{\dot a}{a}, \quad \Gamma^0_{\alpha\beta} = -\frac{\dot a}{a^3}g_{\alpha\beta}, \quad \Gamma^\alpha_{0\beta} = \frac{\dot a}{a}\delta^\alpha_\beta, \quad \Gamma^0_{\alpha 0} = \Gamma^\alpha_{00} = 0,$$

donde el punto representa la derivación respecto de η (no es necesario calcular las componentes $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ explícitamente). Mediante estos valores y en virtud de la fórmula general (92.10) se obtiene:

$$R^0_0 = -\frac{3}{a^4}(a\ddot a - \dot a^2).$$

Por las mismas razones de simetría que se aplicaron antes a las $g_{0\alpha}$, es claro que las componentes $R_{0\alpha} = 0$. Para el cálculo de las otras componentes R^β_α, obsérvese que si separamos en ellas los términos que contienen $g_{\alpha\beta}$ (es decir, solamente los $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$), dichos términos deben constituir las componentes del tensor tridimensional P^β_α, cuyos valores se conocen ya por (107.3) y (107.6):

$$R^\beta_\alpha = -P^\beta_\alpha + \cdots = -\frac{2}{a^2}\delta^\beta_\alpha + \cdots,$$

donde los puntos suspensivos representan términos que contienen g_{00} además de las $g_{\alpha\beta}$. Del cálculo de estos últimos términos se sigue:

$$R_\alpha^\beta = -\frac{1}{a^4}(2a^2+\dot{a}^2+a\ddot{a})\delta_\alpha^\beta,$$

de manera que

$$R = R_0^0+R_\alpha^\alpha = -\frac{6}{a^3}(a+\ddot{a}).$$

Dado que la materia se encuentra en reposo en el sistema de referencia adoptado, $u^\alpha = 0$, $u^0 = 1/a$, y en virtud de (94.9) tenemos $T_0^0 = \varepsilon$, donde ε es la densidad de energía de la materia. Substituyendo estas expresiones en la ecuación

$$R_0^0-\frac{1}{2}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_0^0,$$

obtenemos:

$$\frac{8\pi k}{c^4}\epsilon = \frac{3}{a^4}(a^2+\dot{a}^2). \tag{108.5}$$

Intervienen aquí dos funciones desconocidas, ϵ y a; nos hace falta por esto todavía otra ecuación. Es conveniente elegir para ella (en vez de las componentes espaciales de las ecuaciones del campo) la ecuación $T^i_{0;i} = 0$, que es una de las cuatro ecuaciones (94.7), consecuencia, conforme sabemos, de las ecuaciones de la gravitación. Con ayuda de relaciones termodinámicas, esta ecuación se puede también deducir directamente de la siguiente manera.

Cuando en las ecuaciones del campo se adopta la expresión (94.9) del tensor energía-impulso, estamos prescindiendo de todos aquellos procesos que implican disipación de la energía y que conducen a un aumento de la entropía. Esta aproximación, huelga casi decirlo, está completamente justificada aquí, ya que los términos adicionales que deberían sumarse a T_i^k para tener en cuenta la disipación de la energía son despreciables frente a su densidad ϵ, que incluye la energía en reposo de los cuerpos materiales.

Por consiguiente, al deducir las ecuaciones del campo podemos considerar constante la entropía total. Apliquemos ahora la conocida relación termodinámica $d\mathcal{E} = T\,dS-p\,dV$, donde $\mathcal{E}$, S, V, son la energía, la entropía y el volumen del sistema y p, T su presión y su temperatura. Cuando la entropía es constante, tenemos simplemente $d\mathcal{E} = -p\,dV$. Introduciendo la densidad de energía $\epsilon = \mathcal{E}/V$, se encuentra fácilmente:

$$d\epsilon = -(\epsilon+p)\frac{dV}{V}.$$

El volumen V del espacio es, de acuerdo con (107.9), proporcional al cubo del radio de curvatura a. Por lo tanto, $dV/V = 3da/a = 3d(\ln a)$, y podemos escribir:

$$-\frac{d\epsilon}{\epsilon+p} = 3d(\ln a),$$

o bien, integrando,

$$3\ln a = -\int \frac{d\epsilon}{p+\epsilon} + \text{const} \tag{108.6}$$

(el límite inferior de la integral es constante)

Si se conoce la relación entre ϵ y p (la « ecuación de estado » de la materia), la ecuación (108.6) define ϵ en función de a. A partir de (108.5) podemos entonces determinar η en la forma:

$$\eta = \pm \int_a \frac{da}{\sqrt{\frac{8\pi k}{3c^4}\epsilon a^2 - 1}}. \tag{108.7}$$

Las ecuaciones (108.6) y (108.7), resuelven, con carácter general, el problema de determinar la métrica en el modelo isótropo cerrado.

Si la materia está distribuida en el espacio en forma de cuerpos macroscópicos separados, para calcular el campo gravitatorio producido por ella podemos tratar dichos cuerpos como partículas materiales de masas determinadas y prescindir en absoluto de su estructura interna. Suponiendo que las velocidades de los cuerpos son relativamente pequeñas (pequeñas comparadas con c), podemos hacer, simplemente, $\epsilon = \mu c^2$, donde μ es la suma de las masas de los cuerpos referida a la unidad de volumen. Por la misma razón, la presión del « gas » constituido por estos cuerpos es pequeña comparada con ϵ, y podemos prescindir de ella (por lo que hemos dicho ya, la presión en el interior de los cuerpos nada tiene que ver con el problema que estamos considerando). En cuanto a la radiación presente en el espacio, la cantidad de ella es relativamente pequeña y se puede prescindir de su energía y su presión.

De esta manera, para describir en términos del modelo considerado el estado presente del Universo hay que utilizar la ecuación de estado de la materia « en polvo »

$$\epsilon = \mu c^2, \quad p = 0.$$

La integración en (108.6) da entonces $\mu a^3 = \text{const}$. Esta igualdad se podría escribir también directamente, ya que expresa simplemente la constancia de la suma M de las masas de los cuerpos en todo el espacio, como debe ser en el caso

considerado de la materia en polvo †). Dado que el volumen del espacio en el modelo cerrado es $V = 2\pi^2 a^3$, se tendrá const $= M/2\pi^2$. Así, pues,

$$\mu a^3 = \text{const} = \frac{M}{2\pi^2}. \tag{108.8}$$

Substituyendo (108.8) en (108.7) y efectuando la integración, se obtiene

$$a = a_0(1-\cos\eta), \tag{108.9}$$

donde $a_0 = 2kM/3\pi c^2$ es una constante. Finalmente, para la relación entre t y η encontramos, partiendo de (108.3):

$$t = \frac{a_0}{c}(\eta - \operatorname{sen}\eta). \tag{108.10}$$

Las ecuaciones (108.9) y (108.10) determinan la función $a(t)$ en forma paramétrica. La función $a(t)$ crece a partir de cero para $t = 0\,(\eta = 0)$ hasta el valor máximo $a = 2a_0$ que se alcanza para $t = \pi a_0/c\ (\eta = \pi)$ y decrece luego de nuevo hasta cero para $t = 2\pi a_0/c\ (\eta = 2\pi)$.

Cuando $\eta \ll 1$, tenemos aproximadamente $a = a_0\eta^2/2$, $t = a_0\eta^3/6c$, de modo que

$$a \approx \left(\frac{9a_0c^2}{2}\right)^{1/3} t^{2/3}. \tag{108.11}$$

En estas condiciones, la densidad de la materia es

$$\mu = \frac{1}{6\pi k t^2} = \frac{8\cdot 10^5}{t^2} \tag{108.12}$$

(el valor numérico del coeficiente se da para una densidad en $\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$ y t en segundos). Conviene observar que, en este límite, la dependencia $\mu(t)$ tiene carácter universal en el sentido de que no depende del parámetro a_0.

Cuando $a \to 0$ la densidad μ tiende a infinito. Pero, para $\mu \to \infty$, también pasa a ser grande la presión y, por ello, al investigar la métrica en este dominio es necesario considerar el caso opuesto, el de la mayor presión posible (para una densidad dada de energía ϵ), es decir, describir la materia por la ecuación de estado

$$p = \frac{\epsilon}{3}$$

† Para evitar interpretaciones erróneas (al comparar con la igualación a cero del cuadrimpulso total del Universo cerrado que se mencionó en el § 107) subrayaremos que M es precisamente la suma de las masas de los cuerpos tomados por separado, sin tener en cuenta su interacción gravitatoria.

(véase § 35). De la fórmula (108.6) resulta entonces

$$\epsilon a^4 = \text{const} \equiv \frac{3c^4 a_1^2}{8\pi k} \tag{108.13}$$

(a_1 es una nueva constante), con lo cual las ecuaciones (108.7) y (108.3) conducen a la dependencia

$$a = a_1 \operatorname{sen} \eta, \quad t = \frac{a_1}{c}(1 - \cos \eta).$$

Dado que sólo tiene sentido considerar esta solución para valores muy grandes de ϵ (es decir, para valores pequeños de a), hagamos $\eta \ll 1$. Entonces $a \approx a_1 \eta$, $t \approx a_1 \eta^2/_2 c$, de modo que

$$a = \sqrt{2a_1 ct}. \tag{108.14}$$

Además,

$$\frac{\epsilon}{c^2} = \frac{3}{32\pi k t^2} = \frac{4{,}5 \cdot 10^5}{t^2} \tag{108.15}$$

(tampoco esta relación contiene parámetros).

Así, pues, aquí, al igual que antes, $a \to 0$ cuando $t \to 0$, de modo que el valor $t=0$, efectivamente, es un punto singular de la métrica espacio-temporal del modelo isótropo (y lo mismo vale en el modelo cerrado para el segundo punto, en el cual $a = 0$). Vemos también por (108.14) que al cambiar t de signo la magnitud $a(t)$ se haría imaginaria y su cuadrado negativo. Las cuatro componentes g_{ik} que aparecen en (108.2) pasarían a ser entonces negativas, y el determinante g, a ser positivo. Pero una métrica tal es físicamente un sin sentido. Esto significa que carece de significación física prolongar analíticamente la métrica más allá del punto singular.

§ 109. Métrica del espacio-tiempo en el modelo isótropo abierto

La solución correspondiente a un espacio isótropo de curvatura negativa (*« modelo abierto »*) se obtiene siguiendo un método completamente análogo al que precede. En vez de (108.2), tenemos ahora

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \{d\chi^2 + \operatorname{senh}^2 \chi (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d\phi^2)\}. \tag{109.1}$$

Introduzcamos de nuevo en lugar de t la variable η definida por $c\,dt = a\,d\eta$; obtenemos entonces

$$ds^2 = a^2(\eta)\,\{d\eta^2 - d\chi^2 - \operatorname{senh}^2\chi\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta \cdot d\phi^2)\}. \tag{109.2}$$

Esta expresión se puede obtener formalmente a partir de (108.4) substituyendo en vez de η, χ, a, respectivamente, $i\eta$, $i\chi$, ia. Por ello, también las ecuaciones del campo se pueden deducir efectuando esta misma substitución en las ecuaciones (108.5) y (108.6). La ecuación (108.6) conserva su forma anterior:

$$3\ln a = -\int \frac{d\epsilon}{\epsilon + p} + \text{const}, \tag{109.3}$$

mientras que en vez de (108.5) se tiene:

$$\frac{8\pi k}{c^4}\,\epsilon = \frac{3}{a^4}\,(\dot{a}^2 - a^2). \tag{109.4}$$

Análogamente, en vez de (108.7) se encuentra:

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a\sqrt{\dfrac{8\pi k}{3c^4}\,\epsilon a^2 + 1}}. \tag{109.5}$$

Para la materia pulverizada se sigue de aquí †:

† Obsérvese que mediante la simple transformación

$$r = Ae^{\eta}\operatorname{senh}\chi, \qquad ct = Ae^{\eta}\cosh\chi,$$

$$Ae^{\eta} = \sqrt{c^2t^2 - r^2}, \qquad \operatorname{tgh}\,\chi = \frac{r}{ct},$$

la expresión (109.2) se convierte en la forma « galileana-conforme »

$$ds^2 = f(r, t)[c^2\,dt^2 - dr - r^2\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,d\phi^2)].$$

En particular, en el caso de (109.6) obtendremos (con la constante $A = a_0\ 1/2$).

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a_0}{2\sqrt{c^2t^2 - r^2}}\right)^4 [c^2dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,d\phi^2)]$$

(V. A. Fock, 1955). Para grandes valores de $\sqrt{c^2t^2 - r^2}$ (que corresponden a $\eta \gg 1$), esta métrica tiende a la forma galileana, como era de esperar dado que el radio de curvatura tiende a infinito.

Respecto a las coordenadas r, θ, ϕ, t, la materia no está en reposo y su distribución no es uniforme; la distribución y el movimiento de la materia presentan simetría central respecto de cualquier punto del espacio, elegido como origen de las coordenadas r, θ, ϕ.

$$a = a_0\,(\operatorname{cosh}\eta - 1),\quad t = \frac{a_0}{c}\,(\operatorname{senh}\eta - \eta), \tag{109.6}$$

$$\mu a^3 = \frac{3c^2}{4\pi k}\,a_0. \tag{109.7}$$

Las fórmulas (109.6) determinan en forma paramétrica la dependencia $a(t)$. En contraste con el modelo cerrado, el radio de curvatura varía en este caso con monotonía, creciendo desde cero para $t = 0$ ($\eta = 0$) hasta infinito cuando $t \to \infty$ ($\eta \to \infty$). La densidad de materia, en cambio, disminuye de manera monótona a partir de infinito para $t = 0$ [cuando $\eta \ll 1$ la ley de esta disminución viene dada por la misma fórmula aproximada (108.12) que en el modelo cerrado].

La solución (109.6-7) es inaplicable para grandes densidades y resulta necesario volver otra vez al caso $p = \epsilon/3$. Se obtiene entonces de nuevo la relación

$$\epsilon a^4 = \text{const} \equiv \frac{3c^4 a_1^2}{8\pi k}, \tag{109.8}$$

y para la dependencia $a(t)$ se encuentra:

$$a = a_1 \operatorname{senh}\eta,\quad t = \frac{a_1}{c}\,(\cosh\eta - 1),$$

o bien, cuando $\eta \ll 1$,

$$a = \sqrt{2a_1 ct} \tag{109.9}$$

[y la fórmula anterior (108.15) para $\epsilon(t)$[. De esta manera, también en el modelo abierto la métrica presenta un punto singular (pero, en contraste con el modelo cerrado, tan sólo uno).

Finalmente, en el caso límite de las soluciones consideradas correspondiente a un valor infinito del radio de curvatura del espacio, tenemos un modelo en que el espacio es plano (euclídeo). El intervalo ds^2 en el espacio-tiempo correspondiente se puede escribir en la forma

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - b^2(t)\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{109.10}$$

(como coordenadas espaciales hemos elegido las coordenadas « cartesianas » x, y, z). El factor dependiente del tiempo en el elemento de distancia espacial no cambia, claro está, la naturaleza euclídea de la métrica del espacio, ya que, para un t dado, este factor es constante y se puede reducir a la unidad mediante una simple transformación de coordenadas. Cálculos similares a los efectuados en el párrafo an-

terior conducen a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{8\pi k}{c^2}\epsilon = \frac{3}{b^2}\left(\frac{db}{dt}\right)^2, \quad 3\ln b = -\int \frac{d}{p+\epsilon} + \text{const.}$$

En el caso de bajas presiones, se encuentra

$$\mu b^3 = \text{const}, \quad b = \text{const}\, t^{\frac{2}{3}}. \tag{109.11}$$

Para valores pequeños de t debemos considerar de nuevo el caso $p = \epsilon/3$, para el que se encuentra

$$\epsilon b^4 = \text{const}, \quad b = \text{const}\, \sqrt{t}. \tag{109.12}$$

Así pues, también en él, la métrica presenta un punto singular ($t = 0$).

Obsérvese que todas las soluciones isótropas encontradas existen solamente para una densidad de materia no nula; para el espacio vacío las ecuaciones de Einstein no tienen soluciones de este tipo †. Recordaremos también que, desde el punto de vista matemático, dichas soluciones son un caso particular de una clase más general de soluciones que contiene tres funciones arbitrarias, físicamente distintas, de las coordenadas espaciales (véase el problema).

PROBLEMA

Hallar la forma general, cerca del punto singular, de la métrica en la cual la expansión del espacio se produce de manera «cuasi homogénea», es decir, de forma que todas las componentes $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}$ (en el sistema de referencia síncrono) tienden a cero según la misma ley. El espacio está lleno de materia cuya ecuación de estado es $p = \epsilon/3$ (*E. M. Lifshits, I. M. Jalatnikov*, 1960).

Solución. Determinemos la solución cerca del punto singular ($t = 0$) adoptando para ella una expresión de la forma

$$\gamma_{\alpha\beta} = ta_{\alpha\beta} + t^2 b_{\alpha\beta} + \ldots, \tag{1}$$

---

† Cuando $\epsilon = 0$, de la ecuación (109.5) se seguiría $a = a_0 e^{\eta} = ct$ (en cambio, la ecuación (108.7) pierde por completo su sentido a causa del carácter imaginario de la raíz). Pero la métrica

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - c^2 t^2 \{d\chi^2 + \operatorname{senh}^2 \chi\, (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta\, d\varphi^2)\}$$

se reduce a la forma

$$ds^2 = c^2\, d\tau^2 - dr^2 - r^2\, (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2)$$

mediante la transformación $r = ct \operatorname{senh} \chi$, $\tau = t \cosh \chi$, es decir, simplemente al espacio-tiempo galileano.

donde $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ son funciones de las coordenadas (espaciales) †); en lo que sigue supondremos $c = 1$. El tensor inverso es

$$\gamma^{\alpha\beta} = \frac{1}{t} a^{\alpha\beta} - b^{\alpha\beta}$$

donde el tensor $a^{\alpha\beta}$ es el inverso de $a_{\alpha\beta}$ y $b^{\alpha\beta} = a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} b_{\gamma\delta}$; todas las operaciones de subir y bajar índices y de derivación covariante se llevan a cabo aquí mediante la métrica $a_{\alpha\beta}$ que no depende del tiempo.

Calculando los primeros miembros de las ecuaciones (99.11) y (99.12) con una precisión de segundo orden y de primer orden con relación a $1/t$, respectivamente, obtendremos:

$$-\frac{3}{4t^2} + \frac{1}{2t} b = \frac{8\pi k}{3} \epsilon (-4u_0^2 + 1),$$
$$\frac{1}{2} (b_{;\alpha} - b^{\beta}_{\alpha;\beta}) = -\frac{32\pi k}{3} \epsilon u_\alpha u_0$$

(donde $b = b^{\alpha}_{\alpha}$). Teniendo también en cuenta la identidad

$$1 = u_i u^i \approx u_0^2 - \frac{1}{t} u_\alpha u_\beta a^{\alpha\beta},$$

se encuentra

$$8\pi k\epsilon = \frac{3}{4t^2} - \frac{b}{2t}, \quad u_\alpha = \frac{t^2}{2} (b_{;\alpha} - b^{\beta}_{\alpha;\beta}). \tag{2}$$

Los símbolos de Christoffel tridimensionales, y con ellos también el tensor $P_{\alpha\beta}$, no dependen del tiempo en la primera aproximación respecto de $1/t$; las $P_{\alpha\beta}$ coinciden con las expresiones que se obtienen al efectuar el cálculo con la métrica $a_{\alpha\beta}$. Teniendo esto en cuenta, se llega a la conclusión de que en la ecuación (99.13) los términos del orden de t^{-2} se reducen entre sí, y los términos $\sim 1/t$ dan

$$P^{\beta}_{\alpha} + \frac{3}{4} b^{\beta}_{\alpha} + \frac{5}{12} \delta^{\beta}_{\alpha} b = 0,$$

de donde

$$b^{\beta}_{\alpha} = -\frac{4}{3} P^{\beta}_{\alpha} + \frac{5}{18} \delta^{\beta}_{\alpha} P \tag{3}$$

(con $P = a^{\beta\gamma} P_{\beta\gamma}$). En virtud de la identidad

$$P^{\beta}_{\alpha;\beta} - \frac{1}{2} P_{;\alpha} = 0$$

[véase (92.13)] se tiene la relación

$$b^{\beta}_{\alpha;\beta} = \frac{7}{9} b_{;\alpha},$$

† La solución de Friedman resulta como caso particular al elegir para las funciones $a_{\alpha\beta}$ las relativas a un espacio de curvatura constante.

y, por consiguiente, u_α se puede escribir también en la forma:

$$u_\alpha = \frac{t^2}{9} b_{;\alpha}. \tag{4}$$

De esta manera, las seis funciones $a_{\alpha\beta}$ siguen siendo arbitrarias y de acuerdo con ellas se determinan los coeficientes $b_{\alpha\beta}$ del término siguiente del desarrollo (1). La elección del tiempo en la métrica (1) está por completo determinada por la condición $t = 0$ en el punto singular; en cambio, las coordenadas espaciales admiten aun transformaciones arbitrarias que no afecten a la coordenada tiempo (cabe utilizarlas, por ejemplo, para reducir el tensor $a_{\alpha\beta}$ a la forma diagonal). En consecuencia, la solución obtenida contiene en total tres funciones arbitrarias «físicamente distintas».

Obsérvese que en esta solución la métrica espacial no es ni homogénea ni isótropa y que la distribución de densidad de materia tiende a la distribución homogénea cuando $t \to 0$. El rotacional de la velocidad tridimensional $\mathbf{v}$ es igual a cero [en la aproximación (4)], y su módulo tiende a cero según la ley

$$v^2 = v_\alpha v_\beta \gamma^{\alpha\beta} \sim t^3.$$

§ 110. El corrimiento hacia el rojo

El rasgo característico fundamental de todas las soluciones que hemos considerado es el carácter no estacionario de la métrica: el radio de curvatura del espacio es función del tiempo. Pero la variación del radio de curvatura conduce a la variación de absolutamente todas las distancias entre cuerpos en el espacio, como se ve por el mero hecho de que el elemento de distancia espacial *dl* es proporcional a *a*. Así, al crecer *a* en un tal espacio los cuerpos « huyen », cada uno de los demás (en el modelo abierto, al aumento de *a* corresponde $\eta > 0$, y en el cerrado, $0 < \eta < \pi$). Desde el punto de vista de un observador que se encuentra en uno de ellos, las cosas ocurrirán como si los demás cuerpos se movieran en direcciones radiales alejándose de él. La velocidad de este « retroceso » (en un instante dado *t*) es proporcional a la distancia entre los cuerpos.

Esta predicción de la teoría hay que relacionarla con un hecho astronómico fundamental — con el efecto del corrimiento hacia el rojo en los espectros de las galaxias. Interpretando este corrimiento como efecto Doppler, llegamos a la conclusión de que las galaxias « retroceden », es decir, que en la actualidad el Universo se encuentra en expansión †).

† Naturalmente, sólo cabe llegar a la conclusión de que los cuerpos «se dispersan» al crecer $a(t)$ si se cumple la condición de que su energía de interacción es pequeña comparada con la energía cinética de su movimiento; esta condición queda satisfecha en cualquier caso para galaxias suficientemente alejadas. En el caso contrario, las distancias mutuas de los cuerpos vienen determinadas esencialmente por su interacción; debido a ello, por ejemplo, el efecto considerado prácticamente no debe manifestarse en las dimensiones de las propias nebulosas y tanto menos en las de las estrellas.

Consideremos la propagación de los rayos de luz en un espacio isótropo. Para ello, lo más simple es apoyarnos en el hecho de que, a lo largo de la línea de universo de propagación de una señal luminosa, el intervalo $ds = 0$. Elijamos el punto del que parte el rayo luminoso como origen de coordenadas χ, θ, ϕ. Por razón de simetría, es claro que los rayos se propagarán « radialmente », es decir, a lo largo de una línea $\theta = \text{const}$, $\phi = \text{const}$. De acuerdo con esto, haremos $d\theta = d\phi = 0$ en (108.4) o (109.2) con lo que se obtendrá $ds^2 = a^2(d\eta^2 - d\chi^2)$. Igualando este valor a cero, se encuentra $d\eta = \pm d\chi$ o bien, integrando,

$$\chi = \pm\eta + \text{const}. \tag{110.1}$$

El signo más corresponde a un rayo que se aleja del origen de coordenadas y el signo menos a un rayo que se acerca al mismo. En esta forma, la ecuación (110.1) se aplica tanto al modelo abierto, como al modelo cerrado. Mediante las formulas del párrafo anterior, a partir de este resultado podemos expresar la distancia recorrida por el rayo en función del tiempo.

En el modelo abierto, un rayo de luz que parte de un punto se aparta, al propagarse, cada vez más y más de él. En el modelo cerrado, en cambio, un rayo de luz que parte de un punto inicial puede llegar finalmente al « polo opuesto » del espacio (lo que corresponde a una variación en χ de 0 a π); en la propagación ulterior, el rayo comenzará a acercarse al punto de partida. A una vuelta del rayo « en torno del espacio » para regresar al punto de partida correspondería un cambio en χ de 0 a 2π. De (110.1) se sigue que también η debería cambiar entonces en 2π, lo que, sin embargo, es imposible (excepto cuando el rayo parte en el instante $\eta = 0$). Un rayo de luz no puede así volver a su punto de partida después de haber dado una vuelta « en torno del espacio ».

A un rayo de luz que se acerca al punto de observación (al origen de coordenadas), corresponde el signo negativo de η en la ecuación (110.1). Si el instante de llegada del mismo a dicho punto es $t(\eta_0)$, para $\eta = \eta_0$ deberemos tener $\chi = 0$, de modo que la ecuación de propagación de esos rayos es

$$\chi = \eta_0 - \eta. \tag{110.2}$$

De aquí se sigue, evidentemente, que a un observador, situado en el punto $\chi = 0$, pueden alcanzarlo en el instante $t(\eta_0)$ sólo los rayos que han partido de puntos situados a « distancias » no mayores que $\chi = \eta_0$.

Este resultado, que se aplica tanto al modelo abierto como al cerrado, es muy importante. Según él, en cada instante $t(\eta)$, es accesible a la observación física, en un punto dado del espacio, no todo el espacio, sino solamente la región del mismo definida por $\chi \leqslant \eta$. Desde el punto de vista matemático, la « región visible »

del espacio es la sección del espacio-tiempo cuadridimensional por el cono de luz. Esta sección resulta ser finita, tanto en el modelo abierto, como en el cerrado (sin embargo, en el modelo abierto es infinita su sección por la hipersuperficie $t = \text{const}$, sección que corresponde al espacio observado en todos sus puntos en el mismo instante t). En este sentido, la diferencia entre los modelos abierto y cerrado resulta ser menos profunda de lo que podría parecer a primera vista.

Cuando más alejada del observador se encuentra la región observada por él en un instante dado, tanto más al pasado pertenece el tiempo a que corresponde. Consideremos la superficie esférica que es lugar geométrico de los puntos de los que partió la luz en el instante $t(\eta-\chi)$ para ser observada en el origen de coordenadas en el instante $t(\eta)$. El área de esta superficie es igual a $4\pi a^2(\eta-\chi)\,\text{sen}^2\,\chi$ (en el modelo cerrado) o a $4\pi a^2(\eta-\chi)\,\text{senh}^2\,\chi$ (en el modelo abierto). A medida que se aleja del observador, el área de la « esfera visible » aumenta al principio a partir de cero (para $\chi = 0$) y alcanza luego un máximo, tras el cual disminuye de nuevo, anulándose para $\chi = \eta$ (donde $a(\eta-\chi) = a(0) = 0$). Esto significa que la sección determinada por el cono de luz es no sólo finita, sino también cerrada. Todo ocurre como si dicha sección se cerrara en el punto « opuesto » al del observador. En este punto $\epsilon \to \infty$, de modo que, en principio, la materia es observable en todos los estadios de su evolución.

La cantidad total de materia observada es igual, en el modelo abierto, a

$$M_{\text{obs}} = 4\pi \int_0^{\eta} \mu a^3 \,\text{senh}^2\chi \cdot d\chi.$$

Substituyendo μa^3 por el valor (109.7), se obtiene:

$$M_{\text{obs}} = \frac{3c^2 a_0}{2k}(\text{senh}\eta\,\cosh\eta - \eta). \tag{110.3}$$

Esta cantidad crece sin límite cuando $\eta \to \infty$. En el modelo cerrado, en cambio, el aumento de M_{obs} viene limitado, claro está, por la masa total M; para este caso se encuentra, de manera análoga:

$$M_{\text{obs}} = \frac{M}{\pi}(\eta - \text{sen}\eta\,\cos\eta). \tag{110.4}$$

Cuando η aumenta de 0 a π, esta cantidad crece de 0 a M; el aumento ulterior de M_{obs} que se sigue de esta fórmula es ficticio y corresponde simplemente al hecho de que en el universo « en contracción » los cuerpos distantes se observarían dos veces (gracias a la luz que « da la vuelta al espacio » en los dos sentidos).

Consideremos ahora el cambio en la frecuencia de la luz al propagarse en un espacio isótropo. Para ello observemos, en primer lugar, el siguiente hecho. Supongamos que en un cierto punto del espacio ocurren dos sucesos separados por un intervalo de tiempo $dt = \frac{1}{c} a(\eta)\, d\eta$. Si cuando dichos sucesos ocurren se emiten señales luminosas, que son observadas en otro punto del espacio, entre los instantes de observación transcurre un intervalo de tiempo que corresponde al mismo cambio $d\eta$ de la cantidad η que en el punto de partida. Esto se sigue desde luego de la ecuación (110.1), según la cual la variación de η durante la propagación del rayo de luz desde un punto a otro depende solamente de la diferencia de las coordenadas χ de estos dos puntos. Pero dado que durante el tiempo de propagación cambia el radio de curvatura a, los intervalos de tiempo τ entre los instantes de emisión de las dos señales y los instantes de su observación son diferentes; la razón de estos intervalos es igual a la razón de los valores correspondientes de a.

Se deduce de aquí, en particular, que también los períodos de las vibraciones luminosas, medidos en unidades del tiempo universal t, cambian a lo largo del rayo proporcionalmente a a. Así, en la propagación de un rayo de luz, a lo largo de su trayectoria es:

$$\omega a = \text{const.} \tag{110.5}$$

Supongamos que en el instante $\tau(\eta)$ observamos la luz emitida por un foco situado a una distancia correspondiente a un determinado valor de la coordenada χ. De acuerdo con (110.1), el instante de emisión de esta luz es $t(\eta-\chi)$. Si ω_0 es la frecuencia de la luz en dicho instante, de (110.5) se deduce que la frecuencia ω observada por nosotros será:

$$\omega = \omega_0 \frac{a(\eta-\chi)}{a(\eta)}. \tag{110.6}$$

Debido al crecimiento monótono de la función $a(\eta)$, tenemos $\omega<\omega_0$, esto es, se produce una disminución de la frecuencia de la luz. Esto significa que al observar el espectro de la luz que nos llega, todas sus rayas deben aparecer corridas hacia el rojo en comparación con el espectro de la misma materia observada en condiciones ordinarias. Este fenómeno de *corrimiento hacia el rojo* es, en esencia, el efecto Doppler de cuerpos que « huyen » el uno del otro.

El valor del corrimiento hacia el rojo, medido por la razón ω/ω_0 de la frecuencia desplazada a la ordinaria, depende (para un instante dado de observación) de la distancia a que se encuentra el foco observado (en la relación (110.6) figura la coordenada χ del foco luminoso). Para distancias no demasiado grandes, podemos

desarrollar $a(\eta-\chi)$ en serie de potencias de χ, limitándonos a los dos primeros términos:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1-\chi\frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}$$

(el punto significa derivación respecto de η). Además, obsérvese que el producto $\chi a(\eta)$ es aquí precisamente la distancia l al foco observado. En efecto, el elemento de longitud « radial » es igual a $dl = a\,d\chi$; al integrar esta relación surge la cuestión de cómo se determina la distancia mediante la observación física. En correspondencia con el método elegido, habrá que tomar los valores de a en diferentes instantes para diferentes puntos a lo largo del camino de integración (la integración con $\eta = \text{const}$ correspondería a observación simultánea de todos los puntos a lo largo de la trayectoria, lo que no es factible físicamente). Pero para distancias « pequeñas » podemos prescindir de la variación de a a lo largo del camino de integración y escribir simplemente $l = a\chi$, con el valor de a que corresponde al instante de observación.

Para la variación relativa de la frecuencia se encuentra así la fórmula siguiente:

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0} = -\frac{h}{c}l, \tag{110.7}$$

donde se ha introducido la notación

$$h = c\frac{\dot{a}(\eta)}{a^2(\eta)} = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} \tag{110.8}$$

para la llamada *constante de Hubble*. Para un instante de observación dado, esta cantidad es independiente de l. Así, pues, el corrimiento relativo de las rayas del espectro debe ser proporcional a la distancia al foco luminoso observado.

Considerando el corrimiento hacia el rojo como resultado de un efecto Doppler, es posible determinar las velocidades de retroceso v con que los cuerpos se alejan del observador. Haciendo $(\omega-\omega_0)/\omega_0 = -v/c$ y comparando con (110.7), se tiene:

$$v = hl \tag{110.9}$$

(esta fórmula se puede obtener también directamente calculando la derivada $v = d(a\chi)/(d\tau)$.

Los datos astronómicos confirman la ley (110.7), pero la determinación del valor de la constante de Hubble se ve complicada por la falta de seguridad en el establecimiento de una escala de distancias cósmicas adecuada para las galaxias lejanas.

Las últimas determinaciones dan el valor

$$h \cong 0{,}8 \times 10^{-10}\ \text{a}^{-1} = 0{,}25 \times 10^{-17}\ \text{s}^{-1}. \tag{110.10}$$

$$\frac{1}{h} \approx 4 \times 10^{17} s = 1{,}3 \times 10^{9}\ a.$$

Este valor corresponde a un aumento de la « velocidad de retroceso » de 25 km/s por cada millón de años luz de distancia.

Substituyendo en la ecuación (109.4) $\epsilon = \mu c^2$ y $h = c\dot{a}/a^2$, se obtiene para el modelo abierto la siguiente relación:

$$\frac{c^2}{a^2} = h^2 - \frac{8\pi k}{3}\mu. \tag{110.11}$$

Combinando esta ecuación con la igualdad

$$h = \frac{c \operatorname{senh}\eta}{a(\cosh\eta - 1)^2} = \frac{c}{a} \operatorname{ctgh}\frac{\eta}{2},$$

resulta

$$\cosh\frac{\eta}{2} = h\sqrt{\frac{3}{8\pi k\mu}}. \tag{110.12}$$

De manera análoga, para el modelo abierto hubiéramos obtenido.

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{8\pi k}{3}\mu - h^2, \tag{110.13}$$

$$\cos\frac{\eta}{2} = h\sqrt{\frac{3}{8\pi k\mu}}. \tag{110.14}$$

Comparando (110.11)y (110.13), vemos que la curvatura del espacio es negativa o positiva según sea negativa o positiva la diferencia $(8\pi k\mu/3) - h^2$. Esta diferencia se anula para $\mu = \mu_k$, donde

$$\mu_k = \frac{3h^2}{8\pi k}. \tag{110.15}$$

Con el valor (110.10) se obtiene $\mu_k \approx 1 \times 10^{-29}$ g/cm^3. En el estado actual de los conocimientos astronómicos, la densidad media de la materia en el espacio se puede estimar solamente con una precisión muy pequeña. Como estimación basada en la cuenta del número de galaxias y su masa media, se adopta en la actualidad un valor que es del orden de 3×10^{-31} g/cm^3. Este valor es 30 veces menor que μ_k y,

por consiguiente, apoyaría la utilización del modelo abierto. Sin embargo, e incluso dejando de lado la insuficiente confianza que merece este valor, no hay que perder de vista que en él no se tiene en cuenta la posible existencia de un gas oscuro intergaláctico, cuya masa podría aumentar considerablemente, al ser tenida en cuenta, la densidad media de la materia.

Señalemos aquí una desigualdad que resulta posible obtener para un valor dado de la cantidad h. En el modelo abierto tenemos $h = \dfrac{c \operatorname{senh} \eta}{a_0(\cosh \eta - 1)^2}$ y, por consiguiente,

$$t = \frac{a_0}{c}(\operatorname{senh}\eta - \eta) = \frac{\operatorname{senh}\eta\,(\operatorname{senh}\eta - \eta)}{h(\cosh\eta - 1)^2}\,.$$

Dado que $0 < \eta < \infty$, debe ser

$$\frac{2}{3h} < t < \frac{1}{h}\,. \tag{110.16}$$

Análogamente, para el modelo cerrado se obtiene †:

$$t = \frac{\operatorname{sen}\eta(\eta - \operatorname{sen}\eta)}{h(1-\cos\eta)^2}\,.$$

Al crecimiento de $a(\eta)$ corresponde el intervalo $0 < \eta < \pi$; tenemos, por lo tanto

$$0 < t < \frac{2}{3h}\,. \tag{110.17}$$

Determinemos ahora la intensidad I de la luz que llega al observador desde un foco situado a una distancia correspondiente a un cierto valor de la coordenada χ. El flujo de energía luminosa en el punto de observación es inversamente proporcional al área de la esfera trazada por el punto considerado y con centro en el foco luminoso; en un espacio de curvatura negativa, el área de la esfera es igual a $4\pi a^2 \operatorname{senh}^2\chi$. La luz emitida por el foco durante el intervalo $dt = \dfrac{1}{c}a(\eta - \chi)d\eta$ alcanzará el punto de observación al cabo de un tiempo $dt\,\dfrac{a(\eta)}{a(\eta-\chi)} = \dfrac{1}{c}a(\eta)d\eta$. Dado que la intensidad se define como flujo de energía luminosa por unidad de tiempo, aparece en I un factor $a(\eta-\chi)/a(\eta)$. Finalmente, la energía de un paquete de ondas es proporcional a su frecuencia [véase (53.9)]; puesto que la frecuencia cambia durante la propa-

† La indeterminación en el valor de μ no permite en modo alguno un cálculo preciso del valor de η, tanto más cuanto que no se conoce con seguridad ni tan sólo el signo de la diferencia $\mu - \mu_k$. Haciendo en (110.12) $\mu = 3 \times 10^{-31}$ g/cm^3 [y tomando h de (110.10)] obtendremos $\eta = 5.0$. Si se hace $\mu = 10^{-30}$ g/cm^3, resulta $\eta = 6{,}1$.

gación de la luz de acuerdo con la ley (110.5), esto conduce a que aparezca una vez más el factor $a(\eta-\chi)/a(\eta)$ en I. Obtenemos así finalmente la intensidad en la forma

$$I = \text{const}\,\frac{a^2(\eta-\chi)}{a^4(\eta)\,\text{senh}^2\chi}\,. \tag{110.18}$$

Para el modelo cerrado se hubiera obtenido, análogamente,

$$I = \text{const}\,\frac{a^2(\eta-\chi)}{a^4(\eta)\,\text{sen}^2\chi}\,. \tag{110.19}$$

Estas fórmulas determinan la dependencia del brillo aparente de un objeto observado respecto de su distancia (para un brillo absoluto dado). Para valores pequeños de χ podemos hacer $a(\eta-\chi)\simeq a(\eta)$, y entonces $I\sim 1/a^2(\eta)\chi^2 = 1/l^2$, esto es, se cumple la ley ordinaria de disminución de la intensidad en razón inversa del cuadrado de la distancia.

Finalmente, consideremos la cuestión de los llamados movimientos propios de los cuerpos. Al hablar de densidad y movimiento de la materia, nos hemos referido siempre a la densidad media y al movimiento medio; en particular, en el sistema de referencia que hemos utilizado siempre, la velocidad del movimiento medio es igual a cero. Las velocidades reales de los cuerpos, en cambio, experimentarán ciertas fluctuaciones en torno de su valor medio. En el transcurso del tiempo, las velocidades del movimiento propio de los cuerpos cambian. Para determinar la ley de este cambio, consideremos un cuerpo que se mueve libremente y elijamos el origen de coordenadas en un punto cualquiera de su trayectoria. Ésta será entonces un radio, $\theta = \text{const}$, $\phi = \text{const}$. La ecuación de Hamilton-Jacobi (87.6), después de substituir en ella los valores de g^{ik}, toma la forma

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \chi}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 + m^2c^2a^2(\eta) = 0. \tag{110.20}$$

Dado que χ no aparece en los coeficientes de esta ecuación (es decir, χ es una coordenada cíclica), vale la ley de conservación $\partial S/\partial\chi = \text{const}$. Pero el impulso p de un cuerpo en movimiento es igual, por definición, a $p = \partial S/\partial l = \partial S/a\,\partial\chi$. Luego, para un cuerpo que se mueve el producto pa es constante:

$$pa = \text{const}. \tag{110.21}$$

Introduciendo la velocidad v del movimiento propio del cuerpo, de acuerdo con

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,,$$

se obtiene:

$$\frac{va}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \text{const.} \tag{110.22}$$

La ley de variación de las velocidades con el tiempo viene determinada por esta relación. Cuando a aumenta, la velocidad v decrece de manera monótona.

PROBLEMAS

1. Hallar los dos primeros términos del desarrollo del brillo aparente de una galaxia en función de su corrimiento hacia el rojo; el brillo absoluto de una galaxia varía con el tiempo siguiendo una ley exponencial, $I_{abs} = \text{const} \cdot e^{\alpha\tau}$ (H. Robertson, 1955).

Solución. La dependencia del brillo aparente de una galaxia, observada en el « instante » η, respecto de la distancia χ viene dada (en el modelo cerrado) por la fórmula

$$I = \text{const} \cdot e^{\alpha[\tau(\eta-\chi)-\tau(\eta)]} \frac{a^2(\eta-\chi)}{a^4(\eta)\operatorname{sen}^2\chi}.$$

Definamos el corrimiento hacia el rojo como igual a la variación relativa de la longitud de onda:

$$z = \frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\omega_0-\omega}{\omega} = \frac{a(\eta)-a(\eta-\chi)}{a(\eta-\chi)}.$$

Desarrollando I y z en potencias de χ [utilizando las funciones $a(\eta)$ y $\tau(\eta)$ de (108.9) y (108.10)] y eliminando luego χ entre las ecuaciones que resultan, se encuentra el resultado:

$$I = \text{const} \cdot \frac{1}{z^2}\left[1-\left(1-\frac{q}{2}+\frac{\alpha c}{h}\right)z\right],$$

donde hemos introducido la notación

$$q = \frac{2}{1+\cos\eta} = \frac{\mu}{\mu_k} > 1.$$

En el modelo abierto, se obtiene la misma fórmula con

$$q = \frac{2}{1+\cosh\eta} = \frac{\mu}{\mu_k} < 1.$$

2. Hallar los primeros términos del desarrollo del número de galaxias contenidas dentro de una « esfera » de radio dado en función del corrimiento hacia el rojo en el límite de la esfera (la distribución espacial de las galaxias se supone uniforme).

Solución. El número N de galaxias que se encuentran a una « distancia » $\leqslant\chi$ es (en el modelo cerrado)

$$N = \text{const} \cdot \int_0^{\chi} \operatorname{sen}^2\chi\, d\chi \cong \text{const} \cdot \chi^3.$$

Substituyendo los dos primeros términos del desarrollo de la función $\chi(z)$, obtenemos:

$$N = \text{const} \cdot z^3 \left[1 - \frac{3}{4}(2+q)\, z\right].$$

En esta forma la fórmula vale también para el modelo abierto.

§ 111. Estabilidad gravitatoria del universo isotropo

Examinemos la cuestión que plantea el comportamiento de pequeñas perturbaciones en el modelo isótropo, es decir, su estabilidad gravitatoria (*E. M. Lifshitz*, 1946). Al hacerlo nos limitaremos a considerar las perturbaciones en dominios relativamente pequeños del espacio, es decir, en regiones cuyas dimensiones lineales son pequeñas comparadas con el radio a †).

En cada una de estas regiones puede tomarse para la métrica espacial, en primera aproximación, la métrica euclídea, es decir, la métrica (107.8) o (107.12) se substituye por la métrica

$$dl^2 = a^2(\eta)\,(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{111.1}$$

donde x, y, z son las coordenadas cartesianas medidas tomando como unidad el radio a. En tanto que coordenada temporal utilizaremos, como antes, la variable η.

Sin restringir la generalidad, el campo perturbado se representará en un sistema de referencia síncrono, como antes, es decir, a la variación δg_{ik} del tensor métrico se imponen las condiciones $\delta g_{00} = \delta g_{0\alpha} = 0$. Variando la identidad $g_{ik}u^i u^k = 1$ en estas condiciones (y teniendo en cuenta que los valores no perturbados de las componentes de la cuadrivelocidad de la materia son $u^0 = 1/a$, $u^\alpha = 0$ ††,) obtendremos $g_{00}u^0\delta u^0 = 0$ de donde $\delta u^0 = 0$. En cambio, las perturbaciones δu^α, son, en general diferentes de cero, de modo que el sistema de referencia ya no es un sistema acompañante.

Las perturbaciones del tensor métrico espacial las designaremos por $h_{\alpha\beta} \equiv \delta\gamma_{\alpha\beta} = -\delta g_{\alpha\beta}$. Entonces es $\delta\gamma^{\alpha\beta} = -h^{\alpha\beta}$, donde el paso de índices covariantes a contravariantes en $h_{\alpha\beta}$ se efectúa mediante la métrica no perturbada $\gamma_{\alpha\beta}$.

---

† Para una exposición más detallada del problema, incluido el estudio de perturbaciones en dominios de dimensiones comparables con a, véase UFN **80**, 411 (1963); Adv. of Phys. **12**, 208 (1963).

†† Designaremos en este párrafo los valores no perturbados de las diferentes cantidades por letras sin el índice adicional (0).

En la aproximación lineal las pequeñas perturbaciones del campo gravitatorio satisfacen las ecuaciones

$$\delta R_i^k - \frac{1}{2}\delta_k^i \delta R = \frac{8\pi k}{c^4}\delta T_i^k. \tag{111.2}$$

Las variaciones de las componentes del tensor energía-impulso (94.9) en el sistema de referencia síncrono son iguales a:

$$\delta T_\alpha^\beta = -\delta_\alpha^\beta \delta p, \quad \delta T_0^\alpha = a(p+\epsilon)\delta u^\alpha, \quad \delta T_0^0 = \delta\epsilon. \tag{111.3}$$

Dado que las variaciones $\delta\epsilon$ y δp son pequeñas, se puede escribir $\delta p = \dfrac{dp}{d\epsilon}\delta\epsilon$ y obtenemos así las relaciones

$$\delta T_\alpha^\beta = -\delta_\alpha^\beta \frac{dp}{d\epsilon}\delta T_0^0. \tag{111.4}$$

Las fórmulas para δR_l^k resultan de variar las expresiones (99.10). Dado que el tensor métrico no perturbado es $\gamma_{\alpha\beta} = a^2\delta_{\alpha\beta}$, los valores no perturbados serán

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \frac{2a}{a}\gamma_{\alpha\beta} = \frac{2a'}{a_2}\gamma_{\alpha\beta}, \quad \varkappa_\alpha^\beta = \frac{2a'}{a^2}\delta_\alpha^\beta,$$

donde el punto significa derivación respecto de ct, y el apóstrofo, respecto de η. Las perturbaciones de las cantidades $\varkappa_{\alpha\beta}$ y $\varkappa_\alpha^\beta = \varkappa_{\alpha\gamma}\,\gamma^{\gamma\beta}$ vienen dadas por:

$$\delta\varkappa_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} = \frac{1}{a}h'_{\alpha\beta}, \quad \delta\varkappa_\alpha^\beta = -h^{\beta\gamma}\varkappa_{\alpha\gamma} + \gamma^{\beta\gamma}h_{\alpha\gamma} = h_\alpha^\beta = \frac{1}{a}h_\alpha^\beta,$$

donde $h_\alpha^\beta = \gamma^{\beta\gamma}\,h_{\alpha\gamma}$. Los valores no perturbados del tensor tridimensional P_α^β correspondiente a la métrica euclídea (111.1) son iguales a cero. En cuanto a las variaciones δP_α^β, éstas se calculan mediante las fórmulas (1), (2) obtenidas en el problema 2 del § 102: es evidente que δP_α^β se expresa en función de $\delta\gamma_{\alpha\beta}$ de la misma manera que el cuadritensor δR_{ik} se expresa en función de δg_{ik}, efectuándose todas las operaciones tensoriales en el espacio tridimensional según la métrica (111.1); dado el carácter euclídeo de esta métrica, todas las derivaciones covariantes se reducen a derivaciones ordinarias respecto de las coordenadas x^α (en cambio, las derivadas covariantes implican, además, la división por a^2). Teniendo en cuenta todo esto (y pasando, en todas las fórmulas, de las derivadas respecto de t a las derivadas respecto de η), obtendremos mediante un cálculo sencillo:

$$\delta R_\alpha^\beta = -\frac{1}{2a^2}(h^{\gamma,\ \beta}_{\alpha,\ \gamma} + h^{\beta,\ \gamma}_{\gamma,\ \alpha} - h^{\beta,\ \gamma}_{\alpha,\ \gamma} - h^{,\ \beta}_{,\ \alpha}) - \frac{1}{2a^2}h_\alpha^{\beta\prime\prime} - \frac{a'}{a^3}h_\alpha^{\beta\prime} - \frac{a'}{2a^3}h'\delta_\alpha^\beta,$$

$$\delta R_0^0 = -\frac{1}{2a^2}h'' - \frac{a'}{2a^3}h', \quad \delta R_0^\alpha = \frac{1}{2a^2}(h^{,\ \alpha} - h_\beta^{\alpha,\ \beta})' \tag{111.5}$$

($h \equiv h_a^a$). Aquí tanto los subíndices como los superíndices que siguen a una coma significan la derivación ordinaria respecto de las coordenadas x^α (seguimos empleando superíndices y subíndices tan sólo para conservar la unidad de notación).

Las ecuaciones finales relativas a las perturbaciones h_α^β se obtendrán substituyendo en (111.4) las componentes δT_i^k, expresadas en función de δR_i^k de acuerdo con (111.2). Es conveniente elegir dichas ecuaciones de modo que sean, de una parte, las (111.4) cuando $\alpha \neq \beta$ y la que se obtiene al contraer respecto de los índices α, β. He aquí el sistema:

$$(h_{\alpha,\ \gamma}^{\gamma,\ \beta} + h_{\gamma,\ \alpha}^{\beta,\ \gamma} - h_{,\ \alpha}^{\ \beta} - h_{\alpha,\ \gamma}^{\beta,\ \gamma}) + h_\alpha^{\beta\prime\prime} + 2\frac{a'}{a}h_\alpha^{\beta\prime} = 0, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$\frac{1}{2}(h_{\gamma,\ \delta}^{\delta,\ \gamma} - h_{,\ \gamma}^{\ \gamma})\left(1 + 3\frac{dp}{d\varepsilon}\right) + h'' + h'\frac{a'}{a}\left(2 + 3\frac{dp}{d\varepsilon}\right) = 0. \tag{111.6}$$

Las perturbaciones de la densidad y de la velocidad de la materia pueden determinarse a partir de los valores conocidos h_α^β mediante las fórmulas (111.2-3). Así, para la variacion relativa de la densidad tenemos:

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{c^4}{8\pi k\varepsilon}\left(\delta R_0^0 - \frac{1}{2}\delta R\right) = \frac{c^4}{16\pi k\varepsilon a^2}\left(h_{\alpha,\ \beta}^{\beta,\ \alpha} - h_{,\ \alpha}^{\ \alpha} + \frac{2a'}{a}h'\right). \tag{111.7}$$

Entre las soluciones de las ecuaciones (111.6) hay algunas que se pueden excluir mediante una simple transformación del sistema de referencia (que conserve su carácter síncrono) y, por ello, no constituyen una variación física real de la métrica. La forma de tales soluciones se puede establecer de antemano mediante las fórmulas (1) y (2) obtenidas en el problema 3 del § 99. Substituyendo en ellas los valores no perturbados $\gamma_{\alpha\beta} = a^2\,\delta_{\alpha\beta}$, obtendremos las siguientes expresiones para las perturbaciones ficticias de la métrica:

$$h_\alpha^\beta = f_{0,\ \alpha}^{\ \beta}\int\frac{d\eta}{a} + \frac{a'}{a^2}f_0\delta_\alpha^\beta + (f_\alpha{}^{,\beta} + f^\beta{}_{,\alpha}), \tag{111.8}$$

donde f_0, f_α son funciones arbitrarias (pequeñas) de las coordenadas x, y, z.

Dado que la métrica se supone euclídea en las pequeñas regiones consideradas del espacio, una perturbación arbitraria en cada uno de tales dominios se puede desarrollar en ondas planas. Interpretando x, y, z como coordenadas cartesianas, medidas tomando a como unidad, podemos escribir el factor periódico espacial de las ondas planas en la forma $e^{i\mathbf{nr}}$, donde $\mathbf{n}$ es un vector sin dimensiones que representa el vector de onda medido tomando como unidad $1/a$ (vector de onda $\mathbf{k} = \mathbf{n}/a$). Si la perturbación se manifiesta en una porción del espacio cuyas dimensiones son $\sim l$, en su desarrollo intervendrán fundamentalmente las ondas cuyas longitudes son $\lambda = 2\pi a/n \sim l$. Al limitar las perturbaciones a dominios cuyas dimen-

siones son $l \ll a$, suponemos con ello que el número n es suficientemente grande ($n \gg 2\pi$).

Las perturbaciones gravitatorias se pueden clasificar en tres tipos. Esta clasificación se reduce a la determinación de los posibles tipos de ondas planas en cuya forma cabe representar el tensor métrico $h_{\alpha\beta}$. De esta manera obtendremos la clasificación siguiente:

1. Partiendo de la función escalar

$$Q = e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}} \tag{111.9}$$

es posible construir el vector $\mathbf{P} = \mathbf{n}Q$ y los tensores †)

$$Q_\alpha^\beta = \frac{1}{3}\delta_\alpha^\beta Q, \quad P_\alpha^\beta = \left(\frac{1}{3}\delta_\alpha^\beta - \frac{n_\alpha n^\beta}{n^2}\right) Q. \tag{111.10}$$

A estas ondas planas corresponden perturbaciones en las que, junto con el campo gravitatorio, también la velocidad y la densidad de materia experimentan cambios, es decir, se trata de perturbaciones que van acompañadas de una condensación o de un enrarecimiento de la materia. La perturbación h_α^β se expresa entonces en función de los tensores Q_α^β y P_α^β, la perturbación de la velocidad, en función del vector $\mathbf{P}$, y la perturbación de la densidad, en función del escalar Q.

2. Partiendo de la onda vectorial transversal

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}; \quad \mathbf{s}\cdot\mathbf{n} = 0, \tag{111.11}$$

puede construirse el tensor $(n^\beta S_\alpha + n_\alpha S^\beta)$; en cambio, no existe el correspondiente escalar, ya que $\mathbf{n}\cdot\mathbf{S} = 0$. A estas ondas corresponden perturbaciones en las cuales, junto con el campo gravitatorio, experimenta una variación la velocidad, pero no la densidad de materia; se las podría llamar perturbaciones de rotación.

3. Onda tensorial transversal

$$G_\alpha^\beta = g_\alpha^\beta e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}; \quad g_\alpha^\beta n_\beta = 0. \tag{111.12}$$

A partir de ella no es posible construir ni un vector ni un escalar. A estas ondas corresponden perturbaciones del campo gravitatorio en las cuales la materia permanece inmóvil y está distribuida de manera homogénea en el espacio. En otras palabras, se trata de ondas gravitatorias en el Universo isótropo.

---

† Escribimos el vector cartesiano ordinario $\mathbf{n}$ con superíndices y subíndices únicamente para conservar la unidad de notación.

Las perturbaciones más interesantes son las del primer tipo. Hagamos

$$h_\alpha^\beta = \lambda(\lambda) P_\alpha^\beta + \mu(\eta) Q_\alpha^\beta, \quad h = \mu Q. \tag{111.13}$$

De (111.7) se sigue para la variación relativa de densidad

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{c^4}{24\pi k\varepsilon a^2}\left[n^2(\lambda+\mu) + \frac{3a'}{a}\mu'\right] Q. \tag{111.14}$$

Las ecuaciones que determinan las funciones λ y μ se obtienen substituyendo (111.13) en (111.6):

$$\lambda'' + 2\frac{a'}{a}\lambda' - \frac{n^2}{3}(\lambda+\mu) = 0, \tag{111.15}$$

$$\mu'' + \mu'\frac{a'}{a}\left(2 + 3\frac{dp}{d\varepsilon}\right) + \frac{n^2}{3}(\lambda+\mu)\left(1 + 3\frac{dp}{d\varepsilon}\right) = 0.$$

Estas ecuaciones poseen, ante todo, las dos siguientes integrales particulares que corresponden a aquellas variaciones ficticias de la métrica que se pueden excluir mediante una transformación del sistema de referencia:

$$\lambda = -\mu = \text{const}, \tag{111.16}$$

y

$$\lambda = -n^2\int\frac{d\eta}{a}, \quad \mu = n^2\int\frac{d\eta}{a} - \frac{3a'}{a^2} \tag{111.17}$$

[la primera de ellas se obtiene de (111.8) tomando $f_0 = 0$, $f_\alpha = P_\alpha$, y la segunda, haciendo $f_0 = Q$, $f_\alpha = Q$].

En los estadios primeros de la expansión del Universo, cuando la materia se representa por la ecuación de estado $p = \varepsilon/3$, tenemos $a \approx a_1\eta$, $\eta \ll 1$ (tanto en el modelo abierto como en el cerrado). Las ecuaciones (111.15) toman la forma:

$$\lambda'' + \frac{2}{\eta}\lambda' - \frac{n^2}{3}(\lambda+\mu) = 0, \quad \mu'' + \frac{3}{\eta}\mu' + \frac{2n^2}{3}(\lambda+\mu) = 0, \tag{111.18}$$

El estudio de estas ecuaciones conviene realizarlo por separado para dos casos límite, atendiendo al valor de la razón entre las dos cantidades grandes n y $1/\eta$.

Supongamos primero que el número n no es muy grande (o que η es suficientemente pequeño) de modo que $n\eta \ll 1$. Con la misma precisión con que son válidas

las ecuaciones (111.18), se encuentra en este caso y a partir de ellas:

$$\lambda = \frac{3C_1}{\eta} + C_2\left(1 + \frac{n^2}{9}\eta^2\right), \quad \mu = -\frac{2n^2}{3}C_1\eta + C_2\left(1 - \frac{n^2}{6}\eta^2\right),$$

donde C_1, C_2 son constantes; se excluyen de aquí las soluciones del tipo (111.16) y (111.17) (en el presente caso, de una solución en la que $\lambda - \mu = \text{const}$ y en la que $\lambda + \mu \sim 1/\eta^2$). Calculando también $\delta\epsilon/\epsilon$ según (111.14) y (108.15), obtendremos las siguientes expresiones para las perturbaciones de la métrica y de la densidad:

$$h_\alpha^\beta = \frac{3C_1}{\eta} P_\alpha^\beta + C_2 (Q_\alpha^\beta + P_\alpha^\beta),$$

$$\frac{\delta\epsilon}{\epsilon} = \frac{n^2}{9}(C_1\eta + C_2\eta^2)Q \quad \text{para} \quad p = \frac{\epsilon}{3}, \quad \eta \ll \frac{1}{n}. \tag{111.19}$$

Las constantes C_1, C_2 deben satisfacer determinadas condiciones que expresan el hecho de que la perturbación era pequeña en el instante η_0 en que se produjo: ha de ser $h_\alpha^\beta \ll 1$ (de donde $\lambda \ll 1$, $\mu \ll 1$) y $\delta\epsilon/\epsilon \ll 1$. Al aplicarse a (111.19), estas condiciones conducen a las desigualdades $C_1 \ll \eta_0$, $C_2 \ll 1$.

En las expresiones (111.19) figuran términos que crecen, en un mundo en expansión, según diferentes potenciales del radio $a = a_1\eta$. Sin embargo, este crecimiento no conduce a valores grandes de la perturbación: si se aplican las fórmulas (111.19) en orden de magnitud cuando $\eta \sim 1/n$, veremos que (en virtud de las desigualdades obtenidas más arriba para C_1, C_2) las perturbaciones se conservan pequeñas, incluso en el límite superior de validez de dichas fórmulas.

Supongamos ahora que el número n es tan grande que $n\eta \gg 1$. Resolviendo la ecuación (111.18) teniendo en cuenta esta condición se encuentra que los términos principales en λ y μ son iguales a †):

$$\lambda = -\frac{\mu}{2} = \text{const} \cdot \frac{1}{\eta^2} e^{in\eta/\sqrt{3}}.$$

De aquí se sigue para las perturbaciones de la métrica y de la densidad:

$$h_\alpha^\beta = \frac{C}{n^2\eta^2}(P_\alpha^\beta - 2Q_\alpha^\beta)\, e^{in\eta/\sqrt{3}}, \quad \frac{\delta\epsilon}{\epsilon} = -\frac{C}{9} Q e^{in\eta/\sqrt{3}}$$

$$\text{para } p = \frac{\epsilon}{3}, \quad \frac{1}{n} \ll \eta \ll 1, \tag{111.20}$$

† El factor $1/\eta^2$ que multiplica a la exponencial es el primer término del desarrollo en potencias de $1/n\eta$. Para determinarlo en este caso, hay que tener en cuenta a la vez los dos primeros términos del desarrollo [lo que permite la precisión de las ecuaciones (111.18)].

donde C es una constante compleja que satisface la condición $|C| \ll 1$. La presencia en estas expresiones de un factor periódico es completamente natural. Para grandes valores de n, nos encontramos ante una perturbación cuya periodicidad espacial viene determinada por un vector de onda cuyo módulo $k = n/a$ es grande. Tales perturbaciones deben propagarse como ondas acústicas con velocidad

$$u = \sqrt{\frac{dp}{d(\varepsilon/c^2)}} = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

De acuerdo con esto, la parte temporal de la fase se determina, al igual que se hace en la acústica geométrica, por la integral $\int ku\, dt = n\eta/\sqrt{3}$, que es grande. La amplitud de la variación relativa de la densidad se conserva constante, como vemos, mientras que las amplitudes de las perturbaciones de la métrica en un universo en expansión disminuyen como a^{-2} †).

Consideremos ahora estados más avanzados de la expansión, cuando la materia se encuentra hasta tal punto enrarecida que puede prescindirse de su presión ($p = 0$). Con todo, nos limitaremos aquí únicamente el caso de valores η pequeños, valores que corresponden a aquellos estados de la expansión en que el radio a es todavía muy pequeño comparado con su valor actual, si bien la materia se encuentra ya suficientemente enrarecida.

Para $p = 0$ y $\eta \ll 1$ tenemos $a \approx a_0\eta^2/2$ y las ecuaciones (111.15) toman la forma

$$\lambda'' + \frac{4}{\eta}\lambda' - \frac{n^2}{3}(\lambda + \mu) = 0,$$

$$\mu'' + \frac{4}{\eta}\mu' + \frac{n^2}{3}(\lambda + \mu) = 0.$$

La solución de estas ecuaciones es:

$$\lambda + \mu = 2C_1 - \frac{6C_2}{\eta^3}, \quad \lambda - \mu = n^2\left(\frac{C_1\eta^2}{15} + \frac{4C_2}{\eta^3}\right).$$

† Fácilmente se comprueba que (para $p = \varepsilon/3$) $n\eta \sim L/\lambda$, donde $L \sim u/\sqrt{k\varepsilon/c^2}$. Es natural que en la longitud característica L, que determina el comportamiento de las perturbaciones con longitud de onda $\lambda \ll a$, intervengan solamente magnitudes «hidrodinámicas» — la densidad de materia ε/c^2 y la velocidad del sonido en ella u (y la constante gravitatoria k). Obsérvese que el crecimiento de las perturbaciones tiene lugar para $\lambda \gg L$ [en (111.19)].

Calculando también $\delta\epsilon/\epsilon$ [mediante (111.14) y (108-12)], se encuentra:

$$h_\alpha^\beta = C_1 (P_\alpha^\beta + Q_\alpha^\beta) + \frac{2n^2 C_2}{\eta^2} (P_\alpha^\beta - Q_\alpha^\beta) \quad \text{para } \eta \ll \frac{1}{n},$$

$$h_\alpha^\beta = C_1 n^2 \eta^2 (P_\alpha^\beta - Q_\alpha^\beta) + \frac{2n^2 C_2}{\eta^2} (P_\alpha^\beta - Q_\alpha^\beta) \quad \text{para } \frac{1}{n} \ll \eta \ll 1, \tag{111.21}$$

$$\frac{\delta\epsilon}{\epsilon} = \frac{C_1 n^2 \eta^2}{30} + \frac{C_2 n^2}{\eta^2}.$$

Vemos así que $\delta\epsilon/\epsilon$ contiene un término que crece proporcionalmente a a †). Sin embargo, si se tiene $n\eta \ll 1$, $\delta\epsilon/\epsilon$ no llegará a ser grande, a pesar de todo, ni aún para $\eta \sim 1/n$ en virtud de la condición $C_1 \ll 1$. Pero si $\eta n \gg 1$, para $\eta \sim 1$ la variación relativa de densidad es del orden de $C_1 n^2$, mientras que el hecho de que la perturbación inicial es pequeña exige sólo que se tenga $C_1 n^2 \eta_0^2 \ll 1$. Por lo tanto, aunque el crecimiento de las perturbaciones tiene lugar lentamente, el aumento general puede ser importante y, en consecuencia, cabe que la perturbación llegue a ser relativamente grande.

De manera análoga se pueden estudiar las perturbaciones de los tipos segundo y tercero antes considerados. Sin embargo, se pueden hallar las leyes de amortiguamiento de dichas perturbaciones sin necesidad de acudir a cálculos detallados, partiendo de las sencillas consideraciones que siguen.

Si en una porción pequeña de materia (de dimensiones lineales l) se produce una perturbación de rotación con velocidad δv, el momento cinético de esta porción es $\sim (\epsilon/c^2) l^3 \cdot l \cdot v$. Cuando el universo se expande, l crece proporcionalmente a a y ϵ disminuye como a^{-3} (en el caso $p = 0$) o como a^{-4} (cuando $p = \epsilon/3$). En virtud de la conservación del momento tenemos, por consiguiente,

$$\delta v = \text{const} \quad \text{para} \quad p = \frac{\epsilon}{3}, \quad \delta v \backsim \frac{1}{a} \quad \text{para } p = 0. \tag{111.22}$$

Finalmente, en un universo en expansión la densidad de energía de las ondas gravitatorias debe disminuir como a^{-4}. Por otra parte, esta densidad se expresa en función de la perturbación de la métrica y resulta ser $\sim k^2 (h_\alpha^\beta)^2$, donde $k = n/a$ es el vector de onda de la perturbación. Se sigue de aquí que la amplitud de una perturbación del tipo de onda gravitatoria disminuye al aumentar el tiempo como $1/a$.

† Un análisis más detenido en el que se tiene en cuenta una presión pequeña $p(\epsilon)$, muestra que la posibilidad de prescindir de la presión exige que se cumpla la condición $u\eta\, n/c \ll 1$ (donde $u = c\sqrt{dp/d\epsilon}$ es la velocidad del sonido, pequeña); es fácil comprobar que también en este caso dicha condición coincide con la condición $\lambda/L \gg 1$. Así, pues, el crecimiento de las perturbaciones se produce siempre si $\lambda/L \gg 1$.

§ 112. Espacios homogéneos

La hipótesis de que el espacio es homogéneo e isótropo determina por completo su métrica (dejando libre solamente el signo de la curvatura). La mera hipótesis de que el espacio es homogéneo, sin ninguna otra condición suplementaria de simetría, ofrece una libertad considerablemente mayor. Analicemos la cuestión de cuáles pueden ser las propiedades métricas de un espacio homogéneo.

Se trata de estudiar la métrica del espacio considerada en un instante dado t. Se supone con esto que el sistema de referencia espacio-temporal se ha elegido síncrono, de modo que t es el tiempo síncrono, el mismo para todo el espacio.

La homogeneidad significa que las propiedades métricas son las mismas en todos los puntos del espacio. La definición exacta de este concepto depende de la consideración del conjunto de transformaciones de coordenadas que hacen coincidir el espacio consigo mismo, es decir, dejan invariable su métrica: si antes de la transformación el elemento de longitud es

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3)\, dx^\alpha\, dx^\beta,$$

después de la transformación el mismo elemento es

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}(x'^1, x'^2, x'^3)\, dx'^\alpha\, dx'^\beta$$

con igual dependencia funcional de las $\gamma_{\alpha\beta}$ con relación a las nuevas coordenadas. El espacio es homogéneo si admite el conjunto de transformaciones (o, como suele decirse, el *grupo de movimientos*), que permiten hacer coincidir cualquier punto dado del mismo con cualquier otro punto. Puesto que el espacio es tridimensional, es claro que para ello las diferentes transformaciones del grupo deben quedar determinadas por los valores de tres parámetros independientes.

Así, en el espacio euclídeo la homogeneidad se expresa por la invariancia de la métrica respecto de las traslaciones del sistema cartesiano de coordenadas. Cada traslación se define por tres parámetros, a saber, por las componentes del vector desplazamiento del origen de coordenadas. Todas estas transformaciones conservan invariantes tres diferenciales independientes (dx, dy, dz), a partir de las cuales precisamente se construye el elemento de longitud.

En el caso general de un espacio homogéneo no-euclídeo, las transformaciones de su grupo de movimientos dejan asimismo invariantes tres formas diferenciales lineales independientes que, sin embargo, no se reducen a diferenciales totales de ciertas funciones de las coordenadas. Escribamos estas formas como sigue:

$$e_a^\alpha\, dx^\alpha \qquad (112.1)$$

donde el índice latino a caracteriza tres vectores independientes (funciones de las coordenadas); llamaremos a estos vectores *vectores de referencia.*

Mediante las formas (112.1) la métrica espacial invariante respecto del grupo dado de movimientos se construye de acuerdo con la igualdad

$$dl^2 = \gamma_{ab}(e^a_\alpha\, dx^\alpha)\,(e^b_\beta\, dx^\beta),$$

es decir, el tensor métrico tiene por componentes

$$\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{ab}\, e^a_\alpha\, e^b_\beta, \tag{112.2}$$

donde los coeficientes $\gamma_{\alpha\beta}$, simétricos con relación a los índices a, b, son funciones del tiempo †. En cuanto a los componentes contravariantes del tensor métrico, éstas se escriben en la forma

$$\gamma^{\alpha\beta} = \gamma^{ab}\, e^\alpha_a\, e^\beta_b, \tag{112.3}$$

donde los coeficientes γ^{ab} son los elementos de la matriz inversa de la matriz γ_{ab} ($\gamma_{ac}\,\gamma^{cb} = \delta^b_a$) y las cantidades e^α_a definen tres vectores « recíprocos » de los vectores e^a_α:

$$e^\alpha_a\, e^b_\alpha = \delta^b_a, \qquad e^a_\alpha\, e^\beta_a = \delta^\beta_\alpha \tag{112.4}$$

(cada una de estas igualdades se deduce automáticamente de la otra). Observemos que la relación entre e^a_α y e^α_a puede escribirse de manera explícita como sigue:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{v}\,\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3, \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{v}\,\mathbf{e}^3 \times \mathbf{e}^1, \qquad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{v}\,\mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2, \tag{112.5}$$

donde $v = \mathbf{e}^1 \cdot [\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3]$ y hay que interpretar $\mathbf{e}_a$ y $\mathbf{e}^a$ como vectores cartesianos cuyas componentes son e^a_α y e^α_a, respectivamente †† El determinante del tensor métrico (112.2) vale

$$\gamma = |\,\gamma_{ab}\,|\,|\,e^a_\alpha\,|^2 = |\,\gamma_{ab}\,|\,v^2, \tag{112.6}$$

donde $|\,\gamma_{ab}\,|$ es el determinante de la matriz γ_{ab}.

La invariancia de las formas diferenciales (112.1) significa que

$$e^a_\alpha(x)\, dx^\alpha = e^a_\alpha(x')\, dx'^\alpha, \tag{112.7}$$

† Aquí y en lo que sigue de este párrafo se sobreentiende la suma respecto de cada par de índices que se repiten, se trate de los representados por caracteres griegos o de los índices latinos (a, b, c, ...) que numeran a los vectores de referencia.

†† ¡No se confundan las e^α_a con las componentes contravariantes de los vectores e^a_α! Estas últimas son iguales a $e^{aa} = \gamma^{a\beta}\, e^a_\beta = \gamma^{ab}\, e^\alpha_b$.

donde, en uno y otro miembro de la igualdad, las $e_a^{\ a}$ son exactamente las mismas funciones de las antiguas coordenadas y de las nuevas, respectivamente. Multiplicando esta igualdad por $e_a^{\beta}(x')$, substituyendo $dx'^{\beta} = \dfrac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\, dx^{\alpha}$ e igualando los coeficientes de las mismas diferenciales dx^{a}, obtendremos

$$\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = e_a^{\beta}(x')\, e_{\alpha}^{a}(x) \tag{112.8}$$

Estas igualdades constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales que determinan las funciones $x'^{\beta}(x)$ para vectores de referencia dados †. Para que sean integrables, las ecuaciones (112.8) deben satisfacer idénticamente las condiciones

$$\frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\alpha}\, \partial x^{\gamma}} = \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\gamma}\, \partial x^{\alpha}}$$

Calculando las derivadas, se obtiene

$$\left[\frac{\partial e_a^{q}(x')}{\partial x'^{\delta}}\, e_b^{\delta}(x') - \frac{\partial e_b^{\beta}(x')}{\partial x'^{\delta}}\, e_a^{\delta}(x')\right] e_{\gamma}^{b}(x)\, e_{\alpha}^{a}(x) = e_a^{\beta}(x')\left(\frac{\partial e_{\gamma}^{a}(x)}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial e_{\alpha}^{a}(x)}{\partial x^{\gamma}}\right).$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad por $e_d^{\alpha}(x) e_c^{\gamma}(x) e_{\beta}^{f}(x')$ y haciendo pasar las derivaciones de unos factores a otros teniendo en cuenta (112.4), en el primer miembro queda:

$$e_{\beta}^{f}(x')\left[\frac{\partial e_d^{\beta}(x')}{\partial x'^{\delta}}\, e_c^{\delta}(x') - \frac{\partial e_c^{\beta}(x')}{\partial x'^{\delta}}\, e_d^{\delta}(x')\right] = e_c^{\beta}(x')\, e_d^{\delta}(x')\left[\frac{\partial e_{\beta}^{f}(x')}{\partial x'^{\delta}} - \frac{\partial e_{\delta}^{f}(x')}{\partial x'^{\beta}}\right],$$

y en el segundo miembro se obtiene la misma expresión como función de x. Dado que x y x' son arbitrarias, estas expresiones deben reducirse a constantes:

$$\left(\frac{\partial e_{\alpha}^{c}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial e_{\beta}^{c}}{\partial x^{\alpha}}\right) e_a^{\alpha}\, e_b^{\beta} = C_{ab}^{c} \tag{112.9}$$

Las constantes C_{ab}^{c} se llaman *constantes estructurales* del grupo. Multiplicando por

† Para las transformaciones de la forma $x'^{\beta} = x^{\beta} + \xi^{\beta}$, donde ξ^{β} son cantidades pequeñas, de (112.8) se deducen las ecuaciones

$$\frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = \xi^{\gamma}\, \frac{\partial e_{\alpha}^{\ \beta}}{\partial x^{\gamma}}\, e_{\alpha}^{\ a}$$

Tres soluciones de estas ecuaciones linealmente independientes, ξ_b^{β} (b = 1, 2, 3), determinan transformaciones infinitesimales del grupo de movimientos del espacio. Los vectores ξ_b^{β} se llaman *vectores de Killing*.

e_c^{ab}, (112.9) puede escribirse también en la forma

$$e_a^\alpha \frac{\partial e_b^\gamma}{\partial x^\alpha} - e_b^\beta \frac{\partial e_a^\gamma}{\partial x^\beta} = C_{ab}^c \, e_c^\gamma \tag{112.10}$$

Como se ve por su propia definición, las constantes estructurales son antisimétricas respecto de sus subíndices:

$$C_{ab}^c = - C_{ba}^c \tag{112.11}$$

Una condición más se puede obtener todavía para ellas, observando que cabe escribir la igualdad (112.10) en la forma de una regla de conmutación

$$[X_a, X_b] \equiv X_a X_b - X_b X_a = C_{ab}^c X_c \tag{112.12}$$

para los operadores diferenciales lineales †

$$X_a = e_a^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tag{112.13}$$

Entonces la citada condición resulta de la identidad

$$[[X_a, X_b], X_c] + [[X_b, X_c], X_a] + [[X_c, X_a], X_b] = 0$$

(que es la llamada *identidad de Jacobi*) y tiene la forma

$$C_{ab}^e \, C_{ec}^d + C_{bc}^e \, C_{ea}^d + C_{ea}^c \, C_{eb}^d = 0. \tag{112.14}$$

Obsérvese que es posible escribir las igualdades (112.9) en la forma vectorial

$$[\mathbf{e}_a \times \mathbf{e}_b] \cdot \text{rot } \mathbf{e}^c = - C_{ab}^c,$$

donde una vez más las operaciones vectoriales se efectúan como si las coordenadas x^α fuesen coordenadas cartesianas. Mediante (112.5) deducimos de aquí

$$\frac{1}{v}(\mathbf{e}^1 \cdot \text{rot } \mathbf{e}^1) = C_{32}^1, \quad \frac{1}{v}(\mathbf{e}^2 \cdot \text{rot } \mathbf{e}^1) = C_{13}^1, \quad \frac{1}{v}(\mathbf{e}^3 \cdot \text{rot } \mathbf{e}^1) = C_{21}^1 \tag{112.15}$$

y 6 igualdades más que se obtienen por permutación cíclica de los índices, 1, 2, 3.

Las ecuaciones de Einstein para un universo en que el espacio es homogéneo pueden representarse por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que contienen únicamente funciones del tiempo. Para ello todos los vectores y tensores

† Los resultados expuestos pertenecen a la teoría matemática de los llamados grupos continuos (o grupos de Lie). En esta teoría los operadores X_a, que satisfacen condiciones de la forma (112.8), reciben el nombre de generadores del grupo. Haremos observar, sin embargo (para evitar posibles confusiones al comparar con otras maneras de exponer el tema) que la teoría sistemática se construye a menudo partiendo de los operadores definidos por los vectores de Killing: $X_a = \xi_a^\alpha \delta / \delta x^\alpha$.

tridimensionales han de expresarse mediante sus componentes respecto de cada terna de vectores de referencia del espacio dado. Designando las correspondientes componentes por a, b, ..., tendremos, por definición,

$$R_{ab} = R_{\alpha\beta},\ e^{\alpha}_{a}\ e^{\beta}_{b},\quad R_{0a} = R_{0\alpha}\ e^{\alpha}_{a},\quad u^{a} = u^{\alpha}\ e^{a}_{\alpha},$$

siendo todas estas magnitudes funciones solamente de t (funciones del tiempo lo son también las cantidades escalares ε y p). Para subir y bajar índices se utilizarán en lo que sigue las magnitudes γ^{ab}: $R^{b}_{a} = \gamma^{cb}\ R_{ac}$, $u_{a} = \gamma_{ab}\ u^{b}$, etc.

Las ecuaciones de Einstein en un sistema de referencia síncrono se expresan, según (99.11-13), en función de los tensores tridimensionales $\varkappa_{\alpha\beta}$ y $P_{\alpha\beta}$. Para el primero de ellos tenemos, simplemente,

$$\varkappa_{ab} = \dot{\gamma}_{ab} \tag{112.16}$$

(el punto significa la derivación respecto de t). En cuanto a las componentes P_{ab}, resulta posible expresarlas en función de las magnitudes γ_{ab} y de las constantes estructurales del grupo:

$$P_{ab} = -\ a^{c}_{ad}\ a^{d}_{bc} - C^{d}_{dc}\ a^{a}_{bc}, \tag{112.17}$$

$$a^{c}_{ab} = \tfrac{1}{2}\ (C^{c}_{ab} + C^{e}_{bd}\ \gamma_{ea}\ \gamma^{dc} - C^{e}_{da}\ \gamma_{cb}\ \gamma^{dc}).$$

En función de las mismas magnitudes se expresan asimismo las derivadas covariantes $\varkappa^{\beta}_{\alpha}$; γ [que intervienen en las ecuaciones (99.12)] y para R^{0} se obtiene

$$R^{0}_{a} = -\ \tfrac{1}{2}\ \dot{\gamma}_{bc}\ \gamma^{bd}\ (C^{c}_{da} - \delta^{c}_{a}\ C^{e}_{ed}) \tag{112.18}$$

Hay que subrayar que, de esta manera, para establecer las ecuaciones de Einstein no es necesario utilizar las formas explícitas de los vectores de referencia entanto que funciones de las coordenadas †).

Por supuesto, la elección de los tres vectores de referencia en las formas diferenciales (112.1) [y con ellos también la de los operadores (112.13)] no es única. Dichos vectores pueden someterse a cualquier transformación lineal con coeficientes constantes (reales):

$$e^{a}_{a} = A^{b}_{a}\ e^{a}_{b} \tag{112.19}$$

Respecto de tales transformaciones las magnitudes γ_{ab} se comportan como un tensor covariante, y las constantes C^{c}_{ab}, como un tensor covariante con relación a los índices a, b, y contravariante respecto del índice c.

Las condiciones (112.11) y (112.14) son las únicas que deben cumplir las cons-

† La deducción de las fórmulas (112.17-18) puede hallarse en el artículo de E. Schücking, en el libro «Gravitation: An Introduction to Current Research», ed. L. Witten, J. Wiley, N. Y., 1962, pág. 454.

tantes estructurales. Pero entre los conjuntos de constantes admisibles por estas condiciones los hay que son equivalentes, en el sentido de que su diferencia se debe tan sólo a transformaciones del tipo (112.19). La cuestión de clasificar los espacios homogéneos se reduce a determinar todos los sistemas no equivalentes de constantes estructurales.

Una manera simple de hacerlo consiste en, utilizando las propiedades « tensoriales » de las constantes C^c_{ab}, expresar estas nueve cantidades en función de las seis componentes de un « tensor » simétrico n^{ab} y de las tres componentes del « vector » a_c de acuerdo con

$$C^c_{ab} = e_{abd}\, n^{dc} + \delta^c_b\, a_a - \delta^c_a\, a_b, \tag{112.20}$$

donde e_{abd} es el « tensor » antisimétrico unidad (C. G. Behr, 1962). La condición de antisimetría (112.11) ya se ha tenido en cuenta aquí, y la identidad de Jacobi (112.14) lleva a la condición

$$n^{ab}\, a_b = 0. \tag{112.21}$$

Mediante transformaciones (112.19), el « tensor » simétrico n^{ab} puede reducirse a la forma diagonal; sean $n^{(1)}$, $n^{(2)}$, $n^{(3)}$ sus valores principales. La igualdad (112.21) prueba que el « vector » a_b (si existe) tiene la dirección de una de las direcciones principales del « tensor » n^{ab}, precisamente aquella que corresponde al valor principal nulo. Sin restringir la generalidad podemos hacer, por consiguiente, $a_b = (a, 0, 0)$. Entonces (112.21) se reduce a $an^{(1)} = 0$, es decir, una de las dos cantidades a ó $n^{(1)}$ debe ser cero. En cuanto a las reglas de conmutación (112.12), éstas adoptan la forma:

$$[X_1, X_2] = +\, n^{(3)}\, X_3\, aX_2,\ [X_2, X_3] = n^{(1)}\, X_1,\ [X_3, X_1] = n^{(2)}\, X_2 - aX_3. \tag{112.22}$$

Cabe entonces todavía cambiar de signo los operadores X_a y aplicarles transformaciones arbitrarias de escala (multiplicación por constantes). Esto permite cambiar a la vez el signo de todos los $n^{(a)}$ y, al mismo tiempo, hacer que la cantidad a sea positiva (si no es nula). Es también posible reducir todas las constantes estructurales a ± 1 si por lo menos una de las cantidades a, $n^{(2)}$, $n^{(3)}$ es igual a cero. Pero si todas esas tres cantidades son no nulas, los cambios de escala dejan invariante la razón $a^2/n^{(2)}\, n^{(3)}$.

De esta manera llegamos a la siguiente lista de los tipos posibles de espacios homogéneos; en la primera columna de la tabla se indican con cifras romanas los números con los que se suele designar el tipo en la clasificación de Bianchi (*L. Bianchi*, 1918) †.

† El parámetro a toma todos los valores positivos. Los correspondientes tipos constituyen de hecho familias, dependientes de un solo parámetro, de los diferentes grupos.

Para constantes estructurales dadas, los vectores de referencia se pueden hallar resolviendo las ecuaciones diferenciales (112.10). Se presentan para todos los tipos (junto con los correspondientes vectores de Killing) en el artículo de A. H. Taub, Ann. Math., **53**, 472 (1951).

Tipo	a	$n^{(1)}$	$n^{(2)}$	$n^{(3)}$
I	0	0	0	0
II	0	1	0	0
VII	0	1	1	0
VI	0	1	—1	0
IX	0	1	1	1
VIII	0	1	1	—1
V	1	0	0	0
IV	1	0	0	1
VII	a	0	1	1
III ($a = 1$) VI ($a \neq 1$)	a	0	1	—1

El tipo I es el espacio euclídeo (todas las componentes del tensor espacial de curvatura se reducen a cero). Junto con el caso trivial que representa la métrica galileana, a este tipo corresponde la métrica (103.9).

Si para un espacio del tipo IX se hace $\gamma_{ab} = (a^2/4)\delta_{ab}$, apoyándonos en (112.17) obtendremos para el tensor de Ricci $P_{ab} = \frac{1}{2}\ \delta_{ab}$ y luego

$$P_{\alpha\beta} = P_{ab}\, e^a_\alpha\, e^b_\beta = \frac{2}{a^2}\,\gamma_{\alpha\beta},$$

lo que corresponde a un espacio con curvatura positiva constante [cf. (107.3), (107.6)]; este espacio queda incluido, por lo tanto, en el tipo IX como caso particular.

De manera análoga, el espacio de curvatura negativa constante es un caso particular de los espacios del tipo V. Es fácil convencerse de que así es transformando primero las constantes estructurales de este grupo mediante la substitución $X_2 + X_3 = X_2'$, $X_2 - X_3 = X_3'$, $X_1 = X_1'$. Entonces será

$$[X_1', X_2'] = X_2', \qquad [X_2', X_3'] = 0, \qquad [X_3', X_1'] = -X_3'$$

y si hacemos $\gamma_{ab} = a^2\,\delta_{ab}$, se obtendrá para el tensor de Ricci

$$P_{ab} = -2\delta_{ab}, \qquad P_{\alpha\beta} = -\frac{2}{a^2}\,\gamma_{\alpha\beta},$$

lo que corresponde a un espacio de curvatura negativa constante.

§ 113. **Régimen oscilatorio al acercarse a un punto singular**

En el ejemplo que ofrece el modelo de universo con un espacio homogéneo del tipo IX estudiaremos a continuación la singularidad de la métrica respecto del tiempo, singularidad cuyo carácter es fundamentalmente distinto del de la singularidad

en el modelo homogéneo e isótropo (V. A. Belinski, I. M. Jalatnikov, E. M. Lifshitz, 1969; Ch. W. Misner, 1969). En el párrafo siguiente se verá que este carácter es de naturaleza muy general.

Se trata de determinar cuál es el comportamiento del modelo cerca del punto singular (que eligiremos como origen del tiempo, $t = 0$). Dado que, como veremos más adelante, la existencia de materia no se refleja en las propiedades cualitativas de dicho comportamiento, para simplificar el problema supondremos primero que el espacio está vacío. A la singularidad física para un espacio de tales características corresponde una tendencia a infinito de los invariantes del tensor de curvatura cuadridimensional para $t \to 0$.

Supongamos que en (112.2) la matriz de elementos $\gamma_{ab}(t)$ es diagonal y designemos sus elementos diagonales por a^2, b^2, c^2; los tres vectores de referencia $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ se representarán por $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$. Entonces, la métrica espacial se escribe en la forma

$$\gamma_{\alpha\beta} = a^2 l_\alpha l_\beta + b^2 m_\alpha m_\beta + c^2 n_\alpha n_\beta \tag{113.1}$$

Para un espacio del tipo IX las constantes estructurales son †):

$$C^1_{23} = C^2_{31} = C^3_{12} = 1. \tag{113.2}$$

En (112.18) se ve que para tales valores de las constantes y una matriz γ_{ab} diagonal las componentes R^0_a del tensor de Ricci se anulan idénticamente en un sistema de referencia síncrono; según (112.17) se anulan también las componentes no diagonales P_{ab}. Precisamente este hecho permite buscar para $\gamma_{\alpha\beta}$ una expresión de la forma (113.1) que contiene en total tres (en vez de seis) funciones incógnitas del tiempo, a, b, c. Las demás componentes de las ecuaciones de Einstein dan para estas funciones el

---

† Los vectores de referencia que corresponden a estas constantes son:

$$\mathbf{l} = (\text{sen } x^3, -\cos x^3 \text{ sen } x^1, 0),$$
$$\mathbf{m} = (\cos x^3, \text{sen } x^3 \text{ sen } x^1, 0),\ \mathbf{n} = (0, \cos x^1, 1).$$

El elemento de volumen se escribe

$$dV = \sqrt{\gamma}\, dx^1\, dx^2\, dx^3 = abc \text{ sen } x^1\, dx^1\, dx^2\, dx^3.$$

Las coordenadas varían en los intervalos $0 \leqslant x^1 \leqslant \pi$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant x^3 \leqslant 4\pi$. El espacio es cerrado y su volumen vale $V = 16\pi^2 abc$ (para $a = b = c$ pasa a ser el espacio con curvatura positiva constante y radio de curvatura $2a$).

sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}\frac{(\dot{a}\,b\,c)^{\cdot}}{a\,b\,c} &= \frac{1}{2\,a^2\,b^2\,c^2}\left[(\mu\,b^2-\nu\,c^2)^2-\lambda^2\,a^4\right]\\ \frac{(a\,\dot{b}\,c)^{\cdot}}{a\,b\,c} &= \frac{1}{2\,a^2\,b^2\,c^2}\left[(\lambda\,a^2-\nu\,c^2)^2-\mu^2\,b^4\right]\\ \frac{(a\,b\,\dot{c})^{\cdot}}{a\,b\,c} &= \frac{1}{2\,a^2\,b^2\,c^2}\left[(\lambda\,a^2-\mu\,b^2)^2-\nu^2\,c^4\right]\end{aligned}\right\} \tag{113.3}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\ddot{b}}{b}+\frac{\ddot{c}}{c}=0 \tag{113.4}$$

[las ecuaciones (113.3) corresponden a $R^l_l = R^m_m = R^n_n = 0$; las (113.4), a $R^0_0 = 0$]. Las letras λ, μ, ν designan aquí las constantes estructurales $-C^1_{23}$, $-C^2_{31}$, $-C^3_{12}$; aunque en todo lo que sigue se suponen iguales a 1, aquí ponen de manifiesto el origen de los diferentes términos en las ecuaciones.

Las derivadas respecto del tiempo en el sistema (113.3-4) adoptan una forma más simple si se introducen en vez de las funciones a, b, c sus logaritmos α, β, γ:

$$a = e^{\alpha},\quad b = e^{\beta},\quad c = e^{\gamma}, \tag{113.5}$$

y en vez de t la variable τ definida por

$$dt = abcd\tau. \tag{113.6}$$

Entonces:

$$\left.\begin{aligned}2\,\alpha_{\tau\tau} &= (b^2-c^2)^2-a^4,\\ 2\,\beta_{\tau\tau} &= (a^2-c^2)^2-b^4,\\ 2\,\gamma_{\tau\tau} &= (a^2-b^2)^2-c^4\end{aligned}\right\} \tag{113.7}$$

$$\tfrac{1}{2}\,(\alpha+\beta+\gamma)_{\tau\tau} = \alpha_\tau\,\beta_\tau + \alpha_\tau\,\gamma_\tau + \beta_\tau\,\gamma_\tau, \tag{113.8}$$

donde el índice τ designa la derivación respecto de esta variable. Sumando miembro a miembro (113.7) y substituyendo en el primer miembro del resultado la suma de las segundas derivadas por la expresión (113.8), obtendremos:

$$\alpha_\tau\,\beta_\tau + \alpha_\tau\,\gamma_\tau + \beta_\tau\,\gamma_\tau =$$

$$= \tfrac{1}{4}\,(a^4 + b^4 + c^4 - 2\,a^2\,b^2 - 2\,c^2\,a^2 - 2\,b^2\,c^2) \tag{113.9}$$

Esta relación contiene solamente derivadas primeras y constituye una integral primera de las ecuaciones (113.7).

Las ecuaciones (113.3-4) no se pueden resolver exactamente en forma analítica,

pero permiten un detallado estudio cualitativo.

Observemos ante todo que, si los segundos miembros de las ecuaciones (113.3) fueron iguales a cero, se tendría la solución exacta, en la cual

$$a \sim t^{p_l}, \quad b \sim t^{p_m}, \quad c \sim t^{p_n}, \tag{113.10}$$

donde p_l, p_m, p_n son números ligados entre sí por las relaciones

$$p_l + p_m + p_n = p_l^2 + p_m^2 + p_n^2 = 1 \tag{113.11}$$

[análoga a la solución de Kasner (103.9)[. Hemos designado aquí los exponentes por p_l, p_m, p_n sin distinguir de antemano su ordenación en el sentido de valores crecientes; en cambio, los símbolos p_1, p_2, p_3 adoptados en el § 103 se referían a ternas de números dispuestos en el orden $p_1 < p_2 < p_3$ y que varían en los intervalos (103.10a). Estos números pueden representarse en forma paramétrica como sigue:

$$p_1(s) = \frac{-s}{1+s+s^2}, \quad p_2(s) = \frac{1+s_2}{1+s+s^2}, \quad p_3(s) = \frac{s(1+s)}{1+s+s^2} \tag{113.12}$$

Todos los valores distintos p_1, p_2, p_3 (con conservación del orden convenido) se obtienen si el parámetro s varía en el intervalo $s \geqslant 1$. Los valores correspondientes a $0 < s \leqslant 1$, son tales que, con relación a los de aquel intervalo,

$$p_1\left(\frac{1}{s}\right) = p_1(s), \quad p_2\left(\frac{1}{s}\right) = p_3(s), \quad p_3\left(\frac{1}{s}\right) = p_2(s). \tag{113.13}$$

Supongamos que, en un cierto intervalo de tiempo, los segundos miembros de las ecuaciones (113.3) son en efecto pequeños, de modo que cabe prescindir de ellos y se establece así el régimen « kasneriano » (113.10). Para concretar, supondremos que el exponente en la función a es negativo: $p_l = p_1 < 0$. Veamos cómo evoluciona la métrica en el sentido de los valores decrecientes de t.

Los primeros miembros de las ecuaciones (113.3) tienen un orden de magnitud « potencial » $\sim t^{-2}$. Observando que en el régimen (113.10) se tiene $abc \sim t$, vemos que en los segundos miembros todos los términos crecen (para $t \to 0$) más lentamente que t^{-2}, con excepción tan sólo de los términos $a^4/a^2b^2c^2 \sim t^{-2} \cdot t^{-4} \mid p_1 \mid$. Precisamente estos términos representarán el papel de una perturbación que destruye el régimen de Kasner. En los segundos miembros de las ecuaciones (113.7), a ellos les corresponden los términos a^4. Conservando únicamente éstos, se obtienen las ecuaciones

$$\alpha_{\tau\tau} = -\tfrac{1}{2}\, e^{4\alpha}, \quad \beta_{\tau\tau} = \gamma_{\tau\tau} = \tfrac{1}{2}\, e^{4\alpha}. \tag{113.14}$$

Al estado « inicial » †) (113.10) corresponden las condiciones

$$\alpha_\tau = p_l, \quad \beta_\tau = p_m, \quad \gamma_\tau = p_n.$$

La primera de las ecuaciones (113.14) tiene la forma de la ecuación del movimiento unidimensional de una partícula en el campo de una pared de potencial exponencial, en la cual α representa el papel de coordenada. En esta analogía al régimen kasneriano inicial corresponde el movimiento libre con una velocidad constante $\alpha_\tau = p_l$. Al rebotar en la pared, la partícula se moverá de nuevo libremente con una velocidad de signo opuesto: $\alpha_\tau = -p_l$. Observando también que, en virtud de las tres ecuaciones (113.15), $\alpha_\tau + \beta_\tau = \text{const}$ y $\alpha_\tau + \gamma_\tau = \text{const}$, se encuentra que β_τ y γ_τ toman los valores $\beta_\tau = p_m + 2p_l$, $\gamma_\tau = p_n + 2p_l$. Determinando a partir de aquí α, β, γ y luego t de acuerdo con (113.6) se obtiene $e^\alpha \sim e^{-p_l \tau}$, $e^\beta \sim e^{(p_m + 2p_l)\tau}$, $e^\gamma \sim e^{(p_n + 2p_l)\tau}$, $t \sim e^{(1+2p_l)\tau}$

es decir,

$$a \sim t^{p'_l}, \quad b \sim t^{p'_m}, \quad c \sim t^{p'_n}$$

donde

$$p'_l = -\frac{p_l}{1+2p_l}, \quad p'_m = \frac{p_m + 2p_l}{1+2p_l}, \quad p'_n = \frac{p_n + 2p_l}{1+2p_l} \tag{113.15}$$

Si era $p_l < p_m < p_n$, $p_l < 0$, se tendrá ahora $p'_m < p'_l < p'_n$, $p'_m < 0$; la función b, que decrecía (para $t \to 0$), comienza a aumentar, la función creciente a, a disminuir, y la función c sigue decreciendo. La propia perturbación [$\sim a^4$ en las ecuaciones (113.7)], que antes crecía, de nuevo decrece.

Conviene representar la regla de substitución de los exponentes (113.15) mediante la parametrización (113.12): si

$$p_l = p_1(s), \quad p_m = p_2(s), \quad p_n = p_3(s),$$

será

$$p'_l = p_2(s-1), \quad p'_m = p_1(s-1), \quad p'_n = p_3(s-1). \tag{113.16}$$

Se conserva positivo el mayor de los dos exponentes positivos.

Así, pues, el efecto de la perturbación conduce al cambio de un régimen de Kasner por otro en el cual la potencia negativa de t pasa de corresponder a la dirección l a corresponder a la dirección m. La evolución ulterior de la métrica conduce, de manera análoga, al aumento de la perturbación que se manifiesta en los términos $\sim b^4$ de las ecuaciones (113.7), a una nueva substitución de los exponentes del régi-

† Recordaremos una vez más que estamos considerando la evolución de la métrica para $t \to 0$; por ello, las condiciones «iniciales» se refieren, no al pasado, sino al futuro.

men kasneriano, y así sucesivamente.

Los sucesivos cambios (113.16), con el paso del exponente negativo (p_1) de la dirección l a la m y recíprocamente, prosigue hasta que no llega a ser $s < 1$. El valor $s < 1$ se transforma en $s > 1$ según (113.13); en este instante es negativo el exponente p_l ó p_m y p_n pasa a ser el menor de los dos números positivos ($p_n = p_2$). La serie siguiente de substituciones hará cambiar ya el exponente negativo entre las direcciones n y l o entre n y m. Para un valor inicial arbitrario (irracional) de s el proceso de cambios sucesivos se prolonga indefinidamente.

En la solución exacta de las ecuaciones los exponentes p_l, p_m, p_n pierden, claro está, su sentido literal. Pero el comportamiento indicado de cambios de los exponentes permite llegar a la conclusión de que la marcha en la variación de la métrica al acercarnos al punto singular poseerá las siguientes propiedades cualitativas. El proceso de evolución de la métrica se compone de períodos sucesivos (llamémoles *eras*) en el curso de cada uno de los cuales las distancias a lo largo de dos ejes espaciales oscilan, mientras que a lo largo del tercero disminuyen de manera monótona. Al pasar de una era a la siguiente, la dirección a lo largo de la cual tiene lugar la disminución monótona de las distancias pasa de un eje a otro. El orden en que tiene lugar este paso adopta asintóticamente el carácter de un proceso aleatorio.

Las eras sucesivas se van adensando a medida que nos acercamos a $t = 0$. Pero la variable natural para describir la marcha en el tiempo de esta evolución no es el propio tiempo universal t, sino su logaritmo $\ln t$, para el cual todo el proceso de aproximación al punto singular se alarga hasta $-\infty$.

El análisis cualitativo que acabamos de exponer, sin embargo, debe todavía completarse en el siguiente aspecto.

A cada era (por ejemplo, la n-ésima) corresponde en este análisis una sucesió de valores $s^{(n)}$ desde un cierto máximo, $s^{(n)}_{\text{máx}}$, a un mínimo $s^{(n)}_{\text{mín}} < 1$. La duració de una era (medida por el número de oscilaciones) se determina en este caso por lo números enteros $s^{(n)}_{\text{máx}} - s^{(n)}_{\text{mín}}$. Para la siguiente era se tiene $s^{(n+1)}_{\text{máx}} = 1/s^{(n)}_{\text{mín}}$. En la sucesión infinita de número formada de esta manera se encontrarán números $s^{(n)}_{\text{mín}}$ tan pequeños cuanto se quiera (pero nunca iguales a cero) y, en consecuencia, valores $s^{(n+1)}_{\text{máx}}$ arbitrariamente grandes; a tales valores corresponden las eras «largas». Pero a los valores grandes del parámetro s corresponden exponentes (p_1, p_2, p_3) próximos a los valores (0, 0, 1). Los dos exponentes próximos a cero serán, por ello mismo, próximos entre sí y, por lo tanto, en poco diferirán las leyes de variación de dos de las funciones a, b, c. Si al principio de una era larga estas funciones, en el momento del cambio de dos épocas de Kasner, resultan ser aproximadamente iguales también en valor absoluto, seguirán siéndolo en el curso de la mayor parte de toda la era. En tal caso es necesario conservar en el segundo miembro de las

ecuaciones (113.7) no un término (a^4), sino dos.

Sea c aquella de las funciones a, b, c que disminuye con monotonía en el curso de una era larga. Con esto, pronto llega a ser pequeña comparada con las otras dos; consideremos la solución de las ecuaciones (113.7-8) precisamente en el intervalo de variación de τ, en el que ya se puede prescindir de c frente a a y b. El extremo superior de este intervalo será un cierto valor $\tau = \tau_0$.

En el caso, las dos primeras ecuaciones (113,7) dan

$$\alpha_{\tau\tau} + \beta_{\tau\tau} = 0, \tag{113.17}$$

$$\alpha_{\tau\tau} - \beta_{\tau\tau} = -e^{4\alpha} + e^{4\beta}, \tag{113.18}$$

y como tercera ecuación podemos utilizar la (113.9), de la que se sigue:

$$\gamma_\tau(\alpha_\tau + \beta_\tau) = -\alpha_\tau \beta_\tau + \tfrac{1}{4}(e^{2\alpha} - e^{2\beta})^2. \tag{113.19}$$

Escribiremos la solución de la ecuación (113.17) en la forma

$$\alpha + \beta = \frac{2a_0^2}{\xi_0}(\tau - \tau_0) + 2 \ln a_0,$$

donde las a_0, ξ_0 son constantes positivas. En lo que sigue convendrá introducir (en vez de τ) una nueva variable

$$\xi = \xi_0 \, e^{\frac{2a_0^2}{\xi}(\tau - \tau_0)} \tag{113.20}$$

Entonces

$$\alpha + \beta = \ln \frac{\xi}{\xi_0} + 2 \ln a_0. \tag{113.21}$$

En cambio, transformaremos las ecuaciones (113.18-19) introduciendo también la notación $\chi = \alpha - \beta$:

$$\chi_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi}\chi_\xi + \frac{1}{2}\operatorname{senh} 2\chi = 0, \tag{113.22}$$

$$\gamma_\xi = -\frac{1}{4\xi} + \frac{\xi}{8}(2\chi_\xi^2 + \cosh 2\chi - 1). \tag{113.23}$$

Al decrecimiento de t desde ∞ a 0 corresponde el decrecimiento de τ desde ∞ a $-\infty$; según esto, ξ disminuye de ∞ a 0. Como se verá por lo que sigue, se obtiene una era larga si ξ_0 (valor de ξ que corresponde al instante $\tau = \tau_0$) es una cantidad muy grande. Consideremos la solución de las ecuaciones (113.22-23) en los dominios $\xi \gg 1$ y $\xi \ll 1$.

Para valores ξ grandes, la solución de la ecuación (113.22) en primera aproximación (respecto de $1/\xi$) es:

$$\chi = \alpha - \beta = \frac{2A}{\sqrt{\xi}} \operatorname{sen}(\xi - \xi_0) \tag{113.24}$$

(A es una constante); el factor $1/\sqrt{\xi}$ hace que χ sea una cantidad pequeña, en virtud de lo cual se puede substituir en (113.22) $\operatorname{senh} 2\chi \approx 2\chi$. De (113.23) deducimos ahora:

$$\gamma_\xi \approx \tfrac{\xi}{4}(\chi_\xi^2 + \chi^2) = A^2,\ \gamma = A^2(\xi - \xi_0) + \text{const.}$$

Determinando α y β a partir de (113.21) y (113.24) y desarrollado e^α y e^β de acuerdo con la aproximación adoptada, se obtendrá finalmente:

$$a = a_0 \sqrt{\frac{\xi}{\xi_0}} \left[1 + \frac{A}{\sqrt{\xi}} \operatorname{sen}(\xi - \xi_0)\right],\ b = a_0 \sqrt{\frac{\xi}{\xi^0}} \left[1 - \frac{A}{\sqrt{\xi}} \operatorname{sen}(\xi - \xi_0)\right],$$

$$c = c_0\, e^{-A^2(\xi_0 - \xi)}. \tag{113.25}$$

En cuanto a la relación que liga ξ con el tiempo t, ésta se obtiene integrando la igualdad (113.6) y conduce a la fórmula

$$\frac{t}{t_0} = e^{-A^2(\xi_0 - \xi)} \tag{113.26}$$

La constante c_0 (que es el valor de c cuando $\xi - \xi_0 \ll 1$) debe ser ya $c_0 \ll a_0$.

Pasemos al dominio $\xi \ll 1$. En él los términos principales en la solución de la ecuación (113.22) son:

$$\chi = \alpha - \beta = k \ln \xi + \text{const}, \tag{113.27}$$

donde k es una constante contenida en el intervalo $-1 < k < +1$; mediante esta condición queda asegurado que el último término en (113.22) es pequeño (senh 2χ contiene ξ^{2k} y ξ^{-2k}) comparado con los dos primeros ($\sim \xi^{-2}$). Determinando luego α y β a partir de (113.27) y (113.21), γ teniendo en cuenta (113.23) y t (113.6), obtendremos

$$a \sim \xi^{\frac{1+k}{2}},\quad b \sim \xi^{\frac{1-k}{2}},\quad c \sim \xi^{-\frac{1-k^2}{4}},\quad t = \xi^{\frac{3+k^2}{4}} \tag{113.28}$$

De nuevo se trata de un régimen de Kasner, en el cual el exponente negativo de t corresponde ahora a la función $c(t)$.

Así, pues, nos encontramos otra vez ante una situación de igual carácter cualitativo. En el curso de un tiempo dilatado (que corresponde a grandes valores decrecientes de ξ) dos funciones (a y b) oscilan de modo que, como prueban las fórmulas (113.25), estas oscilaciones se producen sobre el fondo lentamente decreciente

($\sim \sqrt{\xi}$) de sus valores medios. Durante todo este tiempo las funciones a y b se conservan aproximadamente iguales en magnitud. En cambio, la tercera función c disminuye con monotonía, produciéndose esta disminución de acuerdo con la ley $c = c_0 t/t_0$. Esta evolución sigue hasta que $\xi \sim 1$, cuando las fórmulas (113.25-26) dejan de ser aplicables. A continuación, como se ve en (113.28), la función decreciente c comienza a crecer, y las funciones a, b, a disminuir. Esta situación se prolongará hasta que los términos $\sim c^2/a^2b^2$ en los segundos miembros de las ecuaciones (113.3) llegan a ser $\sim t^{-2}$ y comienza la serie siguiente de oscilaciones.

Esas propiedades cualitativas del comportamiento de la métrica cerca del punto singular no cambian cuando existe materia: cerca de la singularidad, la materia se puede « insertar » en la métrica del espacio vacío prescindiendo de su reacción sobre el campo gravitatorio. En otras palabras, la evolución de la materia se determina simplemente por las ecuaciones de su movimiento en un campo dado. Durante cada una de las épocas de Kasner por las que pasa la evolución de la métrica, la densidad de energía de la materia crece según la ley $\epsilon \sim t^{-2(1-p_3)}$, donde p_3 es el mayor de los exponentes p_1, p_2, p_3 (véase el problema 3 del § 103). Aunque esta ley cambia junto con los cambios de exponente, durante todo el proceso de aproximación al punto singular la densidad de materia crece con monotonía tendiendo a infinito.

§ 114. Carácter de la singularidad en la solución general cosmológica de las ecuaciones de la gravitación

La adecuación del modelo isótropo para describir el estado actual del Universo no da motivo por sí sola a esperar que sea también igualmente útil para representar los estadios primeros de la evolución del mundo. Además, se plantea también la cuestión de en qué medida la existencia de un punto singular respecto del tiempo (es decir, la finitud del tiempo) resulta ser en general una propiedad ineludible de los modelos cosmológicos y de si no estará ligada con las hipótesis simplificadoras específicas que se encuentran en su base.

La independencia con relación a estas hipótesis significaría que la existencia de la singularidad es inherente, no sólo a ciertas soluciones particulares de las ecuaciones de la gravitación, sino a la solución cosmológica general †). Hallar esta solución de manera exacta, para todo el espacio y el transcurso todo del tiempo, es imposible, evidentemente. Mas para resolver la cuestión planteada basta estudiar la forma de la solución tan sólo cerca de la singularidad. El criterio para determinar el carácter general de la solución es el número de funciones arbitrarias de las coor-

† Al hablar de singularidad en una solución cosmológica nos referimos a un punto singular que lo es para todo el espacio (y no solamente para una parte limitada del mismo, como en el caso del colapso gravitatorio de un cuerpo finito).

denadas espaciales « físicamente arbitrarias » contenidas en ella. En la solución general el número de dichas funciones debe ser suficiente para permitir la elección de condiciones iniciales arbitrarias en cualquier instante (4 para el espacio vacío, 8 para el espacio lleno de materia; véase § 95) †.

La singularidad que presenta para $t = 0$ la solución de Friedman se caracteriza por el hecho de que la tendencia a cero de las distancias espaciales se produce en todas direcciones según la misma ley. Con todo, este tipo de singularidad no es suficientemente general: es propio de una clase de soluciones que contienen únicamente tres funciones físicamente arbitrarias de las coordenadas (véase el problema del § 109). Observemos también que estas soluciones existen tan sólo para un espacio lleno de materia.

Un carácter esencialmente más general presenta la singularidad que posee la solución de Kasner (103.9) ††). Ésta pertenece a una clase de soluciones en la que los términos principales del desarrollo del tensor métrico espacial (en el sistema de referencia síncrono) cerca del punto singular ($t = 0$) tienen la forma

$$\gamma_{\alpha\beta} = t^{2p_l} l_\alpha l_\beta + t^{2p_m} m_\alpha m_\beta + t^{2p_n} n_\alpha n_\beta, \tag{114.1}$$

donde **l**, **m**, **n** son tres funciones vectoriales de las coordenadas, y p_l, p_m, p_n son funciones de las coordenadas ligadas entre sí por las dos relaciones (113.11). Con la métrica (114.1), la ecuación $R_0^0 = 0$ para el campo en el vacío queda satisfecha automáticamente en lo que concierne a los términos principales. En cambio, el que se cumplan las ecuaciones $R_\alpha^\beta = 0$ exige que quede satisfecha la condición suplementaria

$$\mathbf{l} \times \operatorname{rot} \mathbf{l} = 0 \tag{114.2}$$

para aquel de los vectores **l**, **m**, **n** que en (114.1) aparece con una potencia negativa de t (para concretar, supongamos $p_l = p_1 < 0$). El origen de esta condición puede reconocerse ya en las ecuaciones (113.3) consideradas en el párrafo precedente y que corresponden a una determinada elección particular de los vectores **l**, **m**, **n**. Estas ecuaciones podrían tener una solución (113.2) válida incluso hasta $t = 0$ tan sólo si se cumple la condición $\lambda = 0$, caso éste en que en los segundos miembros de las

† Hay que subrayar, sin embargo, que para un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, como el constituido por las ecuaciones de Einstein, el concepto de solución general no se define de manera unívoca. En principio, puede existir más de una integral general, cada una de las cuales no abarca toda la variedad de condiciones iniciales concebibles, sino únicamente una parte finita de la misma. Cada una de estas integrales contendrá todo el conjunto requerido de funciones arbitrarias, que, sin embargo, pueden estar sometidas a determinadas condiciones del tipo desigualdad. La existencia de la solución general con una singularidad no excluye, por ello, la existencia de otras soluciones generales que carecen de puntos singulares.

†† Para el desarrollo de los correspondientes cálculos, véase E. M. Lifshitz e I. M. Jalatnikov, ZhETF, **39**, 800, 1960.

ecuaciones desaparecerían los términos $a^2/2b^2c^2$ que, para $t \to 0$, crecen más rápidamente que t^{-2}. Pero imponer la anulación de la constante estructural $\lambda = C_{23}^1$ equivale precisamente, de acuerdo con (112.15), a la condición (114.2).

En lo que concierne a las ecuaciones $R_a^0 = 0$, que contienen tan sólo las derivadas primeras respecto del tiempo de las componentes del tensor $\gamma_{\alpha\beta}$, dichas ecuaciones conducen a otras tres relaciones más (que no contienen el tiempo) que deben imponerse a las funciones de las coordenadas que figuran en (114.1). Junto con (114.2) se tienen, de esta manera, en total cuatro condiciones. Estas vinculan entre sí 10 funciones diferentes de las coordenadas: una para cada una de las tres componentes de los tres vectores **l**, **m**, **n** y una función de los exponentes [cualquiera de las tres funciones p_l, p_m, p_n ligadas por las dos relaciones (113.11)]. Al determinar el número de funciones físicamente arbitrarias hay que tener en cuenta también que el sistema de referencia síncrono utilizado permite todavía transformaciones arbitrarias de las tres coordenadas espaciales que no afecten al tiempo. Por ello, la solución (114.1) contiene en total 10-4-3 = 3 funciones físicamente arbitrarias — una menos de las que son necesarias para la solución general en el espacio vacío.

El grado de generalidad conseguido no disminuye cuando se introduce materia: la materia se « inserta » en la métrica (114.1) junto con las 4 nuevas funciones de las coordenadas que introduce y que son necesarias para fijar la distribución inicial de su densidad y de las tres componentes de la velocidad (cf. problema 3 del § 103).

De las cuatro condiciones que hay que imponer a las funciones de las coordenadas en (114.1), tres de ellas, que resultan de las ecuaciones $R_a^0 = 0$, son « naturales »; aparecen como consecuencia de la propia estructura de las ecuaciones de la gravitación. A la « pérdida » de una función arbitraria conduce, en cambio, el imponer la condición suplementaria (114.2).

La solución general, por definición, es completamente estable. Aplicar una perturbación cualquiera es equivalente a modificar las condiciones iniciales en cierto instante del tiempo, y dado que la solución general admite condiciones iniciales arbitrarias, tampoco la perturbación puede modificar su carácter. En cambio, para la solución (114.1) la existencia de la condición limitativa (114.2) significa, en otras palabras, la inestabilidad respecto de las perturbaciones que violan esta condición. Imponer una perturbación de ese tipo debe llevar al modelo a otro régimen que, por ello mismo, será ya completamente general.

Precisamente un análisis de estas características se llevó a cabo en el párrafo anterior para el caso particular del modelo homogéneo. Las constantes estructurales (113.2) significan justamente que para un espacio homogéneo del tipo IX son diferentes de cero los tres productos $\mathbf{l} \times \operatorname{rot} \mathbf{l}$, $\mathbf{m} \times \operatorname{rot} \mathbf{m}$, $\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n}$ [cf. (112.15)].

Por ello es evidente sin duda alguna que la condición (114.2) no puede cumplirse cualquiera que sea la dirección a que se refiera la potencia negativa del tiempo. Por otra parte, el estudio de las ecuaciones (113.3-4) realizado en el § 113 se redujo a explicar la influencia que una perturbación ligada con un valor no nulo de la cantidad $\lambda = (\mathbf{l} \times \text{rót}\, \mathbf{l})/v$ ejerce sobre el régimen de Kasner.

Aunque el análisis de un caso particular no puede poner de manifiesto todos los detalles del caso general, sí permite concluir fundadamente que una singularidad en la solución cosmológica general posee el carácter oscilatorio descrito en el § 113. Subrayaremos de nuevo que este carácter no está vinculado con la existencia de materia y que ya lo posee de suyo el propio espacio-tiempo vacío.

El régimen oscilatorio de la aproximación al punto singular comunica un nuevo aspecto al propio concepto de finitud del tiempo. Entre un instante finito cualquiera del tiempo universal t y el instante $t = 0$ queda comprendido un conjunto infinito de oscilaciones. En este sentido, el proceso cobra un carácter infinito. Una variable más natural para describirlo en vez del tiempo t resulta ser (como ya se hizo notar en el § 113) el logaritmo $\ln t$ según el cual el proceso se alarga hasta $-\infty$.

En todo lo que precede hemos hablado de dirección de aproximación al punto singular en el sentido de dirección (orientada) a lo largo de la cual disminuye el tiempo; pero dada la simetría de las ecuaciones de la gravitación respecto del cambio de signo del tiempo, con igual derecho se podría hablar de aproximarse a la singularidad en el sentido creciente del tiempo. En realidad, sin embargo, dada la no equivalencia física de pasado y futuro, entre estos dos casos existe una diferencia esencial en lo que concierne al propio planteo de la cuestión. Una singularidad en el futuro puede tener sentido físico tan sólo si se presenta para condiciones iniciales arbitrarias dadas relativas a un instante anterior cualquiera. Es claro, que no existe ningún fundamento para que la distribución de la materia y del campo alcanzada en cierto instante durante el proceso de evolución del universo corresponda a las condiciones específicas requeridas para que se dé una u otra solución particular de las ecuaciones de la gravitación.

En cuanto a la cuestión acerca del tipo de singularidad en el pasado, es poco probable que un estudio basado exclusivamente en las ecuaciones de la gravitación pueda conducir a una respuesta definida. Es natural pensar que cuál sea la solución que corresponde al universo real es algo que está ligado con ciertas condiciones físicas fundamentales que es imposible establecer apoyándose tan sólo en la teoría con que se cuenta y que únicamente podrán ser puestas de manifiesto como resultado de una síntesis ulterior de las teorías físicas. En este sentido, en principio po-

dría resultar que a dicha solución corresponde un determinado tipo particular de singularidad (por ejemplo, el isótropo). Con todo, a priori es más natural pensar que, en virtud del carácter general del régimen oscilatorio, sea éste precisamente el que permite describir los estadios iniciales de la evolución del universo.

ÍNDICE ALFABÉTICO

Aberración de la luz, 19
Acción, 33
Aceleración cuadridimensional, 31
— de una partícula, 69
Airy, función de, 213, 258, 282
Ángulo de aberración, 20
— de desviación de una carga, 135
— de difracción, 207
— de separación, 45
Astigmatismo, 196
Aumento de un sistema óptico, 203
— lateral, 198
— longitudinal, 198
Autoenergía de las cargas, 129
— potencial, 127

Babinet, principio de, 221
Bessel, función de, 257, 259, 261
Bianchi, identidad de, 365
Biot y Savart, ley de, 146

Campo a gran distancia de un sistema de cargas, 241
— de cargas en movimiento, 225
— de fuerzas, 61
— de gravedad, 315
— de radiación a pequeñas distancias, 267
— de una carga en movimiento uniforme, 129
— eléctrico, 67
— — circulación del, 94
— — constante, 71
— — intensidad del, 67
— — uniforme, 72
Campo electromagnético, 67
— — constante, 71, 125
— — ecuaciones del, 93
— — función acción del, 95
— electrostático, 125
— gravitatorio central, 394
— — constante, 345
— — en mecánica no relativista, 315
— — en mecánica relativista, 317
— — estacionario, 346
— — estático, 346
— — lejos de los cuerpos, 446
— magnético, 67
— — intensidad del 67
— — constante, 71, 144
— — uniforme, 72
— uniforme, 72
Carga, densidad de, 98
— de una partícula, 99
Cargas en campos electromagnéticos, 61
— en movimiento, 225
Caso ultrarelativista, 37
Cáusticas, 191
— imaginarias, 192
Christoffel, símbolos, 334, 337, 388, 48
Centro de masa, 58
Circulación del campo eléctrico, 94
— de un vector, 94
Coeficiente de despolarización, 173
Colapso gravitario, 414, 416
Colisión elástica de partículas, 49
Componentes contravariantes, 21
— — de un cuadrivector, 27
— covariantes, 21

Condición de Lorentz, 155
Cono de luz, 10
Conservación de la energía, ley de, 42
— del cuadrimpulso, 49
Constante de Hubble, 486
— de la gravitación, 373
— de Planck, 128, 289
— gravitatoria de Einstein, 373
Constantes estructurales, 501
Continuidad, ecuación de, 100-101
Contracción de Lorentz, 16
— de un tensor, 23
Coordenadas curvilíneas, 321
— esféricas isótropas, 401
Corriente de carga, 99, 117
— de desplazamiento, 106
— de masa, 117
Corrimiento hacia el rojo, 349, 482
Coulomb, ley de, 125
— movimiento en un campo de, 132
Cuadriaceleración, 32
Cuadrigradiente de un escalar, 27
Cuadrimpulso, 38
Cuadripotencial de un campo, 63
Cuadritensor de octavo orden, 25
— de segundo orden, 22
— momento cinético, 57
— unidad, 23
— totalmente antisimétrico de cuarto orden, 24
Cuadrivelocidad, 31
Cuadrivector contravariante, 321
— corriente, 99
— covariante, 322
Cuadrivectores, 20
— espaciales, 22
— físicos, 38
— temporales, 22
— nulos, 22
Cuerpo absolutamente rígido, 62
— rígido, 61
Curvatura de Gauss, 367
— escalar, 366

D'Alembert, ecuación de, 154
Densidad de carga, 98
— de cuadrimpulso, 116
— de energía, 107, 108, 112
— de fluja, 108
— de función de Lagrange, 109
— de impulso, 112
— de masa, 116
Densidad de un gas perfecto, 123
— escalar, 325
— tensorial, 325
— vectorial, 325
Deriva eléctrica, velocidad de, 80
Derivada contravariante, 336
— covariantes, 334, 335
Desarrollo en osciladores armónicos, 183
Descomposición del campo electrostático, 177
— espectral, 168
— — de la radiación en el caso ultrarrelativista, 296
— — de los potenciales retardados, 232
Desintegración de partículas, 42
Diferenciación covariante, 332
Difracción, 207
— de Fraunhofer, 219, 223
— de Fresnel, 215, 219
Dispersión, sección eficaz, 251
— coherente, 308
— combinatoria, 308
— incoherente, 308
— de ondas de alta frecuencia, 310
— — de baja frecuencia, 308
— de una onda, 301
— por cargas libres, 301
Distancias e intervalos de tiempo, 326
Doppler, efecto, 165

Fase de una onda, 162
Fenómenos de difracción, 207
Fermat, principio de, 189, 353
Flujo de energía, 107, 113
— de impulso, 113
— de un vector, 94
Foco, 191
Focos principales, 197
Formación de imágenes mediante haces anchos de rayos, 202

Ecuación clásica de Hamilton-Jacobi, 40
— de conservación del cuadrimpulso, 49
— de continuidad, 100, 101, 106
— de D'Alembert, 154
— de estado de la materia, 475
— de Hamilton-Jacobi, 65, 133, 343
— — — — para una partícula, 407
— de las ondas, 153-154
— de las ondas, 153, 154
— de la variación de la energía cinética, 68

Ecuación del iconal, 186
— del movimiento de una partícula, 67
— de Poisson, 125, 233
— de una geodésica, 342, 343
— fundamental de la óptica geométrica, 185
— relativista de Hamilton-Jacobi, 39
Ecuaciones de Einstein, 384, 408, 409
— de Killing, 377
— de Lagrange, 66-67
— de la gravitación, 513
— — — de Einstein, 467
— de la electrodinámica cuando existe un campo gravitatorio, 356
— de Maxwell, 93, 103, 125, 153, 356, 358
— — — promedio temporal, 145
— del campo electromagnético, 93
— — — gravitatorio, 361, 381, 384, 439
— del movimiento, 109
— — — de una carga en un campo, 66
— — — de un sistema de cuerpos en segunda aproximación, 455
— fundamentales de la electrodinámica, 93, 105
Efecto Doppler, 165
Einstein, constante gravitatoria, 373
— ecuaciones de, 384, 408, 409
— ecuaciones de la gravitación, 467
— principio de relatividad de, 3
Eje óptico, 195
Elemento de longitud, 49
— distancia espacial, 327
Energía, 35
— cinética de una partícula, 74
— de enlace, 42
— de interacción de dos cargas, 129
— de la partícula incidente, 51
— de una carga en un campo electromagnético constante, 72
— de una partícula, 35
— de un cuerpo en reposo, 36
— de un cuerpo libre, 36
— del campo electromagnético, 108
— electrostática de las cargas, 127
— en reposo, 36
Eras, 510
Espacio homogéneo, 499, 504
— isótropo, 467
— de curvatura negativa constante, 49
— tridimensional de Lobachevskii, 49
Espacio-tiempo curvo, 319
— — plano, 319
Espejo, 196
Estabilidad gravitatoria del universo isótropo, 491
Expresión de Lienard Wiechert, 254
— relativista del momento cinético, 56

Formas canónicas de Petrov, 371
Fórmula de Rutherford, 135
— de Thomson, 303
— de los armónicos esféricos, 140
— de transformación de la energía, 39
— — — del impulso, 39
— elemental de la aberración de la luz, 20
Fraunhofer, difracción de, 219, 223
Frecuencia, 162
— angular de rotación de una partícula, 76
— de Larmor, 151
— fundamental, 168
Frecuencias propias de un campo, 178
Frenado por radiación, 284
— — — en el caso relativista, 292
Fresnel, difracción, 215, 219
— integrales de, 217
Friedman, solución de, 481, 514
Fuerza de frenado por radiación, 286
— de Lorentz, 68
— de rozamiento de Lorentz, 286
— electromotriz, 94
Función acción del campo electromagnético, 95
— — del campo gravitatorio, 372
— de Airy, 213, 258, 282
— de Bessel, 257, 259, 261
— de Hamilton, 37, 65, 72, 239
— de Hankel modificada, 214
— de Lagrange, 34, 35, 56, 57, 65, 97, 235, 239, 344
— — — de una carga en un campo electromagnético, 64
— — — hasta términos de segundo orden, 235
— de MacDonald, 214-282
Futuro absoluto, 10

Galileo, principio de relatividad de, 3
— transformación de, 13
Gas perfecto, densidad de un, 123
— — presión de un, 123
Gauss, curvatura de, 367
— generalidades del teorema, 29
— sistema de unidades, 97
— teorema de, 326, 341

Generadores de grupo, 502
Generalización del teorema de Gauss, 29
— — — de Stokes, 30
— relativista del teorema del virial, 120
Geometría pseudoeuclidiana, 6
Grado de no-mono-cromaticidad de una onda, 205
Grupo de movimientos, 499
Grupos continuos, 502
— de Lie, 502

Haces estrechos de rayos, 195
— homocéntricos, 195
Hamilton, función de, 37, 65, 72, 239
Hamilton-Jacobi, ecuación de, 39, 40, 65, 133, 343, 407
— — método de, 160
Hankel, función modificada de, 214
Heaviside, sistema de, 97
Hertz, vector de, 268
Hubble, constante de, 486
Huygens, principios de, 209

Iconal, 186
— angular, 192, 194
Identidad de Bianchi, 365
— de Jacobi, 502
Imagen real, 195
— telescópica, 200
— virtual, 195
Impulso, 35, 65
— de una partícula, 35, 65
— generalizado de una partícula, 64
Índices mudos, 21
Integral de acción, 33
Integrales de Fresnel, 217
Intensidad, 189
— del campo eléctrico, 67
— — — magnético, 67
Interacción de contacto, 61
— de las partículas, 1, 61
Interacciones, 1
— instantáneas, 2
Intervalo, 5
— de tiempo propio, 327
— — — real, 327
— espacial, 9
— imaginarios, 8
— real, 8
— temporal, 8
Invariancia de contraste, 69, 71
Invariantes del campo, 89

Jacobi, identidad de, 502

Kasner, régimen de, 508
— solución de, 508
Killing, ecuaciones, 377
— vectores de, 501

Lagrange, densidad de función de, 109
— ecuaciones de, 66, 67
— función de, 34, 35, 56, 57, 65, 97, 235, 239, 344
— función de una carga en un campo electromagnético, 64
Laplace, ecuación de, 125
Larmor, frecuencia de, 151
— precesión de, 152
— teorema de, 149
Lente, 196
Ley de Biot y Savart, 146
— de composición de las velocidades, 3
— de composición de la energía, 36, 42
— — — de la masa, 36
— de Coulomb, 125
— de la gravitación de Newton, 389, 391
— de Pascal, 121
— de transformación de la densidad de partículas, 47
— — — de las componentes de un cuadritensor simétrico, 30
— — — de los parámetros de Stokes, 176
— relativista de adición de velocidades, 18
Lie, grupos de, 502
Lienard-Wiechert, expresión de 254
— — potenciales de, 228, 242
Límites de la óptica geométrica, 205
Línea de universo, 5, 12
Lobachevskii, espacio tridimensional, 49
Longitud de camino óptico, 193
— de onda, 162
— focal principal, 198
— propia, 16
Lorentz, condición de, 155
— contracción de, 16
— fuerza de, 68
— fuerzas de rozamiento de, 286
— transformación de, 13, 87
Luz, cono de, 10
— natural, 171
— parcialmente polarizada, 170
— velocidad de la, 2

MacDonald, función de, 214, 282

Masa de un cuerpo compuesto, 36
— gravitatoria, 433
— inerte, 433
Maupertuis, principio de, 73, 189
Maxwell, ecuaciones de, 93, 103, 125, 145, 153, 356, 358
— tensor de tensiones de, 115
Mecánica clásica, 3
— newtoniana, 3
— relativista, 3, 33
Método de Hamilton-Jacobi, 160
Métrica del espacio-tiempo, 318
— — — — en el modelo isótropo abierto, 477
— — — — en el modelo isótropo cerrado, 472
Mínima acción, principio de, 33, 84, 189
Modelo abierto, 477
— cerrado, 473
Momento cinético, 56
— cuadripolar, 139
— — de un elipsoide, 141
— dipolar, 136
— magnético, 147
Momentos multipolares, 138
Movimiento de una carga en un campo, ecuaciones, 66
— — — — en un campo eléctrico y un campo magnético uniformes y constantes, 79
— de una partícula, ecuación, 67
— — — — en un campo gravitatorio, 341
— en un campo de Coulomb, 132
— — — — eléctrico uniforme constante, 73
— — — — magnético uniforme constante, 75
— — — — gravitatorio central, 402

Newton, ley de la gravitación, 389
Onda monocromática, 170
— polarizada circularmente, 164
— — elípticamente, 164
— — en un plano, 164
— — linealmente, 164
— — parcialmente, 170
Ondas electromagnéticas, 153
— — radiación de, 241
— gravitatorias, 435
— longitudinales, 178
— planas, 155
— — monocromáticas, 162
Ondas transversales, 158
— vector de, 165
Óptica geométrica, 185
— — límites de la, 205

Pantallas, 208
Paquete de ondas, 188
Parámetro de impacto, 135, 250
Parámetros de Stokes, 174, 176
Partícula, 61
— en un campo gravitatorio, 315
Partículas elementales, 61-62
— — en la teoría de la relatividad, 61
Pasado absoluto, 10
Pascal, ley de, 121
Petrov, forma canónicas, 371
Planck, constante de, 128, 289
Poder separador, 207
Poisson, ecuación de, 125, 233
Polarización dextrórica, 164
— levógira, 164
Potencial cuadripolar, 138
— de un campo eléctrico constante, 126
— dipolar del sistema, 138
— escalar de un campo, 64
— gravitatorio, 317
— vector de un campo, 64
Potenciales, 104
— de Lienard-Wiechert, 228, 242
— de las ondas electromagnéticas, 153-154
— de un campo electromagnético arbitrario, 225
— en el contraste de Lorentz, 155
— retardados, 225
— — descomposición espectral, 232
Poynting vector de, 107
Precesión de Larmor, 152
Presión de un gas perfecto, 123
Principio de Babinet, 221
— de equivalencia, 315
— de Fermat, 189, 353
— de Huygens, 209
— de la invariancia de la velocidad de la luz, 5
— de la relatividad, 1
— de Maupertuis, 73, 189
— de mínima acción, 33, 84, 189
— de relatividad de Einstein, 3
— — — de Galileo, 3
— de superposición, 96
Problemas cosmológicos, 467
Promedio temporal de las ecuaciones de

Maxwell, 145
Propagación de la luz, 185
— de las interacciones, 1
— instantánea de las interacciones, 2
Propiedades del tensor de curvatura, 364
Pseudoescalar, 24, 26
Pseudotensor, 24
— energía-impulso, 426
— unidad totalmente antisimétrico de tercer orden, 25
Pulsación de una onda, 162
Puntos de universo, 5
— principales, 198

Radiación a pequeñas distancias, campo de, 267
— cuadripolar, 264-266
— de frenado, 250
— — — de bajas frecuencias, 253
— — — magnético, 277
— de ondas electromagnéticas, 241
— — — gravitatorias, 452
— dipolar, 246, 247, 266
— — en las colisiones, 250
— — magnética, 264, 266
— eficaz, 251, 260
— — total, 267
— emitida por una carga que se mueve rápidamente, 271
— en el caso de interacción colombiana, 255
— libre, 178
Radio del electrón, 128
— gravitatorio, 398
— — de la Tierra, 403
— — del Sol, 403
Rayo, 185
Red de difracción, 223
Reflexión, 25
Régimen de Kasner, 508, 512
— oscilatorio al acercarse a un punto singular, 505
Regla de transformación de un cuadrivector, 21
Relación entre los símbolos de Christoffel y el tensor métrico, 337
Relatividad, principio de, 1
Renormalización de la masa, 128
Ricci, tensor de 366
Riemann, tensor de 363
Rotación, 354
Rutherford, fórmula de, 135

Sección eficaz, 47
— — de dispersión, 135, 251, 301
— — invariante, 47
— — total de dispersión, 301
Signatura del tensor, 319
Símbolos de Christoffel, 334, 388, 408
Simultaneidad, 330
Sincronización de relojes, 330
Señales, 2
Sistema de cargas en un campo exterior. 142
— — — campo a gran distancia, 241
— de Heaviside, 97
— de referencia síncrono, 406
— de reposo, 47
— de unidades de Gauss, 97
— del centro de masa, 42
— del laboratorio, 42
— galileano, 318
— — en un punto dado, 319
— inercial de referencia, 1
— localmente geodésico, 337
— — inercial, 337
Sistema-C, 42
Sistema-L, 43
Sistemas óptimos, 192
— — convergentes, 199
— — divergentes, 199
Solución de Friedman, 481, 514
— de Kasner, 508
Soluciones exactas de las ecuaciones del campo gravitatorio dependientes de una sola variable, 439
Sombra, 208
Stokes, generalización del teorema, 30
— parámetros de, 174, 176
Suceso, 5
Superficie de onda, 185
Superposición, principio de, 96

Tensor antisimétrico, 23
— campo electromagnético, 84-85
— contravariante, 322
— cuadridimensional de segundo orden, 22
— de curvatura, 361, 363
— — — covariante, 365
— — — mixto, 365
— de Ricci, 366
— de Riemann, 363
— energía-impulso, 108, 111, 375
— — — de los cuerpos macroscópicos, 120
— — — del campo electromagnético, 114

Tensor irreducible, 140
— métricos, 24, 323
— métrico contravariante, 323
— momento cuadripolar másico, 392
— — de inercia, 392
— polarización, 171
— simétrico, 23
— de tensiones, 113
— de tensiones de Maxwell, 115
Tensores duales, 25
Teorema de Gauss, 326, 341
— — — generalización, 29
— de Larmor, 149
— de Stokes, generalización, 30
— del virial, 118
— — — generalización relativista, 120
Teoría de la relatividad general, 318
Thomson, fórmula de, 303
Tiempo propio, 10
— universal, 345
Transformación de Galileo, 13
— de Lorentz, 13
— de las funciones de distribución, 40
— de la velocidad, 17
— de Lorentz del campo, 87
— de un cuadrimensor, 21
Translación, 333
— infinitesimal de un vector, 361
Translación, paralela, 333
Traza de un tensor, 23

Valor medio de la energía radiada, 286
Variación de la energía cinética, 68
Vector axil, 26
— corriente cuadridimensional, 98
— cuadridimensional, 20
— de Hertz, 268
— de onda, 162, 165
— de Poynting, 107
— densidad de corriente, 99
— polar, 26
Vectores de Killing, 501
— de referencia, 500
Velocidad cuadridimensional, 31
— de deriva eléctrica, 80
— de la carga, 99
— de la luz, 2, 5
— de propagación de las interacciones, 1-2
— del sistema-C, 43
— de una señal, 2
— relativa de dos partículas, 47
Virial, teorema del, 118, 120
Volumen propio, 16

Zona de ondas de una radiación, 242